الرياضيات

للصف السادس التطبيقي

طبعة جديدة ومنقحة ٢٠١٧

أعداد
الأستاذ / علي حميد

- شرح مفصل لجميع أمثلة وتمارين الكتاب حسب المنهج الجديد
- حلول التمارين العامة وجميع الأسئلة الوزارية
- أسئلة أضافية محلولة

رحلة التفوق في السادس @
07810837050

بسم الله الرحمن الرحيم

﴿وقل اعملوا فسيرى الله عملكم ورسوله والمؤمنون﴾

انطلاقا من قول المصطفى (ص): ((زكاة العلم نشرهُ وتعليمهُ))

تضع شبكة مواقع رحلة التفوق في السادس التعليمية التربوية الخيرية بين ايديكم احدى اعمالها من ملازم مرحلة السادس الاعدادي هذه المرحلة الهامة والمصيرية في حياة اعزائنا الطلبة وخاصة المتعففين منهم ولمن يتعذر عليه اقتناء هذه المساعدات المدرسية في محافظاتنا العراقية العزيزة بهدف النهوض وتطوير الواقع التعليمي ولو بالجزء اليسير.

إذ أن شبكتنا لاتقتصر عاى نشر الملازم المدرسية فقط أنما تقوم بنشر الدروس المرئية المجانية لأكفأ التدريسيين بالاضافة الى مجموعة قنواتنا التدريسية وكذلك الارشادات والنصائح وطرق الدراسة الصحيحة هذا من جهة. أما من جهة أخرى فهو كسر لشوكة بعض المحسوبين على الكادر التدريسي ممن يرفضون نشر ملازمهم والتعاون مع ابنائهم الطلبة ليأخذوا من المال هدفا أهم ويتناسوا مصلحة الطالب والواقع التعليمي المتدني.

علماً ان كادر الشبكة والقائمين عليها هم مجموعة من الشباب العراقي الواعي المثقف بالاضافة الى تعاون بعض المدرسين الكرام كما واننا غير تابعين لاي جهة كانت رسمية او غير رسمية انما سر تجمعنا وعملنا هو خيري بحت آملين من الله عز وجل ان يوفقنا لتقديم كل ما هو صالح لشعبنا و وطننا الحبيب.

كادر شبكة رحلة التفوق في السادس

٢٠١٥/٨/٢١

ا.د: اشرف الوائلي

ا.د: مينا الاحمد

الفصل الأول / الأعداد المركبة

تعريف :

يقال للعدد الذي يكتب بالصيغة $(c = a + bi)$ حيث a , b عددان حقيقيان و $(i = \sqrt{-1})$ عدد مركب حيث يسمى (a) الجزء الحقيقي $(real\ part)$ ويسمى (b) الجزء التخيلي (imaginary part) ويرمز لمجموعة الاعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$ ويرمز لجزؤه الحقيقي بالرمز R(C) ولجزؤه التخيلي بالرمز I(C) وتسمى الصيغة $(c = a + bi)$ بالصيغة العادية أو الجبرية للعدد المركب ويمكن وضعه بالصيغة الديكارتية للعدد المركب (a, b) وهي عبارة عن زوج مرتب حيث يستفاد منها في التمثيل الهندسي للأعداد المركبة وفي تطبيقات أخرى .

ويمكن حساب قوى العدد (i) كما في الأمثلة الأتية :-

$i = \sqrt{-1}$

$i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$

$i^3 = i^2 \, . \, i = (-1) \, . \, i = -i$

$i^4 = i^2 \, . \, i^2 = (-1) \, . \, (-1) = 1$

$i^{27} = i^{24} \, . \, i^3 = (i^4)^6 \, . \, (-i) = (1)^6 . \, (-i) = -i$

$i^{-15} = i^{-16} \, . \, i = (i^4)^{-4} \, . \, (i) = (1)^{-4} . \, (i) = i$

وبصورة عامة يكون $\boxed{i^{4n+r} = i^r}$ حيث $n \in Z$, $r = 0,1,2,3,4, \ldots.$ وهذا يعني أنه عند رفع (i) لعدد صحيح موجب فالناتج يجب أن يكون أحد عناصر المجموعة $\{1 , -1 , i, -I\}$ فمثلاً :-

$i^{25} = i^{24} \, . \, i = (i^4)^6 \, . \, (i) = (1)^6 . \, (i) = i$

$i^{100} = (i^4)^{25} = (1)^{25} = 1$

ملاحظة :

يمكننا كتابة الجذر لأي عدد حقيقي سالب بدلالة (i) فمثلاً :

$\sqrt{-15} = \sqrt{15} . \sqrt{-1} = \sqrt{15} i$ ، $\sqrt{-16} = \sqrt{16} . \sqrt{-1} = 4i$

$\sqrt{-25} = \sqrt{25} . \sqrt{-1} = 5i$ ، $\sqrt{-12} = \sqrt{12} . \sqrt{-1} = 2\sqrt{3} i$

مثال (1)/ أكتب ما يلي في أبسط صورة : $(a)\ i^{16}$ $(b) i^{58}$ $(c) i^{12n+93}$ $(d) i^{-13}$

$(a)\ i^{16} = \left(i^4\right)^4 = 1$ ، $(b) i^{58} = i^{56} . i^2 = \left(i^4\right)^{14} . (-1) = -1$

$(c) i^{12n+93} = \left(i^4\right)^{3n} . \, i^{93} = (1)^{3n} . \left(i^{92} . \, i\right) = (1) . \left(i^{4(23)} . \, i\right) = i$

$(d) i^{-13} = i^{-16} . \, i^3 = \left(i^4\right)^{-4} . (-i) = (1)^{-4} . (-i) = -i$

مما سبق أعلاه يتضح أن أي عدد مركب يجب أن يكون له جزء حقيقي وجزء تخيلي فمثلاً :

العدد $(3 - 5i)$ عدد مركب جزؤه الحقيقي 3 وجزؤه التخيلي -5

العدد $(-10 + 0i)$ عدد مركب جزؤه الحقيقي -10 وجزؤه التخيلي 0

العدد (-1) عدد مركب جزؤه الحقيقي -1 وجزؤه التخيلي 0

العدد $(-i)$ عدد مركب جزؤه الحقيقي 0 وجزؤه التخيلي -1

ملاحظة :

(1) $i = \sqrt{-1}$ ، $i^2 = -1$ ، $i^3 = -i$ ، $i^4 = 1$

(2) يستخدم $(i^4 = 1)$ وجميع مضاعفات العدد (4) في عمليات التبسيط .

مثال (2)/ أكتب الأعداد التالية على الصورة $a + bi$:

$(a)\ -5$ $\qquad (b)\ \sqrt{-100}$ $\qquad (c)\ -1-\sqrt{-3}$ $\qquad (d)\ \dfrac{1+\sqrt{-25}}{4}$

$$(a)\ -5 = -5 + 0i$$

$$(b)\ \sqrt{-100} = \sqrt{100}\,.\sqrt{-1} = 10i = 0 + 10i$$

$$(c)\ -1-\sqrt{-3} = -1-\sqrt{3}\,.\sqrt{-1} = -1-\sqrt{3}\,i$$

$$(d)\ \frac{1+\sqrt{-25}}{4} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{25}i}{4} = \frac{1}{4} + \frac{5}{4}i$$

مثال/ أكتب الأعداد التالية بالصيغة الجبرية للعدد المركب :

$$(a)\ i^{16} = (i^4)^4 = (1)^4 = 1 = 1 + 0i$$

$$(b)\ i^{15} = i^{12}\,.\,i^3 = (1)\,.(-i) = -i = 0 - i$$

$$(c)\ i^{-23} = \frac{1}{i^{23}} = \frac{i^{24}}{i^{23}} = i = 0 + i$$

$$(d)\ i^{-6} = \frac{1}{i^6} = \frac{i^8}{i^6} = i^2 = -1 = -1 + 0i$$

$$(e)\ i^{-44} = \frac{1}{i^{44}} = \frac{i^{44}}{i^{44}} = 1 = 1 + 0i$$

$$(f)\ i^{-13} = \frac{1}{i^{13}} = \frac{i^{16}}{i^{13}} = i^3 = -i = 0 - i \qquad (or) \qquad i^{-13} = i^{-13}.\,i^{16} = i^3 = -i = 0 - i$$

مثال / أكتب كلا مما يأتي بالصيغة bi :

$(1)\ \sqrt{-3}\ ,\quad (2)\ \sqrt{-16}\ ,\quad (3)\ \sqrt{-12}\ ,\quad (4)\ \sqrt{-a}$

$(1)\ \sqrt{-3} = \sqrt{3}.\sqrt{-1} = \sqrt{3}\ i$

$(2)\ \sqrt{-16} = \sqrt{16}.\sqrt{-1} = 4\ i$

$(3)\ \sqrt{-12} = \sqrt{12}.\sqrt{-1} = 2\sqrt{3}\ i$

$(4)\ \sqrt{-a} = \sqrt{a}.\sqrt{-1} = \sqrt{a}\ i$

مثال / عين الجزء الحقيقي والجزء التخيلي للأعداد المركبة التالية ثم ضعها بالصيغة الجبرية للعدد المركب .

العدد	$R(c)$	$I(c)$	الصيغة الجبرية
$1+3i$	1	3	$1+3i$
$6i$	0	6	$0+6i$
$-i$	0	-1	$0-i$
i	0	1	$0+i$
10	10	0	$10+0i$

واجبات

ضع كلاً مما يأتي بالصيغة العادية أو الجبرية للعدد المركب

(1) i^{10}
(2) i^{92}
(3) $22 - i^{3}$
(4) $5 - i^{16}$
(5) $5\,i^{10} + i^{3}$
(6) $18\,i^{8} - i^{2}$
(7) $(5\,i^{10} + i^{3}).i$
(8) $5\,i^{-4} - 3i^{-6}$

خاصية التساوي

يقال للعددان المركبان أنهما متساويان أذا تساوى جزءاهما الحقيقيان وجزءاهما التخيليان وكما يلي :

العددان $(C = a + bi)$ و $(Z = g + fi)$ متساويان اذا وفقط أذا $(b = f)$ ، $(a = g)$ ويستفاد من هذه الخاصية في أيجاد قيم الأعداد الحقيقية والأعداد التخيلية المجهولة التي تحقق المعادلات .

مثال (3)/ جد قيمة كل من x ,y الحقيقيتين التي تحققان المعادلة في كل مما يأتي :

$(a)\ 2x - 1 + 2i = 1 + (y+1)i$

$\because\ 2x - 1 = 1 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$ الجزء الحقيقي

$\because\ 2 = y + 1 \Rightarrow y = 1$ الجزء التخيلي

$(b)\ 3x + 4i = 2 + 8yi$

$\because\ 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ الجزء الحقيقي

$\because\ 4 = 8y \Rightarrow y = \frac{-1}{2}$ الجزء التخيلي

$(c)\ (2y + 1) - (2x - 1)i = -8 + 3i$

$\because\ 2y + 1 = -8 \Rightarrow 2y = -9 \Rightarrow y = \frac{-9}{2}$ الجزء الحقيقي

$\because\ -(2x - 1) = 3 \Rightarrow -2x + 1 = 3 \Rightarrow -2x = 2 \Rightarrow x = -1$ الجزء التخيلي

عملية الجمع على الأعداد المركبة

عند جمع الأعداد المركبة نجمع الأجزاء الحقيقية مع بعضها والأجزاء التخيلية مع بعضها والنـاتج هو أيضا عدد مركب وكما يلي :

نفرض $(C_1 = a_1 + b_1 i)$ و $(C_2 = a_2 + b_2 i)$ عددان مركبان فأن :

$$C_1 + C_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

خواص الجمع على الأعداد المركبة :

(1) عملية الجمع مغلقة أي أن ناتج جمع عددان مركبان هو أيضا عدد مركب
(2) عملية الجمع أبدالية أي أن $C_1 + C_2 = C_2 + C_1$
(3) عملية الجمع تجميعية أي أن $C_1 + (C_2 + C_3) = (C_1 + C_2) + C_3 = (C_1 + C_3) + C_2$
(4) النظير الجمعي للعدد $a + bi$ هو $-a - bi$
(5) العنصر المحايد (e) هو الصفر ويكتب $e = 0 = 0 + 0i$
مما سبق نستنتج أن $(\mathbb{C}, +)$ هي زمرة أبدالية

مثال (4)// جد مجموع العددين في كل مما يأتي :

$(a)\ 3 + 4\sqrt{2}\,i \ ,\ 5 - 2\sqrt{2}\,i$

$(3 + 4\sqrt{2}\,i) + (5 - 2\sqrt{2}\,i) = (3 + 5) + (4\sqrt{2}\,i - 2\sqrt{2}\,i) = 8 + 2\sqrt{2}\,i$

$(b)\ 3\ , 2 - 5i$

$(3 + 0i) + (2 - 5i) = (3 + 2) + (0 - 5i) = 5 - 5i$

$(c)\ 1 - i\ ,\ 3i$

$(1 - i) + (0 + 3i) = (1 + 0) + (-1 + 3)i = 1 + 2i$

مثال/ أوجد ناتج جمع الأعداد المركبة التالية :

$(1)\quad c = 1 + 5i \quad , \quad w = 3 + 7i \quad , \quad z = -1 - i$

$$c + w + z = (1 + 5i) + (3 + 7i) + (-1 - i) = (1 + 3 - 1) + (5 + 7 - 1)i = 3 + 11i$$

$(2)\quad 2 + \sqrt{-2} \quad , \quad -5 + \sqrt{2}\, i$

$$\left(2 + \sqrt{2}\, i\right) + \left(-5 + \sqrt{2}\, i\right) = (2 - 5) + \left(\sqrt{2} + \sqrt{2}\right)i = -3 + 2\sqrt{2}i$$

طرح الأعداد المركبة

أذا كان $\left(C_1 = a_1 + b_1 i \right.$ و $\left. C_2 = a_2 + b_2 i \right)$ فأن $c_1 - c_2 = c_1 + (-c_2)$

مثال (5)/ جد ناتج :

$(7 - 13i) - (9 + 4i)$

$(7 - 13i) + (-9 - 4i)$

$(7 - 9) + (-13 - 4)i = -2 - 17i$

مثال (6)/ حل المعادلة $(2 - 4i) + x = -5 + i$ حيث $x \in \mathbb{C}$

$$x = (-5 + i) - (2 - 4i) = (-5 + i) + (-2 + 4i) = (-5 - 2) + (1 + 4)i = -7 + 5i$$

مثال/ أذا كان $z = -1 - 11i \quad , \quad w = -1 - 7i \quad , \quad c = 1 + 2i$

فأوجد ما يلي $-2c - 4w + 3z$

$$-2c - 4w + 3z = -2(1 + 2i) - 4(-1 - 7i) + 3(-1 - 11i)$$

$$= (-2 - 4i) + (4 + 28i) + (-3 - 33i)$$

$$= (-2 + 4 - 3) + (-4 + 28 - 33)i = -1 - 9i$$

واجبات

أذا كان $z = -1 - 11i \quad , \quad w = -1 - 7i \quad , \quad c = 1 + 2i$ فأوجد ما يلي :

$(a)\ 2iw + iz + 3z \qquad (b)\ -3c + 2z - 4i + 2 \qquad (c)\ 3(z + c + w) \qquad (d)\ 2i(iz + 3i^3)$

عملية الضرب على الأعداد المركبة

أذا كان $(c = a + bi)$ ، $(z = g + fi)$, $k \in R$ فأن

(1) $c.z = (a + bi)(g + fi) = ag + afi + bgi + bfi^2 = (ag - bf) + (af + bg)i$

(2) $k.z = k(g + fi) = kg + kfi$

خواص عملية الضرب على الأعداد المركبة

(١) عملية الضرب مغلقة أي أن الناتج دائما عدد مركب

(٢) عملية الضرب أبدالية أي أن $C_1 \cdot C_2 = C_2 \cdot C_1$

(٣) عملية الضرب تجميعية أي أن $(C_1 \cdot C_2) \cdot C_3 = C_1 \cdot (C_2 \cdot C_3)$

(٤) المحايد الضربي هو (1) ويكتب $1 = 1 + 0i$

(٥) النظير الضربي للعدد (c) هو c^{-1} ويمكن أن يكتب بالصيغة $\frac{1}{c}$

مثال (7) / جد ناتج كلا مما يأتي :

$(a)\ (2 - 3i)(3 - 5i)$

$(2 - 3i)(3 - 5i) = 6 - 10i - 9i + 15i^2 = (6 - 15) + (-10 - 9)i = -9 - 19i$

$(b)\ (3 + 4i)^2$

$(3 + 4i)^2 = 9 + 24i + 16i^2 = 9 - 16 + 24i = -7 + 24i$

$(c)\ i(1 + i)$

$i(1 + i) = i + i^2 = i - 1 = -1 + i$

$(d)\ \frac{-5}{2}(4 + 3i)$

$\frac{-5}{2}(4 + 3i) = \frac{-5}{2}(4) - \frac{5}{2}(3)i = -10 - \frac{15}{2}i$

$(e)\ (1 + i)^2 + (1 - i)^2$

$(1 + i)^2 + (1 - i)^2 = (1 + 2i + i^2) + (1 - 2i + i^2) = 2i - 2i = 0$

واجبات

جد ناتج كل مما يلي :

(1) $(2 + \sqrt{-3})(1 + 2\sqrt{-3})$

(2) $i(1 + i) - i^3(1 + 2i)$

(3) $(3 + \sqrt{-8})(2 + 2\sqrt{-2})$

(4) $(\sqrt{2} + \sqrt{-2})^2$

مرافق العدد المركب

أذا كان C عدد مركب فأن مرافقه يرمز له $\bar{C}$ أي أذا كان $C = a + bi$ فأن $\bar{C} = a - bi$.

فمثلاً : $3 + i$ هو مرافق العدد $3 - i$ وبالعكس ، وكذلك مرافق العدد (i) هو $(-i)$ وبالعكس .

$\sqrt{3} + 2i$ هو مرافق العدد $\sqrt{3} - 2i$ وبالعكس ، وكذلك مرافق العدد 3 هو 3 .

ملاحظة :

أذا كان $(C_1 = a + bi)$ عدد مركب مرافقه هو $(C_2 = a - bi)$ و $K \in R$ فأن

(1) $C_1 + C_2 = 2a$
(2) $KC_1 + KC_2 = 2Ka$
(3) $C_1C_2 = (a^2 + b^2)$

الجدول أدناه يوضح المرافق للعدد المركب والنظير الجمعي والضربي :

العدد المركب	النظير الجمعي	النظير الضربي	المرافق
$a + bi$	$-a - bi$	$\frac{1}{a + bi}$	$a - bi$
$3 - 2i$	$-3 + 2i$	$\frac{1}{3 - 2i}$	$3 + 2i$
-4	4	$\frac{1}{-4}$	-4
$-6i$	$6i$	$\frac{1}{-6i}$	$6i$
i^3	$-i^3 = i$	$\frac{1}{i^3}$	i
i^2	$-i^2 = 1$	$\frac{1}{i^2} = i^2 = -1$	$i^2 = -1$
$(1 , -4)$	$(-1 , 4)$	$\frac{1}{(1 , -4)}$	$(1 , 4)$

مثال (8) / أذا كان $C_1 = 1 + i$, $C_2 = 3 - 2i$ فتحقق من :

(1) $\overline{C_1 + C_2} = \overline{C_1} + \overline{C_2}$

$L.S \quad \overline{C_1 + C_2} = \overline{1 + i + 3 - 2i} = \overline{4 - i} = 4 + i$

$R.S \quad \overline{C_1} + \overline{C_2} = \overline{1 + i} + \overline{3 - 2i} = 1 - i + 3 + 2i = 4 + i \quad \leftrightarrow \quad L.S = R.S$

(2) $\overline{C_1 - C_2} = \overline{C_1} - \overline{C_2}$

$L.S \quad \overline{C_1 - C_2} = \overline{1 + i - 3 + 2i} = \overline{-2 + 3i} = -2 - 3i$

$R.S \quad \overline{C_1} - \overline{C_2} = \overline{1 + i} - \overline{3 - 2i} = 1 - i - (3 + 2i) = -2 - 3i \quad \leftrightarrow \quad L.S = R.S$

$(3)\ \overline{C_1.C_2} = \overline{C_1}.\overline{C_2}$

$L.S\ \overline{C_1.C_2} = \overline{(1+i).(3-2i)} = \overline{3-2i+3i-2i^2} = \overline{5+i} = 5-i$

$R.S\ \overline{C_1}.\overline{C_2} = \overline{1+i}.\overline{3-2i} = (1-i).(3+2i) = 3+2i-3i-2i^2 = 5-i$

$(4)\ \overline{\overline{C_1}} = C_1$

$\overline{\overline{C_1}} = \overline{\overline{1+i}} = \overline{1-i} = 1+i = C_1$

$(5)\ \overline{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)} = \frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}} \qquad C_2 \neq 0$

$L.S\ \overline{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)} = \overline{\left(\frac{1+i}{3-2i}\right)} = \overline{\left(\frac{1+i}{3-2i}\times\frac{3+2i}{3+2i}\right)} = \overline{\left(\frac{3+2i+3i+2i^2}{9+4}\right)} = \overline{\left(\frac{1+5i}{13}\right)} = \frac{1-5i}{13}$

$R.S\ \frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}} = \frac{\overline{1+i}}{\overline{3-2i}} = \frac{1-i}{3+2i} = \frac{1-i}{3+2i}\times\frac{3-2i}{3-2i} = \frac{3-2i-3i+2i^2}{9+4} = \frac{1-5i}{13}$

ملاحظة :

(1) عند ظهور (i) في المقام نضرب مقام البسط وكسره بمرافق المقام لتبسيط الحل .

(2) يمكن أستخدام التعبير (مقلوب العدد المركب) بدل (النظير الضربي) ويرمز له بالرمز c^{-1} وهو يساوي $\frac{1}{c}$

مثال (9) / جد النظير الضربي للعدد المركب $(C = 2-2i)$ وضعه بالصيغة العادية للعدد المركب

$\frac{1}{C} = \frac{1}{2-2i} = \frac{1}{2-2i}\times\frac{2+2i}{2+2i} = \frac{2+2i}{2^2+2^2} = \frac{2+2i}{4+4} = \frac{2+2i}{8} = \frac{2}{8}+\frac{2}{8}i = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$

مثال (10) / أذا كان $\frac{3-2i}{i}$, $\frac{x-yi}{1+5i}$ مترافقان فجد قيمة كل من $x, y \in R$.

$\frac{x-yi}{1+5i} = \overline{\left(\frac{3-2i}{i}\right)} \quad \Rightarrow \quad \frac{x-yi}{1+5i} = \frac{3+2i}{-i}$

$-i(x-yi) = (3+2i)(1+5i)$

$-xi+yi^2 = 3+15i+2i+10i^2 \quad \Rightarrow \quad -xi-y = -7+17i$

من تساوي الأعداد المركبة نجد أن

$-y = -7 \Rightarrow \boxed{y = 7}$ الحقيقي

$-xi = 17i \Rightarrow \boxed{x = -17}$ التخيلي

مثال (11) / أذا كان $C_1 = 3-2i$, $C_2 = 1+i$ فتحقق من $\overline{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)} = \frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}}$

$$L.S \quad \overline{\left(\frac{C_1}{C_2}\right)} = \overline{\left(\frac{3-2i}{1+i}\right)} = \overline{\left(\frac{3-2i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i}\right)} = \overline{\left(\frac{3-3i-2i+2i^2}{1^2+1^2}\right)} = \overline{\left(\frac{1-5i}{2}\right)} = \frac{1+5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$R.S \quad \frac{\overline{C_1}}{\overline{C_2}} = \frac{\overline{3-2i}}{\overline{1+i}} = \frac{3+2i}{1-i} = \frac{3+2i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{3+3i+2i+2i^2}{1^2+1^2} = \frac{1+5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

قسمة الأعداد المركبة

عند قسمة عدد مركب على عدد مركب أخر نضرب بمرافق المقام وكما يلي

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{C_1}{C_2} \times \frac{\overline{C_2}}{\overline{C_2}}$$

مثال (12) / ضع كلا مما يأتي بالصورة $(a+bi)$:

$(a)\ \frac{1+i}{1-i} \quad \Rightarrow \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+i+i+i^2}{1^2+1^2} = \frac{2i}{2} = i = 0+i$

$(b)\ \frac{2-i}{3+4i} \quad \Rightarrow \frac{2-i}{3+4i} \times \frac{3-4i}{3-4i} = \frac{6-8i-3i+4i^2}{3^2+4^2} = \frac{2-11i}{9+16} = \frac{2-11i}{25} = \frac{2}{25} - \frac{11}{25}i$

$(c)\ \frac{1+2i}{-2+i} \quad \Rightarrow \frac{1+2i}{-2+i} \times \frac{-2-i}{-2-i} = \frac{-2-i-4i-2i^2}{(-2)^2+1^2} = \frac{0-5i}{5} = \frac{-5i}{5} = -i = 0-i$

ملاحظة :

يمكن تحليل x^2+y^2 الى حاصل ضرب عددين مركبين كل منهما من الصورة $a+bi$ أي :

$$x^2+y^2 = x^2 - y^2 i^2 = (x-yi)(x+yi)$$

مثال (13) / حلل كلاً مما يأتي الى حاصل ضرب عاملين من الصورة $a+bi$ حيث a, b أعداد نسبية .

$(a)10 \qquad (b)53 \qquad (c)39$

$(a) \quad 10 = 9+1 = 9-i^2 = (3-i)(3+i)$

$(b) \quad 53 = 49+4 = 49-4i^2 = (7-2i)(7+2i)$

$(c) \quad 39 = 36+3 = 36-3i^2 = (6-\sqrt{3}i)(6+\sqrt{3}i)$

تمارين (1 – 1)

س1 / ضع كلاً مما يأتي بالصيغة العادية للعدد المركب :

$i^5, i^6, i^{124}, i^{999}, i^{4n+1} \quad \forall n \in N, \ (2+3i)^2 + (12+2i), \ (10+3i)(0+6i),$
$(1+i)^4 - (1-i)^4, \ \frac{12+i}{i}, \ \frac{3+4i}{3-4i}, \ \frac{i}{2+3i}, \ \left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3, \ \frac{2+3i}{1-i} \times \frac{1+4i}{4+i},$
$(1+i)^3 + (1-i)^3$

$$i^5 = i^4.i = (1).i = i = 0+i$$

$$i^6 = i^4.i^2 = 1(-1) = -1 = -1+0i$$

$$i^{124} = (i^4)^{31} = (1)^{31} = 1 = 1+0i$$

$$i^{999} = (i^4)^{249}.i^3 = (1)^{249}.i^2.i = 1.(-1).i = -i = 0-i$$

$$i^{4n+1} = i^{4n}.i = (i^4)^n.i = (1)(i) = i = 0+i$$

$$(2+3i)^2 + (12+2i) = 4+12i+9i^2+12+2i = 7+14i$$

$$(10+3i)(0+6i) = 0+60i+0+18i^2 = -18+60i$$

$$(1+i)^4 - (1-i)^4 = ((1+i)^2)^2 - ((1-i)^2)^2 = (\cancel{1}+2i+\cancel{i^2})^2 - (\cancel{1}-2i+\cancel{i^2})^2$$
$$= (2i)^2 - (-2i)^2 = 4i^2 - 4i^2 = 0 = 0+0i$$

$$\frac{12+i}{i} = \frac{12+i}{i} \times \frac{-i}{-i} = \frac{-12i-i^2}{-i^2} = \frac{1-12i}{1} = 1-12i$$

$$\frac{3+4i}{3-4i} = \frac{3+4i}{3-4i} \times \frac{3+4i}{3+4i} = \frac{9+12i+12i+16i^2}{3^2+4^2} = \frac{-7+24i}{9+16} = \frac{-7}{25} + \frac{24}{25}i$$

$$\frac{i}{2+3i} = \frac{i}{2+3i} \times \frac{2-3i}{2-3i} = \frac{2i-3i^2}{2^2+3^2} = \frac{3+2i}{4+9} = \frac{3+2i}{13} = \frac{3}{13} + \frac{2}{13}i$$

$$\left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3 = \left(\frac{3+i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i}\right)^3 = \left(\frac{3-3i+i-i^2}{1^2+1^2}\right)^3 = \left(\frac{4-2i}{2}\right)^3 = (2-i)^3$$
$$= (2-i)^2(2-i) = (4-4i+i^2)(2-i) = (3-4i)(2-i) = 6-3i-8i+4i^2 = 2-11i$$

$$\frac{2+3i}{1-i} \times \frac{1+4i}{4+i} = \frac{2+8i+3i+12i^2}{4+i-4i-i^2} = \frac{-10+11i}{5-3i} = \frac{-10+11i}{5-3i} \times \frac{5+3i}{5+3i}$$
$$= \frac{-50-30i+55i+33i^2}{5^2+3^2} = \frac{-83+25i}{25+9} = \frac{-83+25i}{34} = \frac{-83}{34} + \frac{25}{34}i$$

$$(1+i)^3 + (1-i)^3 = (1+i)^2(1+i) + (1-i)^2(1-i)$$
$$= (\cancel{1}+2i+\cancel{i^2})(1+i) + (\cancel{1}-2i+\cancel{i^2})(1-i)$$
$$= \cancel{2i}+2i^2-\cancel{2i}+2i^2 = 4i^2 = -4 = -4+0i$$

س2 / جد قيمة كل من x , y الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلات الأتية :

$(a)\quad y+5i=(2x+i)(x+2i)$

$y+5i=2x^2+4xi+xi+2i^2 \Rightarrow y+5i=(2x^2-2)+(4x+x)i$

$y+5i=(2x^2-2)+5xi \Rightarrow y=2x^2-2$ → معادلة①

$5=5x \Rightarrow \boxed{x=1}$ نعوض في معادلة①

$y=2(1)^2-2=2-2=0 \Rightarrow \boxed{y=0}$

$(b)\quad 8i=(x+2i)(y+2i)+1$

$8i=xy+2xi+2yi+4i^2+1 \Rightarrow 8i=xy+2xi+2yi-3$

$8i=(xy-3)+(2x+2y)i$

$xy-3=0 \Rightarrow xy=3 \Rightarrow y=\frac{3}{x}$ → معادلة①

$2x+2y=8 \xRightarrow{(\div 2)} x+y=4 \Rightarrow y=4-x$ → ② (نعوض في معادلة①)

$x(4-x)=3 \Rightarrow 4x-x^2=3 \Rightarrow x^2-4x+3=0 \Rightarrow (x-3)(x-1)=0$

either $x-3=0 \Rightarrow \boxed{x=3}$ نعوض في معادلة② $\Rightarrow \boxed{y=1}$

or $x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=1}$ نعوض في معادلة② $\Rightarrow \boxed{y=3}$

$(c)\quad \left(\frac{1-i}{1+i}\right)+(x+yi)=(1+2i)^2$

$x+yi=(1+2i)^2-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)=(1+4i+4i^2)-\left(\frac{1-i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}\right)=-3+4i-\left(\frac{1-i-i+i^2}{1^2+1^2}\right)$

$x+yi=-3+4i-\left(\frac{-2i}{2}\right)=-3+4i+i \Rightarrow x+yi=-3+5i \Rightarrow \boxed{x=-3}\ \boxed{y=5}$

$(d)\quad \frac{2-i}{1+i}x+\frac{3-i}{2+i}y=\frac{1}{i}$

$\left[\frac{2-i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}\right]x+\left[\frac{3-i}{2+i}\times\frac{2-i}{2-i}\right]y=\frac{i^4}{i} \Rightarrow \left[\frac{2-2i-i+i^2}{1^2+1^2}\right]x+\left[\frac{6-3i-2i+i^2}{2^2+1^2}\right]y=i^3$

$\left[\frac{1-3i}{2}\right]x+\left[\frac{5-5i}{5}\right]y=-i \xRightarrow{\text{نضرب بالعدد } 10} 5(1-3i)x+2(5-5i)y=-10i$

$5x-15xi+10y-10yi=0-10i$

$5x+10y=0$ → معادلة①

$-15x-10y=-10$ → معادلة② تحل أنيآ بالجمع

$-10x=-10 \Rightarrow \boxed{x=1}$ (نعوض في معادلة①)

$5(1)+10y=0 \Rightarrow 10y=-5 \Rightarrow y=\frac{-5}{10} \Rightarrow \boxed{y=\frac{-1}{2}}$

س3 / أثبت أن :

$$(a)\quad \frac{1}{(2-i)^2}-\frac{1}{(2+i)^2}=\frac{8}{25}i$$

الطريقة الأولى $\frac{1}{(2-i)^2}-\frac{1}{(2+i)^2}=\left(\frac{1}{2-i}\right)^2-\left(\frac{1}{2+i}\right)^2$

$$\left(\frac{1}{2-i}\times\frac{2+i}{2+i}\right)^2-\left(\frac{1}{2+i}\times\frac{2-i}{2-i}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{2+i}{2^2+1^2}\right)^2-\left(\frac{2-i}{2^2+1^2}\right)^2$$

$$\left(\frac{2+i}{5}\right)^2-\left(\frac{2-i}{5}\right)^2=\left(\frac{4+4i+i^2}{25}\right)-\left(\frac{4-4i+i^2}{25}\right)=\left(\frac{3+4i}{25}\right)-\left(\frac{3-4i}{25}\right)$$

$$\frac{3+4i-3+4i}{25}=\frac{8i}{25}$$

الطريقة الثانية $\frac{1}{(2-i)^2}-\frac{1}{(2+i)^2}=\frac{(2+i)^2-(2-i)^2}{(2-i)^2(2+i)^2}=\frac{(4+4i+i^2)-(4-4i+i^2)}{(4-4i+i^2)(4+4i+i^2)}$

$$\frac{(3+4i)-(3-4i)}{(3-4i)(3+4i)}=\frac{3+4i-3+4i}{3^2+4^2}=\frac{8i}{9+16}=\frac{8i}{25}$$

الطريقة الثالثة $\frac{1}{(2-i)^2}-\frac{1}{(2+i)^2}=\frac{1}{4-4i+i^2}-\frac{1}{4+4i+i^2}=\frac{1}{3-4i}-\frac{1}{3+4i}$

$$\left(\frac{1}{3-4i}\times\frac{3+4i}{3+4i}\right)-\left(\frac{1}{3+4i}\times\frac{3-4i}{3-4i}\right)=\left(\frac{3+4i}{3^2+4^2}\right)-\left(\frac{3-4i}{3^2+4^2}\right)$$

$$\left(\frac{3+4i}{9+16}\right)-\left(\frac{3-4i}{9+16}\right)=\left(\frac{3+4i}{25}\right)-\left(\frac{3-4i}{25}\right)=\frac{3+4i-3+4i}{25}=\frac{8i}{25}$$

وزاري 2012 / د3

$$(b)\quad \frac{(1-i)^2}{1+i}+\frac{(1+i)^2}{1-i}=-2$$

الطريقة الأولى $\frac{(1-i)^3+(1+i)^3}{(1+i)(1-i)}=\frac{(1-i)^2(1-i)+(1+i)^2(1+i)}{1^2+1^2}$

$$\frac{(1-2i+i^2)(1-i)+(1+2i+i^2)(1+i)}{1+1}=\frac{(-2i)(1-i)+(2i)(1+i)}{2}$$

$$\frac{-2i+2i^2+2i+2i^2}{2}=\frac{2i^2+2i^2}{2}=\frac{-2-2}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

الطريقة الثانية $\frac{(1-i)^2}{1+i}+\frac{(1+i)^2}{1-i}=\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)}+\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)}$

$$\left(\frac{1-i}{1+i}\right)(1-i)+\left(\frac{1+i}{1-i}\right)(1+i)=\left(\frac{1-i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}\right)(1-i)+\left(\frac{1+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}\right)(1+i)$$

$$\left(\frac{1-i-i+i^2}{1^2+1^2}\right)(1-i)+\left(\frac{1+i+i+i^2}{1^2+1^2}\right)(1+i)=\left(\frac{-2i}{2}\right)(1-i)+\left(\frac{2i}{2}\right)(1+i)$$

$$(-i)(1-i)+(i)(1+i)=-i+i^2+i+i^2=i^2+i^2=-1-1=-2$$

الطريقة الثالثة $\frac{(1-i)^2}{1+i}+\frac{(1+i)^2}{1-i}=\frac{1-2i+i^2}{1+i}+\frac{1+2i+i^2}{1-i}=\frac{-2i}{1+i}+\frac{2i}{1-i}$

لاحظ عزيزي الطالب هنا تستطيع أن تضرب كل جزء بالمرافق أو توجد المضاعف (توحيد المقامات)

$$\frac{-2i(1-i)+2i(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{-2i+2i^2+2i+2i^2}{1^2+1^2}=\frac{2i^2+2i^2}{1+1}=\frac{-2-2}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

الطريقة الرابعة $\frac{(1-i)^2}{1+i}+\frac{(1+i)^2}{1-i}=\left[\frac{(1-i)^2}{1+i}*\frac{1-i}{1-i}\right]+\left[\frac{(1+i)^2}{1-i}*\frac{1+i}{1+i}\right]$

$$=\left[\frac{(1-i)^3}{1^2+1^2}\right]+\left[\frac{(1+i)^3}{1^2+1^2}\right]=\left[\frac{(1-i)^2(1-i)}{1+1}\right]+\left[\frac{(1+i)^2(1+i)}{1+1}\right]$$

$$=\left[\frac{(1-2i+i^2)(1-i)}{2}\right]+\left[\frac{(1+2i+i^2)(1+i)}{2}\right]=\left[\frac{(-2i)(1-i)}{2}\right]+\left[\frac{(2i)(1+i)}{2}\right]$$

$$=\left[\frac{-2i+2i^2}{2}\right]+\left[\frac{2i+2i^2}{2}\right]=\left[\frac{-2-2i}{2}\right]+\left[\frac{-2+2i}{2}\right]=-1-i-1+i=-2$$

$(c)\quad (1-i)(1-i^2)(1-i^3)=4$

$$(1-i)(1-i^2)(1-i^3)=(1-i)(1+1)[1-(-i)]$$

$$(1-i)(2)[1+i]=(1-i)(2+2i)=2+2i-2i-2i^2=2-2i^2=2+2=4$$

س4 / حلل كلاً من الأعداد 29 , 125 , 41 , 85 الى حاصل ضرب عاملين من الصورة $a+bi$ حيث b, a عددان نسبيان :

$29=25+4=25-4i^2=(5-2i)(5+2i)$

$125=121+4=121-4i^2=(11-2i)(11+2i)$

$41=25+16=25-16i^2=(5-4i)(5+4i)$

$85=81+4=81-4i^2=(9-2i)(9+2i)$

س5/ جد قيمة y , x أذا علمت أن $\frac{6}{x+yi}$, $\frac{3+i}{2-i}$ مترافقان .

نغير إشارة البسط والمقام للعدد التخيلي $\frac{3+i}{2-i}$ لكي يصبح العددان متساويان ونحل المعالة .

$$\frac{6}{x+yi}=\frac{3-i}{2+i} \Rightarrow (6)(2+i)=(x+yi)(3-i) \Rightarrow x+yi=\frac{(6)(2+i)}{3-i}$$

$$x+yi=\frac{(6)(2+i)}{3-i}\times\frac{3+i}{3+i}=\frac{(6)(6+2i+3i+i^2)}{3^2+1^2}=\frac{(6)(5+5i)}{9+1}=\frac{30+30i}{10}$$

$$x+yi=3+3i \Rightarrow \boxed{x=3} \ , \ \boxed{y=3}$$

****

أمثلة أضافية محلولة

مثال / أكتب بالصيغة العادية أو الجبرية كل مما يأتي :

(1) $(5+3i)(1+i)+(2-i)^2$

$$(5+5i+3i+3i^2)+(4-4i+i^2)=(2+8i)+(3-4i)=5+4i$$

(2) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}\,i}\right)^9$

$$\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}\,i}\right)^9=\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+\sqrt{3}\,i}\times\frac{1-\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}\right)^9=\left(\frac{\sqrt{3}-3i-i+\sqrt{3}\,i^2}{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}\right)^9=\left(\frac{-4i}{4}\right)^9=(-i)^9$$

$$=(-i)(i)^8=-i=0-i$$

(3) $\left(1-\sqrt{-3}\right)^2+\left(2-\sqrt{-3}\right)^2$

$$\left(1-\sqrt{3}\,i\right)^2+\left(2-\sqrt{3}\,i\right)^2=\left(1-2\sqrt{3}\,i+3i^2\right)+\left(4-4\sqrt{3}\,i+3i^2\right)$$

$$\left(-2-2\sqrt{3}\,i\right)+\left(1-4\sqrt{3}\,i\right)=-1-6\sqrt{3}\,i$$

مثال / جد عددين مركبين مترافقين مجموعهما $=6$ وحاصل ضربهما $=10$

نفرض أن العدد هو $(C_1=a+bi)$ عدد مركب مرافقه هو $(C_2=a-bi)$

$$\because\ C_1+C_2=2a \Rightarrow 6=2a \Rightarrow a=3$$

$$\because\ C_1.C_2=a^2+b^2 \Rightarrow 10=3^2+b^2 \Rightarrow b^2=1 \Rightarrow b=1$$

∴ العددان هما $(3-i)$ و $(3+i)$

مثال / أكتب العدد $(3+2i)(-2+i)$ بالصيغة العادية ثم جد النظير الضربي له بالصيغة الديكارتية .

الصيغة الجبرية $(3+2i)(-2+i) = (-6+3i-4i+2i^2) = -8-i$

الصيغة الديكارتية $\frac{1}{-8-i} = \frac{1}{-8-i} \times \frac{-8+i}{-8+i} = \frac{-8+i}{(-8)^2+1^2} = \frac{-8}{65} + \frac{1}{65}i = \left(\frac{-8}{65}, \frac{1}{65}\right)$

مثال / أذا كان $x = -1+2i$ فأوجد قيمة المعادلة x^2+2x+5

$x^2+2x+5 = (-1+2i)^2 + 2(-1+2i) + 5$

$= (1-4i+4i^2) + (-2+4i) + 5 = -3-4i-2+4i+5 = 0 = 0+0i$

مثال / أذا كان $x \in \mathbb{C}$ و $\bar{x}$ مرافق له جد العدد المركب الذي يحقق $3x+\bar{x} = 2i+3$

$let \quad x = a+bi \quad \therefore \quad \bar{x} = a-bi$

$3(a+bi) + (a-bi) = 2i+3 \quad \Rightarrow \quad 3a+3bi+a-bi = 2i+3$

$3a+a = 3 \quad \Rightarrow \quad 4a = 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{3}{4}}$

$3b-b = 2 \quad \Rightarrow \quad 2b = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = 1}$

$\therefore x = a+bi = \frac{3}{4} + i$

مثال / أذا كان $K = \frac{13-i}{4+i}$, $L = \frac{7-i}{2-i}$ أثبت أن L , K مترافقان ثم أحسب المقدار L^2K+2LK^2 .

تثبت أن ناتج عملية الجمع والضرب ينتمي الى مجموعة الأعداد الحقيقية R

$K = \frac{13-i}{4+i} = \frac{13-i}{4+i} \times \frac{4-i}{4-i} = \frac{52-13i-4i+i^2}{4^2+1^2} = \frac{51-17i}{17} = \frac{51}{17} - \frac{17}{17}i = 3-i$

$L = \frac{7-i}{2-i} = \frac{7-i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i} = \frac{14+7i-2i-i^2}{2^2+1^2} = \frac{15+5i}{5} = 3+i$

$(3+i)+(3-i) = 6 \quad \in R$

$(3+i)(3-i) = 3^2+1^2 = 9+1 = 10 \quad \in R$

$\therefore L , K$ مترافقان

$L^2K+LK^2 = LK(L+K) = (10)(6) = 60$

مثال / أكتب بالصيغة العادية أو الجبرية بدون الضرب بالعامل المنسب (المرافق)

$(a)\ \frac{5}{1-2i} \quad \Rightarrow \frac{5}{1-2i}=\frac{1+4}{1-2i}=\frac{1-4i^2}{1-2i}=\frac{(1-2i)(1+2i)}{(1-2i)}=1+2i$

$(b)\ \frac{5}{2-i} \quad \Rightarrow \frac{5}{2-i}=\frac{4+1}{2-i}=\frac{4-i^2}{2-i}=\frac{(2-i)(2+i)}{(2-i)}=2+i$

$(c)\ \frac{13}{2+3i} \quad \Rightarrow \frac{13}{2+3i}=\frac{4+9}{2+3i}=\frac{4-9i^2}{2+3i}=\frac{(2-3i)(2+3i)}{(2+3i)}=2-3i$

$(d)\ \frac{13}{3+2i} \quad \Rightarrow \frac{13}{3+2i}=\frac{9+4}{3+2i}=\frac{9-4i^2}{3+2i}=\frac{(3-2i)(3+2i)}{(3+2i)}=3-2i$

$(f)\ \frac{10}{1+2i} \quad \Rightarrow \frac{10}{1+2i}=\frac{2(5)}{1+2i}=\frac{2(1+4)}{1+2i}=\frac{2(1-4i^2)}{1+2i}=\frac{2(1-2i)(1+2i)}{(1+2i))}=2(1-2i)$

$\therefore \frac{10}{1+2i}=2-4i$

$(e)\ \frac{10}{2+i} \quad \Rightarrow \frac{10}{2+i}=\frac{2(5)}{2+i}=\frac{2(4+1)}{2+i}=\frac{2(4-i^2)}{2+i}=\frac{2(2-i)(2+i)}{(2+i)}=2(2-i)=4-2i$

مثال / حلل الى عاملين لعددين مركبين كل مما يأتي :

$(1)\quad x^2+4 \quad \Rightarrow x^2+4=x^2-4i^2=(x-2i)(x+2i)$

$(2)\quad y^2+25x^2 \quad \Rightarrow y^2+25x^2=y^2-25x^2i^2=(y-5xi)(y+5xi)$

$(3)\quad x^3-64i \quad \Rightarrow x^3-64i=x^3+64i^3=(x+4i)(x^2-4xi-16)$

$(4)\quad x^3+\frac{1}{27}i \quad \Rightarrow x^3+\frac{1}{27}i=x^3-\frac{1}{27}i^3=\left(x-\frac{1}{3}i\right)\left(x^2+\frac{1}{3}xi+\frac{1}{9}i^2\right)$

$\therefore x^3+\frac{1}{27}i=\left(x-\frac{1}{3}i\right)\left(x^2+\frac{1}{3}xi-\frac{1}{9}\right)$

$(5)\quad x^2-xi+12 \quad \Rightarrow x^2-xi+12=x^2-xi-12i^2=(x-4i)(x+3i)$

$(6)\quad x^2+7xi-10 \quad \Rightarrow x^2+7xi+10i^2=(x+5i)(x+2i)$

$(7)\quad (x-2)^2+4 \quad \Rightarrow (x-2)^2+4=(x-2)^2-4i^2=((x-2)-2i)\times((x-2)+2i)$

مثال/ أوجد قيمة x, y الحقيقيتين والتي تحقق المعادلة في كل مما يأتي :

$(a)\ (3+2i)^2 y = (x+3i)^2$

$(9+12i+4i^2)y = x^2+6xi+9i^2 \quad \Rightarrow \quad 9y+12yi-4y = x^2+6xi-9$

$9y-4y = x^2-9 \quad \Rightarrow \quad 5y = x^2-9 \quad \Rightarrow \quad y = \dfrac{x^2-9}{5}$ معادلة ①

$12y = 6x \Rightarrow 2y = x$ (نعوض في معادلة①)

$y = \dfrac{x^2-9}{5} = \dfrac{(2y)^2-9}{5} = \dfrac{4y^2-9}{5} \quad \Rightarrow \quad 5y = 4y^2-9 \Rightarrow 4y^2-5y-9=0$

$4y^2-5y-9=0 \quad \Rightarrow (4y-9)(y+1)=0$

$either\ \ 4y-9=0 \Rightarrow 4y=9 \Rightarrow \boxed{y=\dfrac{9}{4}} \Rightarrow x = 2y = 2\left(\dfrac{9}{4}\right) \Rightarrow \boxed{x=\dfrac{9}{2}}$

$or\quad y+1=0 \Rightarrow \boxed{y=-1} \Rightarrow x = 2y = 2(-1) \Rightarrow \boxed{x=-2}$

$(b)\quad y+5i = (2x+i)(x+i)$

$y+5i = (2x+i)(x+i) \quad \Rightarrow \quad y+5i = 2x^2+2xi+xi+i^2 \quad \Rightarrow \quad y+5i = 2x^2+3xi-1$

$y = 2x^2-1$ معادلة ①

$5i = 3xi \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=\dfrac{5}{3}}$ (نعوض في معادلة①)

$y = 2\left(\dfrac{5}{3}\right)^2 - 1 = 2\left(\dfrac{25}{9}\right) - 1 = \dfrac{50}{9} - 1 = \dfrac{50-9}{9} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y=\dfrac{41}{9}}$

$(c)\quad (x+yi)(2-i) = 8+i$

$(x+yi) = \dfrac{8+i}{2-i} = \dfrac{8+i}{2-i} \times \dfrac{2+i}{2+i} = \dfrac{16+8i+2i+i^2}{2^2+1^2} = \dfrac{15+10i}{5} = 3+2i$

$(x+yi) = 3+2i \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=3} \quad \boxed{y=2}$

$(d)\quad (x+yi)(a+bi) = 1$

$(x+yi) = \dfrac{1}{(a+bi)} = \dfrac{1}{a+bi} \times \dfrac{a-bi}{a-bi} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2} \quad \Rightarrow \quad x+yi = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$

$\boxed{x = \dfrac{a}{a^2+b^2}} \qquad \boxed{y = \dfrac{-b}{a^2+b^2}}$

$(e)\ \ x(x+i)+y(y-i)=13-i$

$x^2+xi+y^2-yi=13-i \quad \Rightarrow \quad (x^2+y^2)+(x-y)i=13-i$

$x^2+y^2=13$ → ① معادلة

$x-y=-1 \quad \Rightarrow \quad y=x+1$ → ②معادلة (نعوض معادلة②في ①)

$x^2+(x+1)^2=13 \quad \Rightarrow x^2+x^2+2x+1=13$

$2x^2+2x-12=0 \xrightarrow{\text{(نقسم المعادلة على 2)}} x^2+x-6=(x+3)(x-2)=0$

$either \quad x+3=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=-3} \Rightarrow y=x+1=-3+1 \Rightarrow \boxed{y=-2}$

$or \ \ x-2=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=2} \Rightarrow y=x+1=2+1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y=3}$

$(f)\ \ (2+xi)(-x+i)=\dfrac{9y^2+49}{3y+7i}$

$-2x+2i-x^2i+xi^2=\dfrac{9y^2-49i^2}{3y+7i}$

$-3x+(2-x^2)i=\dfrac{(3y-7i)(3y+7i)}{(3y+7i)} \quad \Rightarrow \quad -3x+(2-x^2)i=3y-7i$

$-3x=3y \quad \Rightarrow \quad -x=y$ → ① معادلة

$2-x^2=-7 \quad \Rightarrow \quad 2+7=x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2=9 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=\mp 3}$ (نعوض في معادلة①)

$y=-x \quad \Rightarrow \quad y=-(\mp 3) \quad \Rightarrow \quad \boxed{y=\pm 3}$

واجبات

س1 / حلل كل مما يأتي الى عاملين لعددين مركبين:

(1) x^2+9

(2) y^2+16x^2

(3) x^3-8i

(4) $x^3+\dfrac{1}{125}i$

(5) x^2-xi+6

(6) $x^2+7xi-12$

(7) $(x-1)^2+4$

(8) $(x^3-2i)^2+9$

س2 / أوجد قيمة x, y الحقيقيتين والتي تحقق المعادلة في كل مما يأتي :

$(a)\quad x + 2yi = (2 + 2i)^4$

$(b)\quad (x + yi)^2\,(1 + i)^3 = 1$

$(c)\quad (x + yi)^{-1} = \dfrac{(1+i)^3}{(1-i)^3}$

$(d)\quad \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{(x+yi)^2}{(1+i)^3}$

$(e)\quad x + yi = (5 + 2i)^{-2}$

س3 / ضع كلا مما يلي بالصيغة العادية للعدد المركب :

$(a)\ (5+2i)^{-2}$ $\qquad (b)\ (3+4i)^{-1}$ $\qquad (c)\ (1+2i)^{-2}$ $\qquad (d)\ (3+4i)^2$

****

الجذور التربيعية للعدد المركب

أذا كان $x^2 = a$ فأن $x = \pm\sqrt{a}$ وهي الجذور التربيعية للعد د (a) أما أذا كانت $x^2 = 4$ فأن $x = 2$ هو احد جذري المعادلة ولأيجاد الجذور التربيعية للعدد المركب توجد طريقتان لاحظ الأمثلة التالية .

مثال (14) / جد الجذور التربيعية للعدد $c = 8 + 6i$

الطريقة ① / نفرض أن الجذر التربيعي للعدد (c) هو $a + bi$

$(a+bi)^2 = 8 + 6i \quad \Rightarrow \quad a^2 + 2abi + b^2i^2 = 8 + 6i \quad \Rightarrow (a^2 - b^2) + (2ab)i = 8 + 6i$

$a^2 - b^2 = 8$ → ①معادلة

$2ab = 6 \quad \Rightarrow \quad ab = 3 \quad \Rightarrow \quad b = \dfrac{3}{a}$ → ②معادلة (نعوض معادلة② في ①)

$a^2 - \dfrac{9}{a^2} = 8 \quad \xrightarrow{(a^2\times \text{نضرب})} \quad a^4 - 9 = 8a^2 \quad \Rightarrow \quad a^4 - 8a^2 - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad (a^2 - 9)(a^2 + 1) = 0$

$either \quad a^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = \pm 3}$ نعوض في معادلة②

$b = \dfrac{3}{a} = \dfrac{3}{\pm 3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = \pm 1}$

$or \quad a^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 = -1$ (يهمل)

∴ الجذران هما $3 + i \ ,\ -3 - i$

الطريقة ② / نجزئ الجزء الحقيقي الى عددين

$\sqrt{8 + 6i} = \sqrt{9 + 6i - 1} = \sqrt{9 + 6i + i^2} = \sqrt{(3+i)^2} \xrightarrow{\text{بالجذر}} = \pm(3 + i)$

∴ الجذران هما $3 + i \ ,\ -3 - i$

ملاحظة :

عند أيجاد الجذور التربيعية لعدد مركب يحتوي على i نفرض الجذر هو $(a+bi)$ ثم نربعه ونكمل الحل كما في المثال التالي .

مثال (15) / جد الجذور التربيعية للأعداد : $8i \ ,-i, -17, -25$

$(a) \quad 8i$

الطريقة ① / نفرض أن الجذر التربيعي للعدد $(8i)$ هو $a+bi$

$8i=(a+bi)^2 \quad \Rightarrow \quad 8i=a^2+2ab+b^2i^2 \quad \Rightarrow \quad 8i=(a^2-b^2)+(2ab)i$

$a^2-b^2=0$ → معادلة①

$2ab=8 \quad \Rightarrow \quad ab=4 \quad \Rightarrow b=\frac{4}{a}$ → معادلة② (نعوض معادلة② في ①)

$a^2-\frac{16}{a^2}=0 \xrightarrow{(a^2\times \text{نضرب})} a^4-16=0 \quad \Rightarrow (a^2-4)(a^2+4)=0$

$either \quad a^2-4=0 \quad \Rightarrow a^2=4 \quad \Rightarrow \boxed{a=\pm 2}$ نعوضها في معادلة ②

$b=\frac{4}{a}=\frac{4}{\pm 2} \quad \Rightarrow \boxed{b=\pm 2}$

$or \quad a^2+4=0 \quad \Rightarrow \quad a^2=-4$ (تهمل)

∴ الجذران هما $\boxed{-2-2i \quad , \quad 2+2i}$

الطريقة ② /

$\sqrt{8i}=\sqrt{4+8i-4}=\sqrt{4+8i+4i^2}=\sqrt{(2+2i)^2} \xrightarrow{\text{بالجذر}} \pm(2+2i)$

∴ الجذران هما $\boxed{-2-2i \quad , \quad 2+2i}$

$(b) \quad -i$

الطريقة ① / نفرض أن الجذر التربيعي للعدد $(-i)$ هو $a+bi$

$-i=(a+bi)^2 \quad \Rightarrow \quad -i=a^2+2ab+b^2i^2 \quad \Rightarrow \quad -i=(a^2-b^2)+(2ab)i$

$a^2-b^2=0$ → معادلة①

$2ab=-1 \quad \Rightarrow \quad ab=\frac{-1}{2} \quad \Rightarrow \quad b=\frac{-1}{2a}$ → معادلة② (نعوض معادلة② في ①)

$a^2-\frac{1}{4a^2}=0 \xrightarrow{(4a^2\times \text{نضرب})} 4a^4-1=0 \quad \Rightarrow \quad (2a^2-1)(2a^2+1)=0$

$either \quad 2a^2-1=0 \quad \Rightarrow 2a^2=1 \quad \Rightarrow \quad a^2=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \boxed{a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$ نعوضها في معادلة ②

$b=\frac{-1}{2a}=\frac{-1}{2\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \quad \Rightarrow \quad b=\frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \quad \Rightarrow \boxed{b=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$or \quad 2a^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow 2a^2 = -1 \quad \Rightarrow a^2 = \frac{-1}{2}$ (تهمل)

∴ الجذران هما $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \quad , \quad \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$

الطريقة ② /

$$\sqrt{-i} = \sqrt{\frac{1}{2} - i - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} - i + \frac{1}{2}i^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2} = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

∴ الجذران هما $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} i \quad , \quad \frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} i$

$(c) \quad -17$

$$c^2 = -17 \quad \Rightarrow c = \pm\sqrt{-17} = \pm\sqrt{17(-1)} = \pm\sqrt{17i^2} \quad \Rightarrow \quad c = \pm\sqrt{17}\, i$$

$(d) \quad -25$

$$c^2 = -25 \quad \Rightarrow c = \pm\sqrt{-25} = \pm\sqrt{25(-1)} = \pm\sqrt{25i^2} \quad \Rightarrow \quad c = \pm 5\, i$$

حل المعادلة التربيعية في $\mathbb{C}$

كل معادلة تربيعية لا يمكن حلها بطريقة التجربة فهي تحل بطريقة الدستور مثلاً $ax^2 + bx + c = 0$

حيث $a \neq 0$ و $a\,,b\,,c \in R$ فأن $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ونلاحـظ أنـــه أذا كان مقـدار المميـز $(b^2 - 4ac)$ سالباً فأن مجموعة الحلول الخاصة بالمعادلة تنتمي الى مجموعة الأعداد المركبة ويوجد نوعان من حل المعادلات التربيعية .

النوع الأول / المميز لا يحتوي على (i)

مثال (16) / حل المعادلة التربيعية $x^2 + 4x + 5 = 0$ في مجموعة الأعداد المركبة .

حسب قانون الدستور فأن $c = 5$, $b = 4$, $a = 1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(5)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4(-1)}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{-4 \pm 2i}{2} \quad \Rightarrow \quad x = -2 \pm i$$

∴ مجموعة حل المعادلة هي : $\{-2 + i \quad , \quad -2 - i\}$

ملاحظة :

من قانون الدستور نعلم أن جذري المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ التي معاملاتها الحقيقية هي

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad , \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 + x_2 = \frac{-2b}{2a} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}} \rightarrow \text{(مجموع الجذرين)}$$

$$x_1 . x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 . x_2 = \frac{b^2 + b\sqrt{b^2 - 4ac} - b\sqrt{b^2 - 4ac} - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

$$\boxed{x_1 . x_2 = \frac{c}{b}} \rightarrow \text{(حاصل ضرب الجذرين)}$$

ويمكن الاستفادة من الخاصية أعلاه في أيجاد الجذور التربيعية وكما يلي :

$$\boxed{x^2 - \text{(مجموع الجذرين)}\, x + \text{(حاصل ضرب الجذرين)} = 0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x^2 - \frac{b}{a}x + \frac{c}{b} = 0}$$

مثال (17) / جد المعادلة التربيعية التي جذراها $\pm(2 + 2i)$

مجموع الجذرين $(-2 - 2i) + (2 + 2i) = (-2 + 2) + (-2 + 2)i = 0 + 0i$

حاصل ضرب الجذرين $(-2 - 2i) . (2 + 2i) = -4 - 4i - 4i - 4i^2 = -4 - 8i + 4 = -8i$

$\because \quad x^2 - \text{(مجموع الجذرين)}\, x + \text{(حاصل ضرب الجذرين)} = 0$

المعادلة التربيعية $x^2 - (0)x + (-8i) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 8i = 0$

ملاحظة :

المعادلة التربيعية التي معاملاتها حقيقية والتي أحد جذراها $(a + bi)$ حيث $b \neq 0$ فأن الجذر الأخر هو $(a - bi)$ والعكس صحيح .

مثال (18) / كون المعادلة التربيعية التي معاملاتها حقيقية وأحد جذريها $3 - 4i$

$\because$ معاملات المعادلة حقيقية وأحد الجذرين هو $3 - 4i$

$\therefore$ الجذر الأخر هو المرافق ويساوي $3 + 4i$

مجموع الجذرين $(3 - 4i) + (3 + 4i) = (3 + 3) + (-4 + 4)i = 6$

حاصل ضرب الجذرين $(3 - 4i) . (3 + 4i) = 9 + 12i - 12i - 16i^2 = 9 + 16 = 25$

$\because \quad x^2 - \text{(مجموع الجذرين)}\, x + \text{(حاصل ضرب الجذرين)} = 0$

المعادلة التربيعية $x^2 - (6)x + (25) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 6x + 25 = 0$

تمارين(2 − 1)

س1 / حل المعادلات التربيعية الأتية وبين أي منها يكون جذراها مترافقان ؟

$(a)\quad z^2 = -12$

$z^2 = 12i^2 \quad \Rightarrow \quad z = \sqrt{12i^2} \quad \Rightarrow \quad z = \pm 2\sqrt{3}\, i$ (جذراها مترافقان)

$(b)\quad z^2 - 3z + 3 + i = 0$

$\boxed{a = 1 \qquad b = -3 \qquad c = 3 + i}$ تحل بالدستور

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{9 - 4(1)(3+i)}}{2(1)}$$

$$Z = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12 - 4i}}{2} \quad \Rightarrow \boxed{Z = \frac{3 \pm \sqrt{-3 - 4i}}{2}}$$ → معادلة①

الأن نحسب مقدار الجذر $\sqrt{-3 - 4i}$ ثم نعوضه في المعادلة ①

$let \quad a + bi = \sqrt{-3 - 4i} \xrightarrow{\text{تربيع الطرفين}} (a + bi)^2 = -3 - 4i \quad \Rightarrow (a^2 - b^2) + 2abi = -3 - 4i$

$a^2 - b^2 = -3$ → معادلة②

$2ab = -4 \quad \Rightarrow b = \frac{-4}{2a} \quad \Rightarrow b = \frac{-2}{a}$ → معادلة③ (نعوض معادلة③ في ②)

$a^2 - \left(\frac{-2}{a}\right)^2 = -3 \quad \Rightarrow \quad a^2 - \frac{4}{a^2} = -3$ (نضرب $\times a^2$)

$a^4 - 4 = -3a^2 \quad \Rightarrow \quad a^4 + 3a^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow (a^2 + 4)(a^2 - 1) = 0$

$either \quad a^2 + 4 = 0 \quad \Rightarrow a^2 = -4$ (يهمل)

$or \quad a^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow a^2 = 1 \quad \Rightarrow \boxed{a = \pm 1}$ (نعوض في معادلة③)

$b = \frac{-2}{a} \quad \Rightarrow \mathrm{b} = \frac{-2}{\pm 1} \quad \Rightarrow \boxed{b = \mp 2}$

∴ الجذران هما $\boxed{1 - 2i \ , \ -1 + 2i}$ نعوض في المعادلة ①

$either \quad Z = \frac{3 - 1 + 2i}{2} = \frac{2 + 2i}{2} \quad \Rightarrow \mathrm{Z = 1 + i}$

$or \quad Z = \frac{3 + 1 - 2i}{2} = \frac{4 - 2i}{2} \quad \Rightarrow \mathrm{Z = 2 - i}$

∴ مجموعة الحل هي $\{1 + i \ , \ 2 - i\}$ والجذران غير مترافقان

$(C)\quad 2Z^2 - 5Z + 13 = 0$

$a = 2 \quad b = -5 \quad c = 13$ تحل بالدستور

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{25 - 4(2)(13)}}{2(2)} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 104}}{4}$$

$$Z = \frac{5 \pm \sqrt{-79}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{79 i^2}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{79}\ i}{4} \quad \Rightarrow Z = \frac{5}{4} \pm \frac{\sqrt{79}\ i}{4}$$

∴ مجموعة الحل هي $\left\{\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{79}}{4} i \ ,\ \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{79}}{4} i\right\}$ والجذران مترافقان

$(d)\quad Z^2 + 2Z + i(2 - i) = 0$

$a = 1 \quad b = 2 \quad c = i(2 - i) = 2i - i^2 = 1 + 2i$ تحل بالدستور

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(1 + 2i)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 - 8i}}{2}$$

$$Z = \frac{-2 \pm \sqrt{-8i}}{2}$$ → معادلة ①

الأن نحسب مقدار الجذر $\sqrt{-8i}$ ثم نعوضه في المعادلة ①

$let \quad a + bi = \sqrt{-8i} \xrightarrow{\text{تربيع الطرفين}} (a + bi)^2 = -8i \quad \Rightarrow (a^2 - b^2) + 2abi = 0 - 8i$

$a^2 - b^2 = 0$ → معادلة ②

$2ab = -8 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-8}{2b} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-4}{b}$ → معادلة ③ (نعوض معادلة ③ في ②)

$\left(\frac{-4}{b}\right)^2 - b^2 = 0 \quad \Rightarrow \frac{16}{b^2} - b^2 = 0$ (نضرب $\times -b^2$)

$b^4 - 16 = 0 \quad \Rightarrow (b^2 - 4)(b^2 + 4) = 0$

$either \quad b^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow b^2 = 4 \quad \Rightarrow b = \pm 2$ (نعوض في معادلة ③)

$a = \frac{-4}{b} \quad \Rightarrow a = \frac{-4}{\pm 2} \quad \Rightarrow a = \mp 2$

∴ الجذران هما $-2 + 2i \ ,\ 2 - 2i$ نعوض في المعادلة ①

$$\text{either} \quad Z = \frac{-2 + 2 - 2i}{2} = \frac{-2i}{2} \quad \Rightarrow \quad Z = -i$$

$$or \quad Z = \frac{-2 - 2 + 2i}{2} = \frac{-4 + 2i}{2} \quad \Rightarrow \quad Z = -2 + i$$

∴ مجموعة الحل هي $\{-2 + i \ ,\ -i\}$ والجذران غير مترافقان

يمكن حل الفرع (d) السابق بطريقة أخرى بواسطة قانون التجربة لاحظ الحل

$Z^2 + 2Z + i(2 - i) = 0$

$(Z + i)(Z + 2 - i) = 0$

either $\boxed{Z = -i}$ or $\boxed{Z = -2 + i}$

$\therefore$ مجموعة الحل هي $\{-i \quad , \quad -2 + i\}$ والجذران غير مترافقان

$(e) \quad 4Z^2 + 25 = 0$

$$4Z^2 = -25 \quad \Rightarrow Z^2 = \frac{-25}{4} \quad \Rightarrow Z^2 = \frac{25i^2}{4} \quad \Rightarrow Z = \sqrt{\frac{25i^2}{4}} \quad \Rightarrow Z = \pm\frac{5}{2}i$$

$\therefore$ مجموعة الحل هي $\left\{\frac{5}{2}i \quad , \quad -\frac{5}{2}i\right\}$ والجذران مترافقان

$(f) \quad Z^2 - 2Zi + 3 = 0$

$Z^2 - 2Zi - 3i^2 = 0 \qquad \Rightarrow (Z - 3i)(Z + i) = 0$

either $Z - 3i = 0 \quad \Rightarrow \boxed{Z = 3i}$ *or* $Z + i = 0 \quad \Rightarrow \boxed{Z = -i}$

$\therefore$ مجموعة الحل هي $\{3i \quad , \quad -i\}$ والجذران غير مترافقان

$Z^2 - 2Zi + 3 = 0$ (حل أخر)

تحل بالدستور $\boxed{a = 1 \qquad b = -2i \qquad c = 3}$

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2i) \pm \sqrt{-4 - 4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{2i \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2i \pm 4i}{2} = i \pm 2i$$

$\therefore$ مجموعة الحل هي $\{3i \quad , \quad -i\}$ والجذران غير مترافقان

س2 / كون المعادلة التربيعية التي جذراها M, L حيث :

$(a) \quad M = 1 + 2i \qquad L = 1 - i$

مجموع الجذرين $(1 + 2i) + (1 - i) = (1 + 1) + (2 - 1)i = 2 + i$

حاصل ضرب الجذرين $(1 + 2i).(1 - i) = 1 - i + 2i - 2i^2 = 3 + i$

$\because \quad x^2 - ($مجموع الجذرين$)x + ($حاصل ضرب الجذرين$) = 0$

المعادلة التربيعية $\therefore \quad x^2 - (2 + i)x + (3 + i) = 0$

$(b)\quad M=\dfrac{3-i}{1+i}\qquad L=(3-2i)^2$

$$M=\frac{3-i}{1+i}=\frac{3-i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{3-3i-i+i^2}{1^2+1^2}=\frac{2-4i}{2}\qquad\Rightarrow\boxed{M=1-2i}$$

$$L=(3-2i)^2=9-12i+4i^2=5-12i\qquad\Rightarrow\boxed{L=5-12i}$$

$(1-2i)+(5-12i)=(1+5)+(-2-12)i=6-14i$ مجموع الجذرين

$(1-2i).(5-12i)=5-12i-10i+24i^2=-19-22i$ حاصل ضرب الجذرين

$\because\quad x^2-$ (مجموع الجذرين) $x+$ (حاصل ضرب الجذرين) $=0$

$\therefore\quad x^2-(6-14i)x+(-19-22i)=0$ المعادلة التربيعية

س3 / جد الجذور التربيعية للأعداد المركبة الأتية :

$(a)\ -6i$

$let\quad a+bi=\sqrt{6}i \xrightarrow{\text{تربيع الطرفين}} (a+bi)^2=-6i\quad\Rightarrow\quad a^2+2abi+b^2i^2=-6i$

$(a^2-b^2)+(2ab)i=-6i$

$a^2-b^2=0\ \rightarrow$ ①معادلة

$2ab=-6\quad\Rightarrow b=\dfrac{-6}{2a}\qquad\Rightarrow b=\dfrac{-3}{a}\ \rightarrow$ ②معادلة (نعوض معادلة② في ①)

$a^2-\left(\dfrac{-3}{a}\right)^2=0\quad\Rightarrow a^2-\dfrac{9}{a^2}=0\xrightarrow{(\text{نضرب}\times a^2)}a^4-9=0$

$a^4-9=0\qquad\Rightarrow\quad(a^2-3)(a^2+3)=0$

$either\quad a^2-3=0\quad\Rightarrow a^2=3\quad\Rightarrow\boxed{a=\pm\sqrt{3}}$ (نعوض في معادلة②)

$b=\dfrac{-3}{a}\quad\Rightarrow b=\dfrac{-3}{\pm\sqrt{3}}\quad\Rightarrow\boxed{b=\mp\sqrt{3}}$

$or\quad a^2+3=0\quad\Rightarrow\quad a^2=-3$ (تهمل)

$\therefore$ الجذران هما $\boxed{\sqrt{3}-\sqrt{3}i\ ,\ -\sqrt{3}+\sqrt{3}i}$

(b) $7+24i$

$let \quad a+bi=\sqrt{7+24i} \xrightarrow{\text{تربيع الطرفين}} (a+bi)^2 = 7+24i$

$a^2+2abi+b^2i^2 = 7+24i \quad \Rightarrow \quad (a^2-b^2)+(2ab)i = 7+24i$

$a^2-b^2=7$ → ①معادلة

$2ab=24 \quad \Rightarrow b=\frac{24}{2a} \quad \Rightarrow b=\frac{12}{a}$ → ②معادلة (نعوض في معادلة①)

$a^2-\left(\frac{12}{a}\right)^2=7 \quad \Rightarrow a^2-\frac{144}{a^2}=7 \xrightarrow{(a^2\times\text{نضرب})} a^4-144=7a^2$

$a^4-7a^2-144=0 \quad \Rightarrow \quad (a^2-16)(a^2+9)=0$

$either \quad a^2-16=0 \quad \Rightarrow \quad a^2=16 \quad \Rightarrow \boxed{a=\pm4}$ (نعوض في معادلة②)

$b=\frac{12}{a} \quad \Rightarrow b=\frac{12}{\pm4} \quad \Rightarrow \boxed{b=\pm3}$

$or \quad a^2+9=0 \quad \Rightarrow a^2=-9$ (تهمل)

∴ الجذران هما $4+3i \quad , -4-3i$

(c) $\frac{4}{1-\sqrt{3}\,i}$

يجب تحويلة الى الصيغة $a+bi$ عن طريق الضرب بمرافق المقام

$$\frac{4}{1-\sqrt{3}\,i}=\frac{4}{1-\sqrt{3}\,i}\times\frac{1+\sqrt{3}\,i}{1+\sqrt{3}\,i}=\frac{4(1+\sqrt{3}\,i)}{1^2+(\sqrt{3})^2}=\frac{4(1+\sqrt{3}\,i)}{1+3}=\frac{4(1+\sqrt{3}\,i)}{4}=1+\sqrt{3}\,i$$

الطريقة ① /

$let \quad a+bi=\sqrt{1+\sqrt{3}\,i} \xrightarrow{\text{تربيع الطرفين}} (a+bi)^2=1+\sqrt{3}\,i$

$a^2+2abi+b^2i^2=1+\sqrt{3}\,i \quad \Rightarrow \quad (a^2-b^2)+(2ab)i=1+\sqrt{3}\,i$

$a^2-b^2=1$ → ①معادلة

$2ab=\sqrt{3} \quad \Rightarrow a=\frac{\sqrt{3}}{2b}$ → ②معادلة (نعوض في معادلة①)

$\left(\frac{\sqrt{3}}{2b}\right)^2-b^2=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4b^2}-b^2=1 \xrightarrow{(4a^2\times\text{نضرب})} 3-4b^4=4b^2$

$4b^4+4b^2-3=0 \quad \Rightarrow (2b^2+3)(2b^2-1)=0$

$either \quad 2b^2-1=0 \quad \Rightarrow 2b^2=1 \quad \Rightarrow b^2=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \boxed{b=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$ (نعوض في معادلة②)

$a=\frac{\sqrt{3}}{2b} \quad \Rightarrow a=\frac{\sqrt{3}}{2\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{2}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \quad \Rightarrow \boxed{a=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}}$

$or \quad 2b^2+3=0 \quad \Rightarrow 2b^2=-3$ (تهمل)

∴ الجذران هما $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i \quad , \quad -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i$

الطريقة ② /

$$\sqrt{1+\sqrt{3}\,i} = \sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{3}\,i-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}+\sqrt{3}\,i+\frac{1}{2}i^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2} = \pm\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$$

∴ الجذران هما $-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i \quad , \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i$

س4 / ما المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية وأحد جذريها هو :

$(a) \quad i$

∵ المعاملات أعداد حقيقية لذا فان الجذر الأخر هو المرافق وهو $-i$

مجموع الجذرين $(i)+(-i)=(0+0)+(1-1)i=0+0i$

حاصل ضرب الجذرين $(i).(-i)=-i^2=-(-1)=1$

$\because \quad x^2-(\text{مجموع الجذرين})x+(\text{حاصل ضرب الجذرين})=0$

$\therefore \quad x^2-(0)x+(1)=0 \quad \Rightarrow \quad x^2+1=0$ المعادلة التربيعية

$(b) \quad 5-i$

∵ المعاملات أعداد حقيقية لذا فان الجذر الأخر هو المرافق وهو $(5+i)$

مجموع الجذرين $(5-i)+(5+i)=(5+5)+(-1+1)i=10$

حاصل ضرب الجذرين $(5-i).(5+i)=25-5i+5i-i^2=25+1=26$

$\because \quad x^2-(\text{مجموع الجذرين})x+(\text{حاصل ضرب الجذرين})=0$

$\therefore \quad x^2-10x+26=0$ المعادلة التربيعية

$(c) \quad \frac{\sqrt{2}+3i}{4}$

∵ المعاملات أعداد حقيقية لذا فان الجذر الأخر هو المرافق وهو $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{3}{4}i\right)$

مجموع الجذرين $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3}{4}i\right)+\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{3}{4}i\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\right)i=\frac{2\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

حاصل ضرب الجذرين $\left(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{3}{4}i\right).\left(\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{3}{4}i\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{2}{16}+\frac{9}{16}=\frac{11}{16}$

$\because \quad x^2-(\text{مجموع الجذرين})x+(\text{حاصل ضرب الجذرين})=0$

$\therefore \quad x^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)x+\left(\frac{11}{16}\right)=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-\frac{1}{\sqrt{2}}x+\frac{11}{16}=0$ المعادلة التربيعية

س5 / أذا كان $3+i$ هو أحد جـــذري المعادلة $x^2 - ax + (5+5i) = 0$ فما قيمة $a \in ₵$ ؟ وما قيمة الجذر الأخر؟ وزاري 2011 / د1

نفرض الجذر الأخر هو k

$(3+i) + (k) = a$ → معادلة① (مجموع الجذرين)

$(3+i).(k) = 5+5i$ (حاصل ضرب الجذرين)

$k = \frac{5+5i}{3+i} = \frac{5+5i}{3+i} \times \frac{3-i}{3-i} = \frac{15-5i+15i-5i^2}{3^2+1^2} = \frac{20+10i}{10} = 2+i$ (الجذر الأخر)

$k = 2+i$ (نعوض في معادلة①)

$\because (3+i)+(k) = a \quad \Rightarrow (3+i)+(2+i) = a \quad \Rightarrow \boxed{a = 5+2i}$

****

أمثلة أضافية محلولة

مثال / أوجد الجذور التربيعية للعدد المركب $-55-48i$ ثم أســـتخدم الناتج في أيجاد الحل للمعادلة التربيعية التالية $x^2 + (1+2i)x + 13(1+i) = 0$

نفرض أن الجذر التربيعي للعدد $(-55-48i)$ هو $a+bi$

$let \quad a+bi = \sqrt{-55-48i} \xrightarrow{\text{تربيع الطرفين}} (a+bi)^2 = -55-48i$

$a^2 + 2abi + b^2i^2 = -55-48i \quad \Rightarrow \quad (a^2-b^2) + (2ab)i = -55-48i$

$a^2 - b^2 = -55$ → معادلة①

$2ab = -48 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-48}{2b} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-24}{b}$ → معادلة② (نعوض في معادلة①)

$\frac{576}{b^2} - b^2 = -55 \xrightarrow{(\text{نضرب} \times b^2)} 576 - b^4 = -55b^2 \quad \Rightarrow b^4 - 55b^2 - 576 = 0$

$(b^2-64)(b^2+9) = 0$

$either \quad b^2 = 64 \quad \Rightarrow \boxed{b = \pm 8}$ نعوض في معادلة②

$a = \frac{-24}{b} = \frac{-24}{\pm 8} \quad \Rightarrow \boxed{a = \mp 3}$

$or \quad b^2 + 9 = 0 \quad \Rightarrow b^2 = -9$ (يهمل)

∴ الجذران هما $3-8i \;,\; -3+8i$

الأن نحل المعادلة $x^2 + (1+2i)x + 13(1+i) = 0$ بأستخدام قانون الدستور حيث

$\boxed{a = 1 \;,\; b = (1+2i) \;,\; c = 13(1+i)}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-(1+2i) \pm \sqrt{(1+2i)^2 - 4(1)(13+13i)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-(1+2i) \pm \sqrt{1+4i+4i^2-(52+52i)}}{2(1)} = \frac{-(1+2i) \pm \sqrt{1+4i-4-(52+52i)}}{2}$$

$$x=\frac{-(1+2i)\pm\sqrt{1+4i-4-52-52i}}{2}=\frac{-(1+2i)\pm\sqrt{-55-48i}}{2}$$

الأن نعوض الجذور التي قمنا بحسابها سابقا للعدد $-55-48i$

$$x=\frac{-(1+2i)\mp(3-8i)}{2}$$

$$either\quad x_1=\frac{-1-2i-(3-8i)}{2}=\frac{-1-2i-3+8i}{2}=\frac{-4+6i}{2}\Rightarrow\boxed{x_1=-2+3i}$$

$$or\quad x_2=\frac{-1-2i+(3-8i)}{2}=\frac{-1-2i+3-8i}{2}=\frac{2-10i}{2}\Rightarrow\boxed{x_2=1-5i}$$

∴ مجموعة الحل هي $\{-2+3i\ ,\ 1-5i\}$

<u>مثال /</u> كون المعادلة التربيعية التي جذرها $3-i$, $\frac{10}{3-i}$

$$\boxed{x_1=3-i}\ ,\quad x_2=\frac{10}{3-i}=\frac{10}{3-i}\times\frac{3+i}{3+i}=\frac{10(3+i)}{3^2+1^2}=\frac{10(3+i)}{10}\Rightarrow\boxed{x_2=3+i}$$

$(3-i)+(3+i)=(3+3)+(-1+1)i=6$ مجموع الجذرين

$(3-i).(3+i)=9+3i-3i-i^2=9+1=10$ حاصل ضرب الجذرين

$\because\quad x^2-(\text{مجموع الجذرين})x+(\text{حاصل ضرب الجذرين})=0$

$\therefore\quad x^2-6x+10=0$ المعادلة التربيعية

<u>مثال /</u> جد الجذور التكعيبية للعدد المركب $-8i$

$$x^3=-8i\quad\Rightarrow\quad x^3+8i=0\quad\Rightarrow\quad x^3-8i(i^2)=0\quad\Rightarrow\quad x^3-8i^3=0$$

$$x^3-8i^3=(x-2i)(x^2+2xi+4i^2)=(x-2i)(x^2+2xi-4)=0$$

$$either\quad x-2i=0\quad\Rightarrow\boxed{x_1=2i}$$

$$or\quad x^2+2xi-4=0\quad\xrightarrow{\text{(بالدستور)}}\quad\boxed{a=1\quad b=2i\quad c=-4}$$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2i\pm\sqrt{4(i^2)-4(1)(-4)}}{2(1)}=\frac{-2i\pm\sqrt{-4+16}}{2}$$

$$x=\frac{-2i\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{-2i\pm2\sqrt3}{2}\quad\Rightarrow\boxed{x=-i\pm\sqrt3}$$

∴ مجموعة الحل هي $\{2i\ ,\ -i+\sqrt3\ ,-i-\sqrt3\}$

مثال / جد الجذور التكعيبية للعدد المركب 8

$x^3 = 8 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+4) = 0$

$either \quad x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{x = 2}$

$or \quad x^2 + 2x + 4 = 0 \quad \xRightarrow{(\text{بالدستور})} \quad \boxed{a = 1 \quad b = 2 \quad c = 4}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 16}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{12 i^2}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}\, i}{2} \quad \Rightarrow \boxed{x = -1 \pm \sqrt{3}\, i}$$

$\therefore$ مجموعة الحل هي $\{2\,,\ -1 + \sqrt{3}\, i \quad , -1 - \sqrt{3}\ \ i\}$

مثال / أوجد مجموعة الحل للمعادلة التالية $ix^2 - 2x - 2i = 0$

$ix^2 - 2x - 2i = 0 \qquad$ (نقسم المعادلة على (i))

$$x^2 - \frac{2}{i}x - \frac{2i}{i} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{2(i^4)}{i}x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2(i^3)x - 2 = 0$$

$x^2 + 2ix - 2 = 0 \quad \xRightarrow{(\text{تحل بالدستور})} \quad \boxed{a = 1 \quad b = 2i \quad c = -2}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2i \pm \sqrt{(2i)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} = \frac{-2i \pm \sqrt{-4 + 8}}{2}$$

$$x = \frac{-2i \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-2i \pm 2}{2} \quad \Rightarrow \boxed{x = -i \pm 1}$$

$\therefore$ مجموعة الحل هي $\{-i + 1 \quad , \quad -i - 1\}$

مثال / أوجد مجموعة الحل للمعادلة التالية $x^2 - 4x\sin\theta + 4 = 0$

$x^2 - (4\sin\theta)x + 4 = 0 \quad \xRightarrow{(\text{تحل بالدستور})} \quad \boxed{a = 1 \quad b = -4\sin\theta \quad c = 4}$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4\sin\theta) \pm \sqrt{(-4\sin\theta)^2 - 4(1)(4)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{4\sin\theta \pm \sqrt{16(\sin\theta)^2 - 16}}{2} = \frac{4\sin\theta \pm \sqrt{16((\sin\theta)^2 - 1)}}{2}$$

$$x = \frac{4\sin\theta \pm \sqrt{16(-(\cos\theta)^2)}}{2} = \frac{4\sin\theta \pm \sqrt{16(\cos\theta)^2(i^2)}}{2} = \frac{4\sin\theta \pm 4(\cos\theta)i}{2}$$

$x = 2\sin\theta \pm 2\cos\theta \ \ i$

$\therefore$ مجموعة الحل هي $\{2\sin\theta + 2\cos\theta \ \ i \ \ , \ 2\sin\theta - 2\cos\theta \ \ i\}$

مثال / أوجد قيمة كل من x , y من المعادلة التالية $(x+iy)^2-\frac{8-8i}{1+i}+15=0$

$(x+iy)^2-\frac{8-8i}{1+i}+15=0 \Rightarrow x^2+2xyi+y^2i^2=\frac{8-8i}{1+i}-15$

$(x^2-y^2)+2xyi=\left(\frac{8-8i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}\right)-15$

$(x^2-y^2)+2xyi=\left(\frac{8-8i-8i+8i^2}{1^2+1^2}\right)-15$

$(x^2-y^2)+2xyi=\left(\frac{-16i}{2}\right)-15 \Rightarrow (x^2-y^2)+2xyi=-8i-15$

$x^2-y^2=-15$ → معادلة①

$2xy=-8 \Rightarrow x=\frac{-8}{2y} \Rightarrow x=\frac{-4}{y}$ → معادلة② (نعوض في معادلة①)

$\left(\frac{-4}{y}\right)^2-y^2=-15 \Rightarrow \frac{16}{y^2}-y^2=-15 \xrightarrow{(\text{نضرب}\times y^2)} 16-y^4=-15y^2$

$y^4-15y^2-16=0 \Rightarrow (y^2-16)(y^2+1)=0$

either $y^2-16=0 \Rightarrow y^2=16 \Rightarrow \boxed{y=\pm4}$ (نعوضها في معادلة②)

$x=\frac{-4}{y}=\frac{-4}{\pm4} \Rightarrow \boxed{x=\mp1}$

or $y^2+1=0 \Rightarrow y^2=-1$ (تهمل)

مثال / أوجد قيمة كل من x , y من المعادلة التالية $(x+iy)^2=\frac{36-2i}{3+2i}$

$(x+iy)^2=\frac{36-2i}{3+2i} \Rightarrow x^2+2xyi+y^2i^2=\left(\frac{36-2i}{3+2i}\times\frac{3-2i}{3-2i}\right)$

$(x^2-y^2)+2xyi=\left(\frac{108-72i-6i+4i^2}{3^2+2^2}\right)=\left(\frac{104-78i}{9+4}\right)=\left(\frac{104-78i}{13}\right)$

$(x^2-y^2)+2xyi=8-6i \Rightarrow x^2-y^2=8$ → معادلة①

$2xy=-6 \Rightarrow x=\frac{-6}{2y} \Rightarrow x=\frac{-3}{y}$ → معادلة② (نعوض في معادلة①)

$\left(\frac{-3}{y}\right)^2-y^2=8 \Rightarrow \frac{9}{y^2}-y^2=8 \xrightarrow{(\text{نضرب}\times y^2)} 9-y^4=8y^2$

$y^4+8y^2-9=0 \Rightarrow (y^2+9)(y^2-1)=0$

either $y^2-1=0 \Rightarrow y^2=1 \Rightarrow \boxed{y=\pm1}$ (نعوضها في معادلة②)

$x=\frac{-3}{y}=\frac{-3}{\pm1} \Rightarrow \boxed{x=\mp3}$

or $y^2+9=0 \Rightarrow y^2=-9$ (تهمل)

مثال / كون المعادلة التربيعية التي معاملاتها حقيقية وأحد جذراها $(\sqrt{2}-i)^2$

الجذر الأول $(\sqrt{2}-i)^2 = (\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{2}\,i + i^2 = 2 - 2\sqrt{2}\,i - 1 = 1 - 2\sqrt{2}\,i$

$\because$ معاملات المعادلة حقيقية لذا فأن الجذر الأخر هو المرافق $1 + 2\sqrt{2}\,i$

مجموع الجذرين $(1-2\sqrt{2}\ ) + (1+2\sqrt{2}\,i\ ) = (1+1) + (-2\sqrt{2}+2\sqrt{2})i = 2$

حاصل ضرب الجذرين $(1-2\sqrt{2}i\,).(1+2\sqrt{2}\,i\ ) = 1 + 2\sqrt{2}i - 2\sqrt{2}i - (2\sqrt{2}\,i)^2 = 1 + 8 = 9$

$\because\ \ x^2 - (\text{مجموع الجذرين})\,x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$

$\therefore\ \ x^2 - 2x + 9 = 0$ المعادلة التربيعية

****

واجبات

جد الجذور التكعيبية للأعداد التالية $(-27i\ , 125\ , 64\ ,\ -64i)$ ثم جد الجذر التربيعي للعدد $(64\,i)$

الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

$let\ \ Z^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad Z^3 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (Z-1)(Z^2+Z+1) = 0$

$either \quad \boxed{z = 1}$ (الجذر الأول)

$or \quad Z^2 + Z + 1 = 0$ (بالدستور) $\boxed{a = 1 \quad b = 1 \quad c = 1}$

$$Z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow Z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(1)}}{2(1)} \Rightarrow Z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \Rightarrow Z = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

$$Z = \frac{-1 \pm \sqrt{3}\ i}{2} \Rightarrow Z = \frac{-1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

$either \quad \boxed{Z = \frac{-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = w}$ (الجذر الثاني)

$or \quad \boxed{Z = \frac{-1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i = w^2}$ (الجذر الثالث)

$\therefore$ هناك ثلاثة جذور للواحد الصحيح وهي $(1\ ,\ w\ ,\ w^2)$ حيث أن الرمز (w) يقرأ أوميكا "*omega*"

خواص الجذور التكعيبية للواحد الصحيح

- الجذران $w\ ,\ w^2$ جذران تخيليان مترافقان
- مجموع الجذور الثلاثة يساوي صفر أي $(w + w^2 + 1 = 0\ )$
- حاصل ضرب الجذور الثلاثة يساوي واحد أي $(w^2 w = 1)$

أستنتاجات لخواص الجذور

١- مجموع أي جذرين = سالب الجذر الأخر مثلا $w^2+1=-w$, $w+1=-w^2$, $w+w^2=-1$

٢- أي جذر =سالب (مجموع الجذرين الأخرين)مثلا $1=-w-w^2$, $w^2=-1-w$, $w=-1-w^2$

٣- $w^2=\frac{1}{w}$ $\Rightarrow$ $w=\frac{1}{w^2}$ $\Rightarrow$ $w^3=1$

٤- كل w هي مرافق w^2 وبالعكس أي يمكن أستبدال أحدهما بالأخر كما في المثالين التاليين

$(a)\ \ 3w+5w^2=3w^2+5w$

$(b)\ \ 4w+2w^2=4w^2+2w$

٥- $w-w^2=w^2-w=\pm\sqrt{3}\,i$ لاحظ

$$\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{2\sqrt{3}\,i}{2}=+\sqrt{3}\,i$$

$$\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)-\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{-2\sqrt{3}\,i}{2}=-\sqrt{3}\,i$$

٦- $w.w^2=w^3=1$ لاحظ

$$\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right).\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\left(\frac{-1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{4}{4}=1$$

٧- $(w^{3n+r}=w^r)$ $(r=0,1,2,3,4,5,\dots\dots\dots,n)$, حيث (r) عددصحيح

٨- نستخدم w^3 في عمليات التبسيط

ومن هذه الاستنتاجات نتوصل الى أن ناتج w مرفوعة الى قوة معينة هو أحد جذور الواحد $\{1,w,w^2\}$ لاحظ الأمثلة التالية :

$$w^4=w^3.w=(1).w=w$$

$$w^5=w^3.w^2=(1).w^2=w^2$$

$$w^6=(w^3)^2=w^3.w^3=(1)(1)=1$$

$$w^{81}=(w^3)^{27}=(1)^{27}=1$$

$$w^{-4}=\frac{1}{w^4}=\frac{1}{w^3.w}=\frac{1}{w}=\frac{w^3}{w}=w^2$$

$$w^{-5} = \frac{1}{w^5} = \frac{1}{w^2w^3} = \frac{1}{w^2} = \frac{w^3}{w^2} = w$$

$$w^{-22} = \frac{1}{w^{22}} = \frac{1}{(w^3)^7.w} = \frac{1}{(1)^7.w} = \frac{1}{w} = \frac{w^3}{w} = w^2$$

$$w^{6n+5} = w^{6n}.w^5 = (w^3)^{2n}.w^5 = (1)^{2n}.w^5 = w^5 = w^3.w^2 = w^2$$

$$w^{-6n-5} = w^{(-1)(6n+5)} = w^{-1}.w^{6n+5} = \frac{w^{6n+5}}{w} = \frac{(w^3)^{2n}.w^5}{w} = \frac{1.w^3.w^2}{w} = \frac{w^2}{w} = w$$

مثال (19) / جد ناتج ما يلي ، w^{-58} ، w^{25} ، w^{33}

$$w^{33} = (w^3)^{11} = (1)^{11} = 1$$

$$w^{25} = w^{24}.w = (w^3)^8.w = (1)^8.w = w$$

$$w^{-58} = w^{-58}.w^{60} = w^{60-58} = w^2$$

مثال (20) / أثبت أن :

(a) $w^7 + w^5 + 1 = 0$

$$LHS = w^7 + w^5 + 1 = (w^3)^2.w + w^3w^2 + 1 = w + w^2 + 1 = 0 = RHS$$

(b) $(5 + 3w + 3w^2)^2 = -4(2 + w + 2w^2)^3 = 4$

$$(5 + 3w + 3w^2)^2 = (5 + 3(w + w^2))^2 = (5 + 3(-1))^2 = (5-3)^2 = (2)^2 = 4$$

$$-4(2 + w + 2w^2)^3 = -4(2 + 2w^2 + w)^3 = -4[2(1 + w^2) + w]^3 = -4[2(-w) + w]^3$$

$$= -4[-w]^3 = -4(-1)^3(w)^3 = -4(-1) = 4$$

مثال (21) / كون المعادلة التربيعية التي جذراها : وزاري 2012 / د3

(a) $1 - iw^2$, $1 - iw$

$(1 - iw^2) + (1 - iw) = (1 + 1) + (-w^2 - w)i = 2 + (1)i = 2 + i$ مجموع الجذرين

$(1 - iw^2).(1 - iw) = 1 - iw - iw^2 + i^2w^3 = (-w - w^2)i = (1)i = i$ حاصل ضرب الجذرين

$\because$ $x^2 -$ (مجموع الجذرين) $x +$ (حاصل ضرب الجذرين) $= 0$

$\therefore$ $x^2 - (2 + i)x + i = 0$ المعادلة التربيعية

(b) $\frac{2}{1-w^2}$, $\frac{2}{1-w}$

$$\left(\frac{2}{1-w^2}\right)+\left(\frac{2}{1-w}\right)=\frac{2(1-w)+2(1-w^2)}{(1-w^2)(1-w)}=\frac{2-2w+2-2w^2}{1-w-w^2+w^3}=\frac{2+2-2(w+w^2)}{1+1-(w+w^2)}$$
$$=\frac{4-2(-1)}{2-(-1)}=\frac{4+2}{2+1}=\frac{6}{3}=2$$ (مجموع الجذرين)

$$\left(\frac{2}{1-w^2}\right).\left(\frac{2}{1-w}\right)=\frac{4}{(1-w^2)(1-w)}=\frac{4}{1-w-w^2+w^3}=\frac{4}{1+1-(w+w^2)}=\frac{4}{2-(-1)}$$
$$=\frac{4}{2+1}=\frac{4}{3}$$ (حاصل ضرب الجذرين)

$\because$ x^2- (مجموع الجذرين) $x+$ (حاصل ضرب الجذرين) $=0$

$\therefore$ $x^2-2x+\frac{4}{3}=0$ المعادلة التربيعية

أمثلة أضافية محلولة

مثال/ أوجد الناتج في أبسط صورة

(1) $\left(1+w^2-\frac{2}{w^2}\right)\left(1-\frac{5}{w}+w\right)$

$$\left((1+w^2)-\frac{2w^3}{w^2}\right)\left((1+w)-\frac{5w^3}{w}\right)=(-w-2w)(-w^2-5w^2)=(-3w)(-6w^2)=18w^3=18$$

(2) $\left(\frac{1}{1+w}-\frac{1}{1+w^2}\right)^2$

$$\left(\frac{1}{-w^2}-\frac{1}{-w}\right)^2=\left(\frac{w^3}{-w^2}-\frac{w^3}{-w}\right)^2=(-w+w^2)^2=w^2-2w^3+w^4=w^2-2+w$$
$$=(w^2+w)-2=-1-2=-3$$

مثال/ أذا كان $a=\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)$ فأثبت أن $(a^{12}+a^{22}+a^{23}=0)$ وكذلك $(a^9.a^{16}.a^{32}=1)$

$$\because a=\left(\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{-3}}{2}\right)=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}\ i}{2}=w$$

$$\therefore a^{12}+a^{22}+a^{23}=w^{12}+w^{22}+w^{23}=(w^3)^4+(w^3)^7(w)+(w^3)^7(w^2)=1+w+w^2=0$$

$$\therefore a^9.a^{16}.a^{32}=w^9.w^{16}.w^{32}=1.w.w^2=w^3=1$$

مثال / برهن أن $\sqrt{\frac{1}{1+w^2}+\frac{2+w^2}{w^4}} = i$

$$\sqrt{\frac{1}{1+w^2}+\frac{2+w^2}{w^4}} = \sqrt{\frac{1}{-w}+\frac{2+w^2}{w}} = \sqrt{\frac{1-(2+w^2)}{-w}} = \sqrt{\frac{-1-w^2}{-w}} = \sqrt{\frac{w}{-w}} = \sqrt{-1} = i$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

مثال / برهن أن $(w-w^2)^8 = 81$

الطريقة الأولى :

$$(w-w^2)^8 = \left(\pm\sqrt{3}i\right)^8 = (\pm1)^8\left(\sqrt{3}i\right)^8 = \left(\left(\sqrt{3}i\right)^2\right)^4 = (3i)^4 = ((3i)^2)^2 = (-9)^2 = 81$$

الطريقة الثانية :

$$(w-w^2)^8 = ((w-w^2)^2)^4 = (w^2-2w.w^2+w^4)^4 = (w^2+w^4-2)^4 = (-1-2)^4 = (-3)^4$$

$$= ((-3)^2)^2 = (9)^2 = 81$$

مثال / برهن أن $(1+w^4)^3+(1-w^7-w^8)^3 = 7$

$$(1+w^4)^3+(1-w^7-w^8)^3 = (1+w)^3+(1-w-w^2)^3 = (-w^2)^3+\left(1-(w+w^2)\right)^3$$

$$= -w^6+\left(1-(-1)\right)^3 = -1+(2)^3 = -1+8 = 7$$

مثال / أوجد الناتج $\left(\frac{1}{w^4}-\frac{1}{w^2}\right)\left(2w^6+\frac{2}{w}\right)\left(\frac{-w^6}{1+w^5}\right)$

$$\left(\frac{1}{w^4}-\frac{1}{w^2}\right)\left(2w^6+\frac{2}{w}\right)\left(\frac{-w^6}{1+w^5}\right) = \left(\frac{1}{w}-\frac{1}{w^2}\right)\left(2+\frac{2}{w}\right)\left(\frac{-1}{1+w^2}\right) = \left(\frac{w^3}{w}-\frac{w^3}{w^2}\right)\left(2+\frac{2w^3}{w}\right)\left(\frac{-1}{-w}\right)$$

$$= (w^2-w)(2+2w^2)\left(\frac{1}{w}\right) = (w^2-w)(2+2w^2)(w^2)$$

$$= (w^2-w)\left(2(w^2)+2w^2(w^2)\right) = (w^2-w)(2w^2+2w)$$

$$= (w^2-w)\left(2(w^2+w)\right) = (w^2-w)\left(2(-1)\right) = -2\left(\pm\sqrt{3}\right) = \mp2\sqrt{3}$$

مثال / جد ناتج x , y والتي تحقق المعادلة التالية $x + yi = \frac{-8}{w^2}$

يمكن حله بطريقتين لاحظ الحل

الطريقة الأولى $x + yi = \frac{-8}{w^2} = -8w = -8\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 4 - 4\sqrt{3}\,i$

$x + yi = 4 - 4\sqrt{3}\,i \quad \Rightarrow \boxed{x = 4}, \boxed{y = -4\sqrt{3}}$

الطريقة الثانية $x + yi = \frac{-8}{w^2} = \frac{-8}{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{-8}{-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} \times \frac{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{4 - 4\sqrt{3}\,i}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{4 - 4\sqrt{3}\,i}{\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4}\right)}$

$x + yi = \frac{4 - 4\sqrt{3}\,i}{1} = 4 - 4\sqrt{3}\,i$

$x + yi = 4 - 4\sqrt{3}\,i \quad \Rightarrow \boxed{x = 4}, \boxed{y = -4\sqrt{3}}$

طرق حل المسائل التي تحتوي على w

هناك بعض الطرق الأساسية التي تستخدم في تبسيط حل المسائل وهي :

الطريقة الأولى / أيجاد عامل مشترك

مثال / جد قيمة :

$(a)\ \sqrt{\frac{2+11w+11w^2}{2-5w-5w^2}}$

$$\sqrt{\frac{2 + 11w + 11w^2}{2 - 5w - 5w^2}} = \sqrt{\frac{2 + 11(w + w^2)}{2 - 5(w + w^2)}} = \sqrt{\frac{2 - 11}{2 + 5}} = \sqrt{\frac{-9}{7}} = \frac{3i}{\sqrt{7}}$$

$(b)\ \sqrt{\frac{1 + 10w + 10w^2}{1 - 3w - 3w^2}}$

$$\sqrt{\frac{1 + 10w + 10w^2}{1 - 3w - 3w^2}} = \sqrt{\frac{1 + 10(w + w^2)}{1 - 3(w + w^2)}} = \sqrt{\frac{1 - 10}{1 + 3}} = \sqrt{\frac{-9}{4}} = \frac{3}{2}\ i$$

مثال/ أثبت أن $\frac{w}{(2+5w+2w^2)^2}+\frac{w^2}{(2+2w+2w^2)^2}=-\frac{1}{9}$

$$\frac{w}{(2+5w+2w^2)^2}+\frac{w^2}{(2+2w+5w^2)^2}=\frac{w}{[(2+2w^2)+5w]^2}+\frac{w^2}{[(2+2w)+5w^2]^2}$$

$$\frac{w}{[2(1+w^2)+5w]^2}+\frac{w^2}{[2(1+w)+5w^2]^2}=\frac{w}{(2(-w)+5w)^2}+\frac{w^2}{(2(-w^2)+5w^2)^2}$$

$$\frac{w}{(-2w+5w)^2}+\frac{w^2}{(-2w^2+5w^2)^2}=\frac{w}{(3w)^2}+\frac{w^2}{(3w^2)^2}=\frac{w}{9w^2}+\frac{w^2}{9w}=\frac{w+w^3}{9w^2}=\frac{w+1}{9w^2}=\frac{-w^2}{9w^2}=\frac{-1}{9}$$

مثال/ جد قيم x , y التي تحقق المعادلة :

$$x+iy=\left(\sqrt{1+w^{32}}+\sqrt{1+w^{61}}\right)^2-\frac{3+i}{1+i}$$

$$x+iy=\left(\sqrt{1+w^{32}}+\sqrt{1+w^{61}}\right)^2-\frac{3+i}{1+i}\quad=\left(\sqrt{1+w^2}+\sqrt{1+w}\right)^2-\frac{3+i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}$$

$$x+iy=\left(\sqrt{-w}+\sqrt{-w^2}\right)^2-\frac{3-3i+i-i^2}{1^2+1^2}=\left(\sqrt{-ww^3}+iw\right)^2-\frac{4-2i}{1+1}$$

$$x+iy=\left(\sqrt{-w^4}+iw\right)^2-\frac{4-2i}{2}=(iw^2+iw)^2-\frac{4-2i}{2}\;=(i[w^2+w])^2-\frac{4-2i}{2}$$

$$x+iy=(i[-1])^2-\frac{4-2i}{2}=-1-(2-i)=-3+i$$

$\therefore\ \boxed{x=-3}\ ,\boxed{y=1}$

مثال/ جد قيم x , y التي تحقق المعادلة

$$xw+ywi=\left(\frac{iw^2+i}{w^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$xw+ywi=\left(\frac{iw^2+i}{w^2}\right)^{\frac{1}{2}}\quad\Rightarrow w(x+yi)=\left(\frac{i(w^2+1)}{w^2}\right)^{\frac{1}{2}}\quad\Rightarrow w(x+yi)=\left(\frac{i(-w)}{w^2}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{-i}{w}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow w(x+yi)=\left(\frac{-i(w^3)}{w}\right)^{\frac{1}{2}}=(-iw^2)^{\frac{1}{2}}\ =\sqrt{-iw^2}\quad\Rightarrow\ w(x+yi)=w\sqrt{-i}$$

$\therefore\ \ x+yi=\sqrt{-i}$ (يمكن حساب الجذر بطريقتين)

الطريقة ① / نفرض أن الجذر التربيعي للعدد $(-i)$ هو $(a+bi)$

$-i=(a+bi)^2 \quad \Rightarrow \quad -i=a^2+2ab+b^2i^2 \quad \Rightarrow \ -i=(a^2-b^2)+(2ab)i$

$a^2-b^2=0 \quad \rightarrow$ معادلة①

$2ab=-1 \quad \Rightarrow ab=\frac{-1}{2} \quad \Rightarrow b=\frac{-1}{2a}$ معادلة② (نعوضها في معادلة①)

$a^2-\frac{1}{4a^2}=0 \xRightarrow{(\text{نضرب}\times 4a^2)} 4a^4-1=0 \quad \Rightarrow \quad (2a^2-1)(2a^2+1)=0$

$either \quad 2a^2-1=0 \quad \Rightarrow 2a^2=1 \quad \Rightarrow \quad a^2=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \boxed{a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$ نعوضها في معادلة②

$b=\frac{-1}{2a}=\frac{-1}{2\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \quad \Rightarrow \ b=\frac{-1}{\sqrt{2}\sqrt{2}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \quad \Rightarrow \boxed{b=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$or \quad 2a^2+1=0 \quad \Rightarrow 2a^2=-1 \quad \Rightarrow a^2=\frac{-1}{2}$ (تهمل) ∴

∴ الجذران هما $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i \quad , \quad \frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i}$

الطريقة ② /

$\sqrt{-i} \ = \sqrt{\frac{1}{2}-i-\frac{1}{2}} \ = \sqrt{\frac{1}{2}-i+\frac{1}{2}i^2} \ = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^2}=\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right)$

∴ الجذران هما $\boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i \quad , \quad \frac{-1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i}$

$\therefore \ x+yi=\sqrt{-i} \quad \Rightarrow x+iy=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\mp\frac{1}{\sqrt{2}}i \Rightarrow \boxed{x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}} \ , \ \boxed{y=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}}$

مثال / جد قيمة :

$(1-i)^4-(5+3w+5w^2)^3$

$(1-i)^4-(5+3w+5w^2)^3 \ = ((1-i)^2)^2-\left(5+3w+5(-1-w)\right)^2$

$(1-2i+i^2)^2-(5+3w-5-5w)^2 \ = (-2i)^2-(-2w)^2=4i^2-4w^2=-4-4w^2$

$=-4(1+w^2)=-4(-w)=4w$

مثال/ كون المعادلة التربيعية التي جذراها $(2 - 2w - 2w^2)^2$, $(2w + 2w^2 - 1)^2$

(الجذر الأول) $(2w + 2w^2 - 1)^2 = (2w + 2(-1 - w) - 1)^2 = (2w - 2 - 2w - 1)^2 = (-3)^2 = 9$

(الجذر الثاني) $(2 - 2w - 2w^2)^2 = (2 - 2w - 2(-1 - w))^2 = (2 - 2w + 2 + 2w)^2 = (4)^2 = 16$

مجموع الجذرين $(9) + (16) = 25$

حاصل ضرب الجذرين $(9).(16) = 144$

$\because \ x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$

$\therefore \ x^2 - 25x + 144 = 0$ المعادلة التربيعية

مثال/ كون المعادلة التربيعية التي جذراها $1 - \frac{i}{w}$, $1 - \frac{i}{w^2}$

(الجذر الأول) $1 - \frac{i}{w^2} = 1 - \frac{iw^3}{w^2} = 1 - iw$

(الجذر الثاني) $1 - \frac{i}{w} = 1 - \frac{iw^3}{w} = 1 - iw^2$

مجموع الجذرين $(1 - iw) + (1 - iw^2) = (1 + 1) + (-w - w^2)i = (2) + (1)i = \boxed{2 + i}$

حاصل ضرب الجذرين $(1 - iw).(1 - iw^2) = 1 - iw^2 - iw + i^2w^3 = 1 + i(-w^2 - w) - w^3 = i$

$\because \ x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$

$\therefore \ x^2 - (2 + i)x + (i) = 0$ المعادلة التربيعية

مثال/ كون المعادلة التربيعية التي جذراها $3wi - 2\frac{w^2}{i}$, $2wi - 3\frac{w^2}{i}$ وزاري 1999/ د1

$2wi - 3\frac{w^2}{i} = 2wi - 3\frac{w^2}{i} \times i^4 = 2wi - 3w^2i^3 = 2wi - 3w^2(-i) = \boxed{2wi + 3w^2i}$

$3wi - 2\frac{w^2}{i} = 3wi - 2\frac{w^2}{i} \times i^4 = 3wi - 2w^2i^3 = 3wi - 2w^2(-i) = \boxed{3wi + 2w^2i}$

مجموع الجذرين $(2wi + 3w^2i) + (3wi + 2w^2i) = 5wi + 5w^2i = 5i(w + w^2) = -5i$

$(2wi + 3w^2i).(3wi + 2w^2i) = 6w^2i^2 + 4w^3i^2 + 9w^3i^2 + 6w^4i^2 = -6w^2 - 4 - 9 - 6w$

حاصل ضرب الجذرين $(2wi + 3w^2i).(3wi + 2w^2i) = -13 + 6(-w^2 - w) = -13 + 6(1) = -7$

$\because \ x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$

$\therefore \ x^2 - (-5i)x + (-7) = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 5ix - 7 = 0$ المعادلة التربيعية

الطريقة الثانية / طريقة الاستبدال

مثال / جد الناتج $(2+3w+3w^2)^2$

$$(2+3w+3w^2)^2 = (2+3w+3(-1-w))^2 = (2+3w-3-3w)^2 = (-1)^2 = \mathbf{1}$$

مثال / برهن أن $\left(\frac{1}{3+4w+5w^2} - \frac{1}{3+5w+4w^2}\right)^2 = \frac{-1}{3}$

$$\left(\frac{1}{3+4w+5w^2} - \frac{1}{3+5w+4w^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{3+4w+5(-1-w)} - \frac{1}{3+5w+4(-1-w)}\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{3+4w-5-5w} - \frac{1}{3+5w-4-4w}\right)^2 = \left(\frac{1}{-2-w} - \frac{1}{-1+w}\right)^2 = \left(\frac{-1+w-(-2-w)}{(-2-w)(-1+w)}\right)^2$$

$$\left(\frac{-1+w+2+w}{(2-2w+w-w^2)}\right)^2 = \left(\frac{1+2w}{2-w-w^2}\right)^2 = \left(\frac{1+2w}{2+1}\right)^2 = \frac{1+4w+4w^2}{3^2} = \frac{1+4(w+w^2)}{9} = \frac{1+4(-1)}{9}$$

$$\therefore \left(\frac{1}{3+4w+5w^2} - \frac{1}{3+5w+4w^2}\right)^2 = \frac{-3}{9} = \frac{-1}{3}$$

مثال / كون المعادلة التربيعية التي جذراها $2-w-5w^2$, $1-6w-2w^2$

$1-6w-2w^2 = 1-6w-2(-1-w) = 1-6w+2+2w = 3-4w$ (الجذر الأول)

$2-w-5w^2 = 2-w-5(-1-w) = 2-w+5+5w = 7+4w$ (الجذر الثاني)

$(3-4w)+(7+4w) = 3-4w+7+4w = 10$ مجموع الجذرين

$= 21+12w-28w-16w^2 = 21-16w-16(-1-w)$

$= 21-16w+16+16w = 37$ حاصل ضرب الجذرين

$\because$ $x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{حاصل ضرب الجذرين}) = 0$

$\therefore$ $x^2 - 10x + 37 = 0$ المعادلة التربيعية

الطريقة الثالثة / معاملات البسط والمقام متساوية

مثال / جد الناتج $\frac{10w+3}{3w^2+10}$

$$\frac{10w+3}{3w^2+10} = \frac{10w+3w^3}{3w^2+10} = \frac{w(10+3w^2)}{3w^2+10} = w$$

مثال / أثبت أن $\left(\frac{a-bw^2}{aw-b}-\frac{d-cw}{dw^2-c}\right)^4=9$

$$\left(\frac{a-bw^2}{aw-b}-\frac{d-cw}{dw^2-c}\right)^4=\left(\frac{a-bw^2}{aw-bw^3}-\frac{dw^3-cw}{dw^2-c}\right)^4=\left(\frac{a-bw^2}{w(a-bw^2)}-\frac{w(dw^2-c)}{dw^2-c}\right)^4$$

$$\left(\frac{1}{w}-w\right)^4=(w^2-w)^4=(\pm\sqrt{3}i)^4=\left(\left(\pm\sqrt{3}i\right)^2\right)^2=(3i^2)^2=(-3)^2=9$$

الطريقة الرابعة / أيجاد المضاعف المشترك

مثال / أوجد الناتج $\left[\frac{1}{2+w}-\frac{1}{2+w^2}\right]^2$

$$\left[\frac{1}{2+w}-\frac{1}{2+w^2}\right]^2=\left[\frac{2+w^2-(2+w)}{(2+w)(2+w^2)}\right]^2=\left[\frac{2+w^2-2-w}{4+2w^2+2w+w^3}\right]^2=\left[\frac{w^2-w}{4+2w^2+2w+1}\right]^2$$

$$=\left[\frac{w^2-w}{5+2(w^2+w)}\right]^2=\left[\frac{w^2-w}{5+2(-1)}\right]^2=\left[\frac{w^2-w}{3}\right]^2=\frac{w^4-2w^3+w^2}{9}$$

$$=\frac{(w^4+w^2)-2}{9}=\frac{(w+w^2)-2}{9}=\frac{(-1)-2}{9}=\frac{-3}{9}=\frac{-1}{3}$$

مثال / أثبت أن $\left(\frac{5}{3-w}-\frac{5}{3-w^2}\right)^2=\frac{-75}{169}$

$$\left(\frac{5}{3-w}-\frac{5}{3-w^2}\right)^2=(25)\left(\frac{1}{3-w}-\frac{1}{3-w^2}\right)^2=(25)\left(\frac{(3-w^2)-(3-w)}{(3-w)(3-w^2)}\right)^2=$$

$$(25)\left(\frac{3-w^2-3+w}{9-3w^2-3w+w^3}\right)^2=(25)\left(\frac{-w^2+w}{10-3w^2-3w}\right)^2=(25)\left(\frac{-w^2+w}{10+3(-w^2-w)}\right)^2$$

$$=(25)\left(\frac{-w^2+w}{10+3(1)}\right)^2=(25)\left(\frac{-w^2+w}{13}\right)^2=(25)\left(\frac{w^4-2w^3+w^2}{169}\right)=(25)\left(\frac{w^4+w^2-2}{169}\right)$$

$$=(25)\left(\frac{(w^4+w^2)-2}{169}\right)=(25)\left(\frac{(w+w^2)-2}{169}\right)=(25)\left(\frac{(-1)-2}{169}\right)=(25)\left(\frac{-3}{169}\right)=\frac{-75}{169}$$

تمارين (3 – 1)

س1 / أكتب المقادير التالية في أبسط صورة :

$(a)W^{64}$ $(b)W^{-32}$ $(c)\dfrac{1}{(1+W^{-32})^{12}}$ $(d)(1+W^2)^{-4}$ $(e)W^{9n+5}$ $, n \in N$

$(a)W^{64}$

$$W^{64} = (W^3)^{21}.W = 1.W = W$$

$(b)W^{-325}$

$$W^{-325} = W^{-324}.W^{-1} = W^{3(-108)}.\frac{1}{W} = (1)^{(-108)}.\frac{W^3}{W} = W^2$$

$(c)\dfrac{1}{(1+W^{-32})^{12}}$

$$\frac{1}{(1+W^{-32})^{12}} = \frac{1}{(1+W^{-32}.W^{33})^{12}} = \frac{1}{(1+W)^{12}} = \frac{1}{(-W^2)^{12}} = \frac{1}{W^{24}} = \frac{1}{(W^3)^8} = \frac{1}{(1)^8} = 1$$

$(d)(1+W^2)^{-4}$

$$(1+W^2)^{-4} = (-W)^{-4} = \frac{1}{(-W)^4} = \frac{1}{W^4} = \frac{1}{W^3.W} = \frac{1}{W} = W^2$$

$(e)W^{9n+5}$

$$W^{9n+5} = W^{9n}.W^5 = (W^3)^{3n}.W^2 = 1.W^2 = W^2$$

س2 / كون المعادلة التربيعية التي جذراها :

$(a)\ 1+W^2 \quad , 1+W$

$(\ 1+w^2)+(1+w) = (1+1)+w^2+w = 2+w^2+w = 2-1 = 1$ مجموع الجذرين

$(\ 1+w^2).(1+w) = (-w)(-w^2) = w^3 = 1$ حاصل ضرب الجذرين

$\because \quad x^2 - ($مجموع الجذرين$)x + ($حاصل ضرب الجذرين$) = 0$

$\therefore \quad x^2 - x + 1 = 0$ المعادلة التربيعية

$(b)\ \frac{W}{2-W^2}\quad ,\quad \frac{W^2}{2-W}$

$$\frac{W}{2-W^2}+\frac{W^2}{2-W}=\frac{W(2-W)+W^2(2-W^2)}{(2-W^2)(2-W)}=\frac{2W-W^2+2W^2-W^4}{4-2W-2W^2+W^3}=\frac{2W+W^2-W}{5-2(W+W^2)}$$

$$=\frac{W+W^2}{5-2(-1)}=\frac{-1}{7}$$ مجموع الجذرين

$$\frac{W}{2-W^2}\times\frac{W^2}{2-W}=\frac{W^3}{(2-W^2)(2-W)}=\frac{1}{7}$$ حاصل ضرب الجذرين

$\because\quad x^2-\left(\text{مجموع الجذرين}\right)x+\left(\text{حاصل ضرب الجذرين}\right)=0$

$\therefore\quad x^2-\left(\frac{-1}{7}\right)x+\left(\frac{1}{7}\right)=0\quad\Rightarrow\quad x^2+\frac{1}{7}x+\frac{1}{7}=0$ المعادلة التربيعية

وزاري 2011 / د2   وزاري 2014 / د3   وزاري 2015 / د3

$(C)\ \frac{3i}{W^2}\quad ,\quad \frac{-3W^2}{i}$

$$\frac{3i}{W^2}+\frac{-3W^2}{i}=\frac{3i}{W^2}W^3+\frac{-3W^2}{i}\left(\frac{-i}{-i}\right)=3wi+3w^2i=3i(w+w^2)=3i(-1)=-3i$$ مجموع الجذرين

$$\frac{3i}{W^2}\times\frac{-3W^2}{i}=\frac{3i}{W^2}W^3\times\frac{-3W^2}{i}\left(\frac{-i}{-i}\right)=3wi\times3w^2i=9w^3i^2=-9$$ حاصل ضرب الجذرين

$\because\quad x^2-\left(\text{مجموع الجذرين}\right)x+\left(\text{حاصل ضرب الجذرين}\right)=0$

$\therefore\quad x^2-(-3i)x+(-9)=0\quad\Rightarrow\quad x^2+3ix-9=0$ المعادلة التربيعية

س3 / اذا كان : $Z^2+Z+1=0$ فجد قيمة : $\frac{1+3Z^{10}+3Z^{11}}{1-3Z^7-3Z^8}$

$Z^2+Z+1=0$ (بالدستور) $\boxed{a=1\quad b=1\quad c=1}$

$$Z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\quad\Rightarrow Z=\frac{-1\pm\sqrt{1-4(1)(1)}}{2(1)}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$

$$Z=\frac{-1\pm\sqrt{3}\ i}{2}\quad\Rightarrow\quad Z=\frac{-1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

either $\boxed{Z=\frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=w}$ (الجذر الأول)

or $\boxed{Z=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=w^2}$ (الجذر الثاني)

$IF\ \ (Z=W\ )$

$$\frac{1+3W^{10}+3W^{11}}{1-3W^7-3W^8}=\frac{1+3(W^3)^3.W+3(W^3)^3.W^2}{1-3(W^3)^2.W-3(W^3)^2.W^2}=\frac{1+3W+3W^2}{1-3W-3W^2}=\frac{1+3(W+W^2)}{1-3(W+W^2)}=\frac{1-3}{1+3}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

$IF\ \ Z=W^2$ نعيد الحل مرة أخرى بنفس الطريقة لأيجاد قيمة المقدار

س4 / أثبت أن :   وزاري 2011 / د1   وزاري 2015 / د1

$(a)\quad \left(\frac{1}{2+W}-\frac{1}{2+W^2}\right)^2=\frac{-1}{3}$

$$L.H.S=\left(\frac{1}{2+W}-\frac{1}{2+W^2}\right)^2=\left(\frac{2+W^2-(2+W)}{(2+W)(2+W^2)}\right)^2=\left(\frac{2+W^2-2-W}{4+2W^2+2W+W^3}\right)^2=\left(\frac{W^2-W}{5+2(W^2+W)}\right)^2$$
$$=\frac{(W^2-W)^2}{(5-2)^2}=\frac{W^4-2W^3+W^2}{(3)^2}=\frac{W+W^2-2}{9}=\frac{-1-2}{9}=\frac{-3}{9}=\frac{-1}{3}=R.H.S$$

$(b)\quad \frac{w^{14}+w^7-1}{w^{10}+w^5-2}=\frac{2}{3}$

$$\text{الطرف الأيسر}=\frac{w^{14}+w^7-1}{w^{10}+w^5-2}=\frac{(w^3)^4.w^2+(w^3)^2.w-1}{(w^3)^3.w+(w^3).w^2-2}=\frac{w^2+w-1}{w+w^2-2}=\frac{-1-1}{-1-2}$$
$$=\frac{-2}{-3}=\frac{2}{3}=\text{الطرف الأيمن}$$

وزاري 2014 / د1

$(c)\quad \left(1-\frac{2}{w^2}+w^2\right)\left(1+w-\frac{5}{w}\right)=18$

$$\text{الطرف الأيسر}=\left(1-\frac{2}{w^2}+w^2\right)\left(1+w-\frac{5}{w}\right)=(1-2w+w^2)(1+w-5w^2)$$
$$=(1-2w+(-1-w))(-w^2-5w^2)=(-3w)(-6w^2)=18w^3=18=\text{الطرف الأيمن}$$

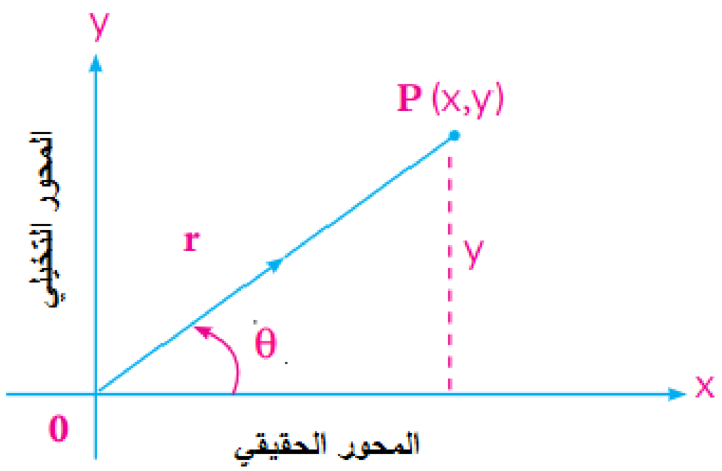
$(d)\quad (1+w^2)^3+(1+w)^3=-2$

$$\text{الطرف الأيسر}=(1+w^2)^3+(1+w)^3=(-w)^3+(-w^2)^3=-w^3-w^6=-1-1=-2=\text{الطرف الأيمن}$$

****

التمثيل الهندسي للأعداد المركبة

العدد المركب $(x+yi)$ يمكن تمثيله هندسياً بالنقطة $(x\,,y)$ حيث يسمى المحور $(x-axis)$ بالمحور الحقيقي وهو يمثل الجزء الحقيقي للعدد المركب ، أما المحور $(y-axis)$ فيسمى المحور التخيلي وهو يمثل الجزء التخيلي للعدد المركب ، ويمكن تمثيل بعض العمليات التي تجري على الأعداد المركبة تمثيلاً هندسياً وتسمى الأشكال الناتجة بأشكال أرجاند ويسمى المستوي الذي يحتويها بالمستوي المركب .

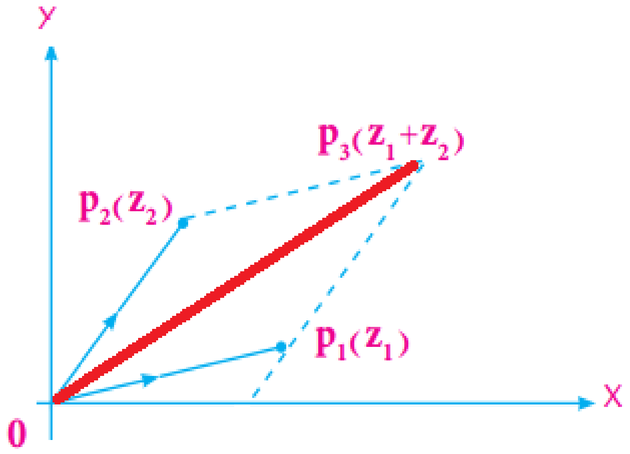


أذا كان $Z_1 = x_1 + y_1 i$ ، $Z_2 = x_2 + y_2 i$ عددان مركبان ممثلان بالنقطتين $p_1(x_1, y_1)$ $p_2(x_2, y_2)$ فأن :

$$Z_1 + Z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

ويمكن تمثيل $Z_1 + Z_2$ بالنقطة $P_3(x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$ وذلك بأستخدام المعلومات المتعلقة بالمتجهات وكما موضح بالشكل :

أي أن : $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OP_3}$

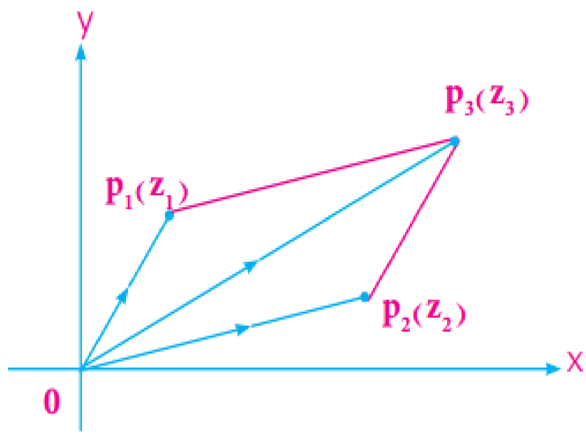


مثال (22) / مثل العمليات الأتية هندسياً في شكل أرجاند :

(a) $(3 + 4i) + (5 + 2i)$

$Z_1 = 3 + 4i \Rightarrow P_1(3,4)$
$Z_2 = 5 + 2i \Rightarrow P_2(5,2)$

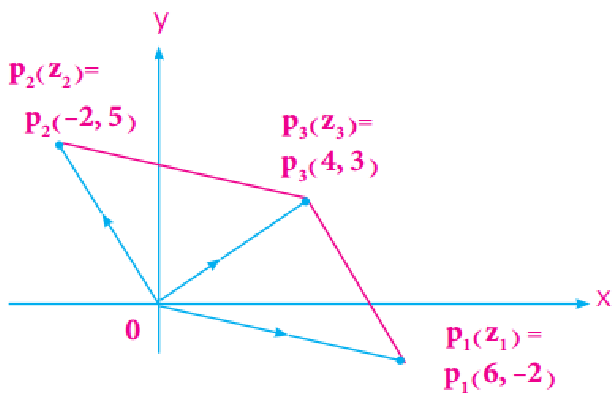
$Z_1 + Z_2 = (3 + 4i) + (5 + 2i)$
$Z_1 + Z_2 = Z_3 = (8 + 6i) \Rightarrow P_3(8,6)$



(b) $(6 - 2i) - (2 - 5i)$

$Z_1 = 6 - 2i \Rightarrow P_1(6,-2)$
$Z_2 = 2 - 5i \Rightarrow P_2(-2,5)$

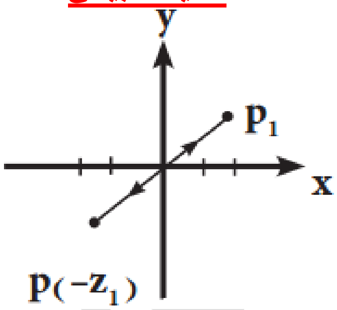
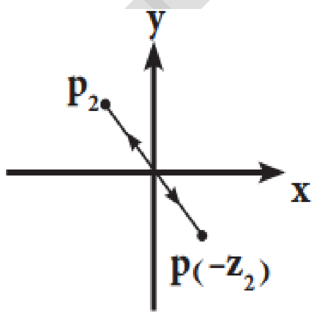
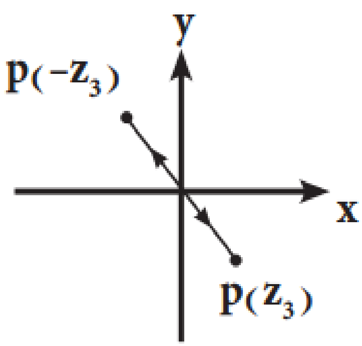
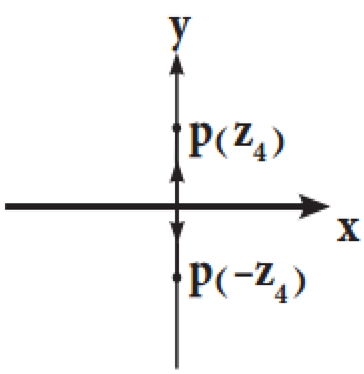
$Z_1 + (-Z_2) = (6 - 2i) + (-2 + 5i)$
$Z_1 + Z_2 = Z_3 = (4 + 3i)$
$Z_3 = (4 + 3i) \Rightarrow P_3(4,3)$



تمارين(4 − 1)

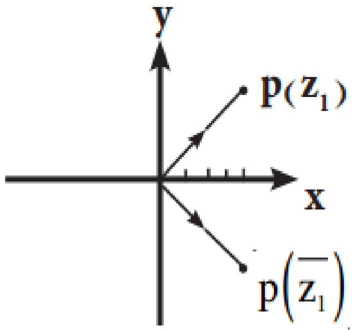
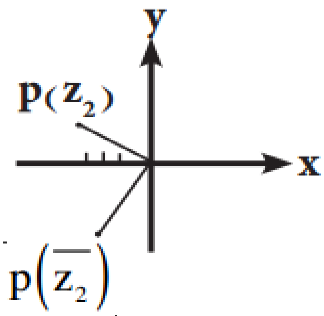
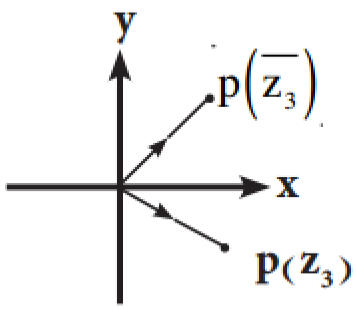
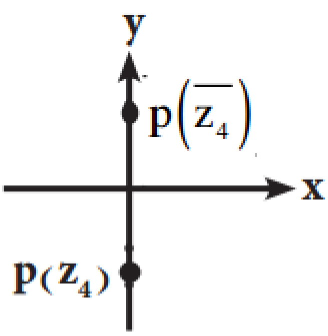
س1 / أكتب النظير الجمعي لكل من الاعداد الأتية ثم مثل هذه الاعداد ونظائرها الجمعية على شكل أرجاند .

$Z_1 = 2 + 3i$, $Z_2 = -1 + 3i$, $Z_3 = 1 - i$, $Z_4 = i$

العدد	نظيره الجمعي	تمثيله البياني
$Z_1 = 2 + 3i$ $P_1 = (2 , 3)$	$-Z_1 = -2 - 3i$ $-P_1 = (-2 , -3)$	
$Z_2 = -1 + 3i$ $P_2 = (-1 , 3)$	$-Z_2 = 1 - 3i$ $-P_2 = (1 , -3)$	
$Z_3 = 1 - i$ $P_3 = (1 , -1)$	$-Z_3 = -1 + i$ $-P_3 = (-1 , 1)$	
$Z_4 = i$ $P_4 = (0 , 1)$	$-Z_4 = -i$ $-P_4 = (0 , -1)$	

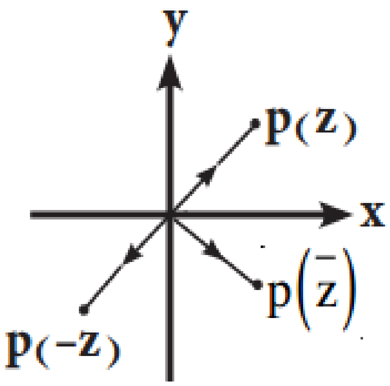
س2 / أكتب العدد المرافق لكل من الاعداد التالية ثم مثل الأعداد ومرافقاتها على شكل أرجاند

$Z_1 = 5 + 3i \quad , \quad Z_2 = -3 + 2i \quad , \quad Z_3 = 1 - i \quad , \quad Z_4 = -2i$

العدد	مرافق العدد	تمثيله البياني
$Z_1 = 5 + 3i$ $P_1(Z_1) = (5, 3)$	$\bar{Z}_1 = 5 - 3i$ $P_1(\bar{Z}_1) = (5, -3)$	
$Z_2 = -3 + 2i$ $P_2(Z_2) = (-3, 2)$	$\bar{Z}_2 = -3 - 2i$ $P_2(\bar{Z}_2) = (-3, -2)$	
$Z_3 = 1 - i$ $P_3(Z_3) = (1, -1)$	$\bar{Z}_3 = 1 + i$ $P_3(\bar{Z}_3) = (1, 1)$	
$Z_4 = -2i$ $P_4 = (0, -2)$	$\bar{Z}_4 = 2i$ $P_4(\bar{Z}_4) = (0, 2)$	

س3 / أذا كان $Z = 4 + 2i$ فوضح على شكل أرجاند كلآ من $Z\ ,\ \overline{Z}, -Z$

$$Z = 4 + 2i \quad \Rightarrow \quad P(Z) = (4\,,2)$$
$$\overline{Z} = 4 - 2i \quad \Rightarrow \quad P(\overline{Z}) = (4\,,-2)$$
$$-Z = -4 - 2i \quad \Rightarrow \quad P(-Z) = (-4\,,-2)$$



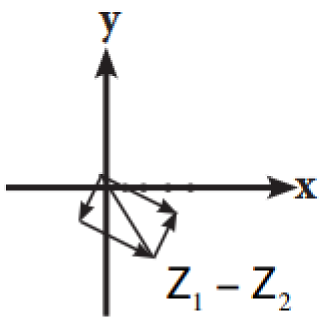
س4 / أذا كان $Z_1 = 4 - 2i$, $Z_2 = 1 + 2i$ فوضح على شكل أرجاند كلآ من :

$-3Z_2$, $2Z_1$, $Z_1 - Z_2$, $Z_1 + Z_2$

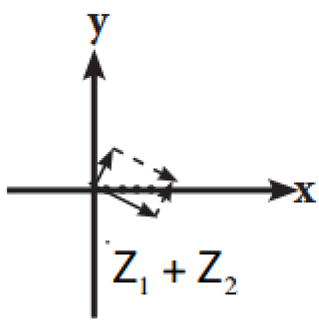
$$-3Z_2 = -3(1 + 2i) = -3 - 6i \quad \Rightarrow \quad P(-3Z_2) = (-3\,,-6)$$

$$2Z_1 = 2(4 - 2i) = 8 - 4i \quad \Rightarrow \quad P(2Z_1) = (8\,,-4)$$

$$Z_1 - Z_2 = (4 - 2i) - (1 + 2i) = (4 - 1) + (-2 - 2)i = 3 - 4i$$
$$Z_1 - Z_2 = Z_3 = 3 - 4i \quad \Rightarrow \quad P(Z_3) = (3, -4)$$



$$Z_1 + Z_2 = (4 - 2i) + (1 + 2i) = (4 + 1) + (-2 + 2)i = 5 + 0i$$
$$Z_1 + Z_2 = Z_4 = 5 + 0i \quad \Rightarrow \quad P(Z_4) = (5,0)$$



الصورة القطبية $(Polar\ Form)$ للعدد المركب

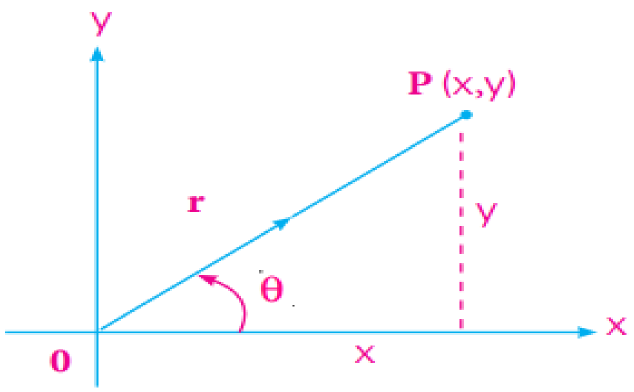
اذا كان $Z = x + iy = (x\,,y)$ فان $R(Z) = x = r\cos\theta$ و $I(Z) = y = r\sin\theta$ حيث أن $R(Z)$ الجزء الحقيقي للعدد المركب $I(Z)$ الجزء التخيلي للعدد المركب (r) مقياس العدد المركب وهو عدد حقيقي غير سالب ويسمى $(mod\,Z)$ ويرمز له بالرمز $\|Z\|$ و تسمى (θ) سعة العدد المركب وتكتب $\theta = \arg(Z)$ حيث $\theta \in [\,0\,,2\pi\,)$ ويمكن القول أن $Z = \|Z\|(\cos(arg\ Z) + \sin(arg\ Z)\,)$

أو يكتب $Z = r\,(\cos\,\theta + \sin\,\theta\,)$

$$r = \|Z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\|Z\|}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\|Z\|}$$



مثال (23) / اذا كان $Z = 1 + \sqrt{3}\,i$ فجد المقياس والقيمة الأساسية لسعة Z .

$$r = mod\,Z = \|Z\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+3} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\|Z\|} = \frac{1}{2} \qquad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\|Z\|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \theta = \frac{\pi}{3}$$ (الربع الأول)

$$\arg(Z) = \frac{\pi}{3}$$

مثال (24) / اذا كان $Z = -1 - i$ فجد المقياس والقيمة الأساسية للعدد Z .

$$r = mod\,Z = \|Z\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\|Z\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \qquad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\|Z\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$$ (الربع الثالث)

$$\arg(Z) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

مثال (25) / عبر عن كل من الاعداد التالية بالصيغة القطبية :

وزاري 2012 / د2

$(b)\ 2\sqrt{3}-2i$

$Z = 2\sqrt{3}-2i$

$\because r = mod\ Z = \|Z\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{12+4}$

$\therefore r = \sqrt{16} = 4$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\|Z\|} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\|Z\|} = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

$$\theta = \arg(Z) = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

$$Z = 4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$$

وزاري 2013 / د1

$(a)\ -2+2i$

$Z = -2+2i$

$\because r = mod\ Z = \|Z\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{4+4}$

$\therefore r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\|Z\|} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\|Z\|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta = \arg(Z) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$Z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

مثال (26) / عبر عن كل من الاعداد التالية بالصيغة القطبية :

$(a)\ 1 \qquad (b)\ -1 \qquad (c)\ i \qquad (d)\ -i$

$(a)\quad 1 = 1+0i = 1\,(cos\,0 + isin\,0)$

$(b)\quad -1 = -1+0i = 1\,(cos\,\pi + isin\,\pi)$

$(c)\quad i = 0+i = 1\left(cos\frac{\pi}{2} + isin\,\frac{\pi}{2}\right)$

$(d)\quad -i = 0-i = 1\left(cos\frac{3\pi}{2} + isin\,\frac{3\pi}{2}\right)$

ملاحظة :

من خلال المثال (26) السابق نستنتج طريقة يمكن تطبيقها على الأعداد المركبة وكما يلي :

$3 = 3(1) = 3(1+0i) = 3(cos\,0 + isin\,0)$

$5i = 5(0+i) = 5\left(cos\frac{\pi}{2} + isin\,\frac{\pi}{2}\right)$

$-2 = 2(-1) = 2(-1+0i) = 2(cos\,\pi + isin\,\pi)$

$-7i = 7(-i) = 7(0-i) = 7\left(cos\frac{3\pi}{2} + isin\,\frac{3\pi}{2}\right)$

مبرهنة ديموافر $(De\ Moivre's\ Theorem)$

لكل $n \in N$, $\theta \in R$ فأن $Z^n = (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

لكل $-n \in N$, $\theta \in R$ فأن $Z^n = (\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)$

$\sqrt[n]{Z} = r^{\left(\frac{1}{n}\right)}\left(\cos\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right) \qquad k = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$

مثال (27) / أحسب $\left(\cos\frac{3}{8}\pi + \sin\frac{3}{8}\pi\right)^4$

$$\left(\cos\frac{3}{8}\pi + \sin\frac{3}{8}\pi\right)^4 = \left(\cos\frac{12}{8}\pi + \sin\frac{12}{8}\pi\right) = \left(\cos\frac{3}{2}\pi + \sin\frac{3}{2}\pi\right) = 0 - i$$

مثال (28) / بين لكل $n \in N$, $\theta \in R$ فأن $(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)$

الطرف الأيسر $= (\cos\theta - i\sin\theta)^n = \left(\cos\theta + (-i\sin\theta)\right)^n = [\cos\theta + i\sin(-\theta)]^n$

$= [\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]^n \qquad$ (وبجعل $\phi = -\theta$)

$= [\cos\phi + i\sin\phi]^n = \cos(n\phi) + i\sin(n\phi)$

$= \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta) = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta) = RHS$

ملاحظة :

القوانين التالية مهمة في عمليات التبسيط :

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

مثال (29) / أحسب بأستخدام مبرهنة ديموافر $(1+i)^{11}$. وزاري 2013 / د2 وزاري 2015 / د1

$$let(Z=1+i) \Rightarrow r = mod\,Z = \|Z\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\|Z\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad sin\,\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$Z^{11} = (1+i)^{11} = r^{(11)}(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{11} = (\sqrt{2})^{(11)}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^{11}$$

$$Z^{11} = (\sqrt{2})^{(11)}\left(\cos\left(\frac{11\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{11\pi}{4}\right)\right) = (\sqrt{2})(\sqrt{2})^{(10)}\left(\cos\left(\frac{8\pi+3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{8\pi+3\pi}{4}\right)\right)$$

$$Z^{11} = (\sqrt{2})(2)^{(5)}\left(\cos\left(2\pi + \frac{3\pi}{4}\right) + \mathrm{i}\sin\left(2\pi + \frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

$$Z^{11} = 32(\sqrt{2})\left[\left(cos(2\pi)\,cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - sin(2\pi)sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) + i\left(sin(2\pi)\,cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + cos(2\pi)sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)\right]$$

$$Z^{11} = 32(\sqrt{2})\left[\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) + i\left(sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)\right] = 32(\sqrt{2})\left[\frac{-1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right] = 32(-1+i) = -32+32i$$

ملاحظة :

$$\because\; \boldsymbol{Z^{-n} = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^{-n} = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta) = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)}$$

$$\boxed{\therefore\; \boldsymbol{Z^{-n} = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)}}$$

مثال (30) / حل المعادلة $x^3+1=0$ حيث $x \in \mathbb{C}$

$$\because\; \boldsymbol{x^3+1=0 \Rightarrow x^3=-1 \Rightarrow x^3 = \cos(\pi) + isin(\pi)}$$ (بالجذر التكعيبي)

$$\therefore\; \boldsymbol{x = (cos(\pi)+isin(\pi))^{\frac{1}{3}} = cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right) + i\,sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{3}\right)} \qquad \boldsymbol{k=0,1,2}$$

$$\boldsymbol{if\;\; k=0 \Rightarrow x = cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

$$\boldsymbol{if\;\; k=1 \Rightarrow x = cos(\pi) + i\,sin(\pi) \Rightarrow x = -1+0i = -1}$$

$$\boldsymbol{if\;\; k=2 \Rightarrow x = cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i\,sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) \Rightarrow x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$$

∴ مجموعة الحل للمعادلة هي $\boldsymbol{\left\{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\;,-1\;,\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}}$

مثال (31) / أوجد الصيغة القطبية للمقدار : $(\sqrt{3}+i)^2$ ثم جد الجذور الخمسة له .

$$let\ \ Z=\sqrt{3}+i \quad \Rightarrow \quad r=mod\ Z=\|Z\|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3+1}=2$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{x}{\|Z\|}=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2} \qquad \theta=\frac{\pi}{6}$$

$$Z=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right) \quad \Rightarrow \quad Z^2=2^2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad Z^2=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$(Z^2)^{\frac{1}{5}}=4^{\left(\frac{1}{5}\right)}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{5}}=\sqrt[5]{4}\left(\cos\left[\frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi}{5}\right]+i\sin\left[\frac{\left(\frac{\pi}{3}\right)+2k\pi}{5}\right]\right)$$

$$\sqrt[5]{z^2}=\sqrt[5]{4}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi+6k\pi}{3}}{5}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi+6k\pi}{3}}{5}\right)\right]$$

$$\sqrt[5]{z^2}=\sqrt[5]{4}\left[\cos\left(\frac{\pi+6k\pi}{15}\right)+i\sin\left(\frac{\pi+6k\pi}{3}\right)\right] \qquad k=0,1,2,3,4$$

$$if\quad k=0 \quad \Rightarrow Z_1=\sqrt[5]{4}\,(cos\,\frac{\pi}{15}+i\,sin\,\frac{\pi}{15})$$

$$if\quad k=1 \quad \Rightarrow Z_2=\sqrt[5]{4}(cos\,\frac{7\pi}{15}+i\,sin\,\frac{7\pi}{15})$$

$$if\quad k=2 \quad \Rightarrow Z_3=\sqrt[5]{4}(cos\,\frac{13\pi}{15}+i\,sin\,\frac{13\pi}{15})$$

$$if\quad k=3 \quad \Rightarrow Z_4=\sqrt[5]{4}(cos\,\frac{19\pi}{15}+i\,sin\,\frac{19\pi}{15})$$

$$if\quad k=4 \quad \Rightarrow Z_5=\sqrt[5]{4}(cos\,\frac{25\pi}{15}+i\,sin\,\frac{25\pi}{15}) \ =\sqrt[5]{4}(cos\,\frac{5\pi}{3}+i\,sin\frac{5\pi}{3})$$

تمارين(5 – 1)

س1 / أحسب ما يلي :

$(a)\ \left[\cos\frac{5}{24}\pi + i\sin\frac{5}{24}\pi\right]^4$

$$\left[\cos\frac{5}{24}\pi + i\sin\frac{5}{24}\pi\right]^4 = \left[\cos\frac{20}{24}\pi + i\sin\frac{20}{24}\pi\right] = \left[\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right] = \left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= \left[\cos(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin(\pi)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] + i\left[\sin(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos(\pi)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= -\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$(b)\ \left[\cos\frac{7}{12}\pi + i\sin\frac{7}{12}\pi\right]^{-3}$

$$\left[\cos\frac{7}{12}\pi + i\sin\frac{7}{12}\pi\right]^{-3} = \left[\cos\frac{-21}{12}\pi + i\sin\frac{-21}{12}\pi\right] = \left[\cos\frac{-7}{4}\pi + i\sin\frac{-7}{4}\pi\right] = \left[\cos\frac{7}{4}\pi - i\sin\frac{7}{4}\pi\right]$$

$$= \left[\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \left[\cos(2\pi)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin(2\pi)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - i\left[\sin(2\pi)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos(2\pi)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \cos(2\pi)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\cos(2\pi)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$$

س2 / أحسب بأستخدام مبرهنة ديموافر (أو التعميم) ما يأتي :

وزاري 2012 / د1

$(a)\ (1-i)^7$

$let\ Z = 1 - i \quad \Rightarrow \quad r = mod\ Z = \|Z\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\|Z\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$ (الربع الرابع)

$$Z^{(7)} = (1-i)^7 = r^{(7)}(\cos\theta + i\sin\theta)^7 = (\sqrt{2})^{(7)}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)^7$$

$$Z^{(7)} = (\sqrt{2})^{(7)}\left(\cos\frac{49\pi}{4} + i\sin\frac{49\pi}{4}\right) = (\sqrt{2})(\sqrt{2})^{(6)}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+12\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+12\pi\right)\right]$$

$$Z^{(7)} = (\sqrt{2})(2)^{(3)}\left[\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(12\pi) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(12\pi)\right) + i\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(12\pi) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(12\pi)\right)\right]$$

$$Z^{(7)} = 8(\sqrt{2})\left[\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(12\pi)\right) + i\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(12\pi)\right)\right] = 8(\sqrt{2})\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$Z^{(7)} = 8(\sqrt{2})\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = 8(1+i) = 8 + 8i$$

وزاري 2014 / د2

$(b)\ (\sqrt{3}+i)^{-9}$

$let\ \ Z=\sqrt{3}+i \quad \Rightarrow \quad r=mod\ Z=\|Z\|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{3+1}=2$

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{x}{\|Z\|}=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad sin\,\theta=\frac{y}{r}=\frac{1}{2} \qquad \theta=\frac{\pi}{6}$ (الربع الأول)

$Z^{-9}=(\sqrt{3}+i)^{-9}=r^{(-9)}(\cos\theta+i\sin\theta)^{-9}=2^{(-9)}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{-9}$

$Z^{-9}=\frac{1}{(2)^9}\left(\cos\left(\frac{-9\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-9\pi}{6}\right)\right)=\frac{1}{512}\left(\cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right)\right)=\frac{1}{512}\left(\cos\frac{3\pi}{2}-i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$

$Z^{-9}=\frac{1}{512}[0-i(-1)]=\frac{1}{512}i$

س3 / بسط ما يأتي : **وزاري 2013 / د2**

$(a)\ \ \frac{(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^3}$

$\frac{(\cos 2\theta+i\sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)^3}=\frac{[(\cos\theta+i\sin\theta)^2]^5}{[(\cos\theta+i\sin\theta)^3]^3}=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{10}}{(\cos\theta+i\sin\theta)^9}=\cos\theta+i\sin\theta$

$(b)\ \ (\cos\theta+i\sin\theta)^8(\cos\theta-i\sin\theta)^4$

$=\ (\cos\theta+i\sin\theta)^4(\cos\theta+i\sin\theta)^4(\cos\theta-i\sin\theta)^4$

$=\ (\cos\theta+i\sin\theta)^4\ [(\cos\theta+i\sin\theta)(\cos\theta-i\sin\theta)]^4\ =(\cos\theta+i\sin\theta)^4\ [(\cos\theta)^2-(i\sin\theta)^2]^4$

$=(\cos\theta+i\sin\theta)^4[(\cos\theta)^2+(\sin\theta)^2]^4=(\cos\theta+i\sin\theta)^4(1)^4=\cos 4\theta+i\sin 4\theta$

س4 / باستخدام مبرهنة ديموافر جد الجذور التربيعية للعدد المركب $-1+\sqrt{3}i$

$let\ \ Z=-1+\sqrt{3}i \quad \Rightarrow \quad r=mod\ Z=\|Z\|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{x}{\|Z\|}=\frac{-1}{2}\ ,\quad sin\,\theta=\frac{y}{r}=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \theta=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$ (الربع الثاني)

$\sqrt{Z}=\sqrt{-1+\sqrt{3}i}=(-1+\sqrt{3}i)^{\left(\frac{1}{2}\right)}=r^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\cos\theta+i\sin\theta)^{\left(\frac{1}{2}\right)}=2^{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}$

$\sqrt{Z}=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)\right]=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\frac{2\pi+6k\pi}{3}}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{2\pi+6k\pi}{3}}{2}\right)\right]$

$\sqrt{Z}=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{2\pi+6k\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi+6k\pi}{6}\right)\right] \qquad k=0,1$

$\text{if}\ \ k=0\ \ \Rightarrow Z_1=\sqrt{2}[\cos\left(\frac{2\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{6}\right)]=\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{3}+isin\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$

$\text{if}\ \ k=1\ \ \Rightarrow Z_2=\sqrt{2}[\cos\left(\frac{8\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{8\pi}{6}\right)]=\sqrt{2}\left(cos\frac{4\pi}{3}+isin\frac{4\pi}{3}\right)=\sqrt{2}\left[cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+isin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$=\sqrt{2}[\cos(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\sin(\pi)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)]+i\left[\sin(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\cos(\pi)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$=\sqrt{2}[-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)]=\sqrt{2}\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i$

س5 / باستخدام مبرهنة ديموافر جد الجذور التكعيبية للعدد المركب $27i$

$let\ \ Z = 27i \quad \Rightarrow \quad r = mod\ Z = \|Z\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(27)^2} = 27$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\|Z\|} = \frac{0}{27} = 0 \quad , \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{27}{27} = 1 \quad \theta = \frac{\pi}{2}$ (الربع الاول)

$\sqrt[3]{Z} = \sqrt[3]{27i} = (27i)^{\left(\frac{1}{3}\right)} = r^{\left(\frac{1}{3}\right)}(\cos\theta + i\sin\theta)^{\left(\frac{1}{3}\right)} = (27)^{\left(\frac{1}{3}\right)}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}$

$\sqrt[3]{Z} = \sqrt[3]{27}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)\right) \qquad k = 0,1,2$

$\text{if}\ \ k=0 \quad \Rightarrow Z_1 = 3[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)] = 3\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right] = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

$\text{if}\ \ k=1 \quad \Rightarrow Z_2 = 3[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)] = 3\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$= 3\left[-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = 3\left[\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right] = \frac{-3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

$\text{if}\ \ k=2 \quad \Rightarrow Z_3 = 3[\cos\left(\frac{9\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{6}\right)] = 3\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] = 0 + 3(-i) = -3i$

س6 / جد الجذور الأربعة للعدد (-16) باستخدام مبرهنة ديموافر .

$let\ \ Z = -16 \quad \Rightarrow \quad r = mod\ Z = \|Z\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(16)^2} = 16$

$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\|Z\|} = \frac{-16}{16} = -1 \quad , \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{0}{16} = 0 \quad \theta = \pi$

$\sqrt[4]{Z} = \sqrt[4]{-16} = (-16)^{\left(\frac{1}{4}\right)} = r^{\left(\frac{1}{4}\right)}(\cos\theta + i\sin\theta)^{\left(\frac{1}{4}\right)} = (16)^{\left(\frac{1}{4}\right)}(\cos\pi + i\sin\pi)^{\left(\frac{1}{4}\right)}$

$\sqrt[4]{Z} = \sqrt[4]{16}\left(\cos\left(\frac{\pi+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\pi+2k\pi}{n}\right)\right) \qquad \boxed{n=4}$

$\text{if}\ k=0 \quad \Rightarrow Z_1 = 2[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)] = 2\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$\text{if}\ k=1 \quad \Rightarrow Z_2 = 2[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)] = 2[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)] = 2[-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)]$

$= 2\left[\frac{-1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

$\text{if}\ k=2 \quad \Rightarrow Z_3 = 2[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)] = 2[\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)] = 2[-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)]$

$= 2\left[\frac{-1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$

$\text{if}\ k=3 \quad \Rightarrow Z_4 = 2[\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)] = 2[\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)]$

$= 2[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)] = 2\left[\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$

س7 / جد الجذور الستة للعدد $(-64i)$ بأستخدام مبرهنة ديموافر .

$$let \quad Z = -64i \quad \Rightarrow r = mod\, Z = \|Z\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(64)^2} = 64$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\|Z\|} = \frac{\mathbf{0}}{64} = 0 \quad , \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{\mathbf{-64}}{64} = -1 \quad \theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$\sqrt[6]{Z} = \sqrt[6]{-64i} = (-64i)^{\left(\frac{1}{6}\right)} = r^{\left(\frac{1}{6}\right)}(\cos\theta + i\sin\theta)^{\left(\frac{1}{6}\right)} = (64)^{\left(\frac{1}{6}\right)}\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)^{\left(\frac{1}{6}\right)}$$

$$\sqrt[6]{Z} = \sqrt[6]{64}\left[\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{6}\right)\right] = 2\left[\cos\left(\frac{3\pi + 4k\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi + 4k\pi}{12}\right)\right]$$

$$\text{if } k = 0 \quad \Rightarrow Z_1 = 2[\cos\left(\frac{3\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{12}\right)] = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = 2\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_0 = \sqrt{2} + \sqrt{2}i}$$

$$\text{if } k = 1 \quad \Rightarrow Z_2 = 2[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)] = 2[\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right)]$$

$$= 2\left[\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + i\left(\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]$$

$$= 2\left[\left(\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = 2\left[\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$= 2\left[\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)\right] = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{if } k = 2 \Rightarrow Z_3 = 2[\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)] = 2[\cos\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{12}\right)]$$

$$= 2\left[\left(\cos(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin(\pi)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) + i\left(\sin(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - \cos(\pi)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)\right]$$

$$= 2\left[-\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right] = \left[-\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 2\left[-\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) + i\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\right]$$

$$= 2\left[-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\right) + i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\right)\right] = 2\left[\frac{-\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}i\right]$$

$$= \frac{-\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}i$$

$$\text{if } k = 3 \Rightarrow Z_4 = 2[\cos\left(\frac{15\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{15\pi}{12}\right)] = 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$$

$$= 2[\cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)]$$

$$= 2\left[\left(\cos(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(\pi)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) + i\left(\sin(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos(\pi)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]$$

$$= 2\left[-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = 2\left[\frac{-1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right] = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$$

if k = 4 $\Rightarrow Z_5 = 2[\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{19\pi}{12}\right)] = 2[\cos\left(2\pi - \frac{5\pi}{12}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{5\pi}{12}\right)]$

$$= 2\left[\left(\cos(2\pi)\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) + \sin(2\pi)\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right) + i\left(\sin(2\pi)\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) - \cos(2\pi)\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right)\right]$$

$$= 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) - i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right] = \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 2\left[\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) - i\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\right]$$

$$= 2\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\right) - i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\right)\right] = 2\left[\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}i\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}i$$

if k = 5 $\Rightarrow Z_6 = 2[\cos\left(\frac{23\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{23\pi}{12}\right)] = 2[\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{12}\right)]$

$$= 2\left[\left(\cos(2\pi)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + \sin(2\pi)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) + i\left(\sin(2\pi)\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - \cos(2\pi)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)\right]$$

$$= 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right] = \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$= 2\left[\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) - i\left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\right]$$

$$= 2\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\right) - i\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{2}\right)\right] = 2\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}i\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}i$$

****

حلول التمارين العامة الخاصة بالفصل الأول

وزاري 2013 / د3

س1 / جد قيمة $x, y \in R$ والتي تحقق : $\frac{y}{1+i} = \frac{x^2+4}{x+2i}$

$$\frac{y}{1+i} = \frac{x^2+4}{x+2i} \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i} = \frac{x^2-4i^2}{x+2i}$$

$$\frac{y-yi}{1^2+1^2} = \frac{(x-2i)\cancel{(x+2i)}}{\cancel{(x+2i)}} \quad \Rightarrow \quad \frac{y-yi}{2} = x - 2i$$

$y - yi = 2x - 4i \quad \Rightarrow \quad y = 2x$ ……… ①

$-yi = -4i \quad \xrightarrow{(\div -i)} \quad \boxed{y = 4}$ نعوض في معادلة ①

$4 = 2x \quad \Rightarrow \quad x = 2$

س2 / جد ناتج : $\left(3W^{9n}+\frac{5}{W^5}+\frac{4}{W^4}\right)^6$ $n\in Z$

$$\left(3W^{9n}+\frac{5}{W^5}+\frac{4}{W^4}\right)^6=\left(3(W^3)^{3n}+\frac{5}{W^3.W^2}+\frac{4}{W^3.W}\right)^6=\left(3(1)^{3n}+\frac{5}{W^2}+\frac{4}{W}\right)^6$$
$$=\left(3+\frac{5W^3}{W^2}+\frac{4W^3}{W}\right)^6=(3+5W+4W^2)^6=(3+5W+4[-1-W])^6$$
$$=(3+5W-4-4W)^6=(-1+W)^6=[(-1+W)^2]^3=[1-2W+W^2]^3$$
$$=[(1+W^2)-2W]^3=[-W-2W]^3=[-3W]^3=-27W^3=-27$$

س3 / أذا كان $Z=\frac{1-\sqrt{3}\,i}{1+\sqrt{-3}}$ عدداً مركباً ، جد بأستخدام مبرهنة ديموافر $Z^{\frac{1}{2}}$

$$Z=\frac{1-\sqrt{3}\,i}{1+\sqrt{-3}}=\frac{1-\sqrt{3}\,i}{1+\sqrt{3}\,i}\times\frac{1-\sqrt{3}\,i}{1-\sqrt{3}\,i}=\frac{\left(1-\sqrt{3}\,i\right)^2}{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1-2\sqrt{3}\,i+3i^2}{1+3}$$
$$Z=\frac{-2-2\sqrt{3}\,i}{4}\quad\Rightarrow\quad\boxed{Z=\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$$
$$r=mod\,Z=\|Z\|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2+\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\sqrt{1}=1$$
$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{x}{\|Z\|}=\frac{\left(\frac{-1}{2}\right)}{1}=\frac{-1}{2}\qquad,\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)}{1}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$$
(θ تقع في الربع الثالث)
$$\theta=\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{4\pi}{3}$$
$$Z^{\frac{1}{2}}=\left(\frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}=r^{\left(\frac{1}{2}\right)}(\cos\theta+i\sin\theta)^{\left(\frac{1}{2}\right)}=(1)^{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}$$
$$Z^{\frac{1}{2}}=\left[\cos\left(\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{4\pi}{3}+2k\pi}{2}\right)\right]\qquad k=0,1$$
$$\text{if } k=0\ \Rightarrow Z^{\frac{1}{2}}=\cos\left(\frac{4\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\Rightarrow Z^{\frac{1}{2}}=\left[\cos(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin(\pi)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]+i\left[\sin(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos(\pi)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$\Rightarrow Z^{\frac{1}{2}}=\cos(\pi)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\cos(\pi)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$
$$\text{if } k=1\ \Rightarrow Z^{\frac{1}{2}}=\left[\cos\left(\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi}{2}\right)\right]=\cos\left(\frac{\frac{4\pi+6\pi}{3}}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{4\pi+6\pi}{3}}{2}\right)$$
$$\Rightarrow Z^{\frac{1}{2}}=\cos\left(\frac{10\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{10\pi}{6}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right)=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\Rightarrow Z^{\frac{1}{2}}=\left[\cos(2\pi)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+\sin(2\pi)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]+i\left[\sin(2\pi)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-\cos(2\pi)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]$$
$$\Rightarrow Z^{\frac{1}{2}}=\cos(2\pi)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\cos(2\pi)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

حلول الأسئلة الوزارية الخاصة بالفصل الأول

سؤال وزاري 98/ د 1: ضع $(1+3i)^2+(3-2i)^2$ بالصيغة العادية للعد المركب.

الحل/ المقدار $=1+6i+9i^2+9-12i+4i^2$

$=1+6i-9+9-12i-4=-3-6i$

سؤال وزاري 98/د 1: جد الجذر التربيعي للعدد: $\frac{7+wi+w^2i}{1-wi-w^2i}$

الحل/ $\frac{7+wi+w^2i}{1-wi-w^2i}=\frac{7+i(w+w^2)}{1-i(w+w^2)}=\frac{7-i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}=\frac{7-7i-i+i^2}{1+1}$

$=\frac{6-8i}{2}=\boxed{3-4i}$

نفرض $\sqrt{3-4i}=x+yi \xRightarrow{\text{بالتربيع}} 3-4i=(x^2-y^2)+2xyi$

$x^2-y^2=3 \ldots\ldots(1) \quad , \quad 2xy=-4 \overset{\div 2}{\Rightarrow} xy=-2 \Rightarrow y=\frac{-2}{x}\ldots\ldots(2)$

$x^2-\frac{4}{x^2}=3 \overset{.x^2}{\Rightarrow} x^4-4=3x^2 \Rightarrow x^4-3x^2-4=0 \Rightarrow (x^2-4)(x^2+1)=0$

يهمل

$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\begin{cases}2 \Rightarrow y=\frac{-2}{2}=-1\\ -2 \Rightarrow y=1\end{cases}$

$\therefore \sqrt{3-4i}=\begin{cases}2-i\\ -2+i\end{cases}$

سؤال وزاري 98/د 2: أكتب المعادلة التربيعية التي جذرها $(2iw-w^2),(2iw^2-w)$.

الحل/ مجموع الجذرين $=2iw-w^2+2iw^2-w=-(w^2+w)+2i(w+w^2)$

$=1-2i$

حاصل ضرب الجذرين $=(2iw-w^2)(2iw^2-w)=4i^2w^3-2iw^2-2iw^4+w^3$

$=-4-2iw^2-2iw^3.w+1$

$=-3-2i(w^2+w)=-3+2i$

$\therefore x^2-(1-2i)x+(-3+2i)=0$ المعادلة التربيعية

سؤال وزاري 99/د1: كون المعادلة التربيعية التي جذرها $3wi - \frac{2w^2}{i}\ , 2wi - \frac{3w^2}{i}$

الحل/

$$3wi - \frac{2w^2}{i} = 3wi - \frac{2w^2}{i} \times \frac{-i}{-i} = 3wi + 2w^2 i$$

$$2wi - \frac{3w^2}{i} = 2wi - \frac{3w^2}{i} \times \frac{-i}{-i} = 2wi + 3w^2 i$$

مجموع الجذرين $= 3wi + 2w^2 i + 2wi + 3w^2 i = 5wi + 5w^2 i = 5i(w + w^2) = -5i$

حاصل ضرب الجذرين $= (3wi + 2w^2 i)(2wi + 3w^2 i)$

$$= 6w^2 i^2 + 9w^3 i^2 + 4w^3 i^2 + 6w^4 i^2$$

$$= -6w^2 - 9 - 4 - 6w^3 . w$$

$$= -13 - 6w^2 - 6w$$

$$= -13 - 6(w^2 + w) = -13 + 6 = -7$$

$\therefore x^2 + 5ix - 7 = 0$ المعادلة التربيعية

سؤال وزاري 99/د1: جد قيمتي x و y الحقيقيتين إذا علمت أن: $(3x + 2yi)^2 = \frac{200}{4+3i}$

الحل/

$$9x^2 + 12xyi + 4y^2 i^2 = \frac{200}{4+3i} \times \frac{4-3i}{4-3i}$$

$$\Rightarrow (9x^2 - 4y^2) + 12\,xyi = \frac{800-600i}{16+9}$$

$$\Rightarrow (9x^2 - 4y^2) + 12xyi = 32 - 24i$$

$$\therefore 9x^2 - 4y^2 = 32 \ldots\ldots(1), \quad 12xy = -24 \xrightarrow{(\div 12)} xy = -2 \Rightarrow y = \frac{-2}{x} \ldots\ldots\ldots(2)$$

$$9x^2 - 4\left(\frac{4}{x^2}\right) = 32 \Rightarrow 9x^2 - \frac{16}{x^2} = 32 \xrightarrow{(.x^2)} 9x^4 - 16 = 32x^2$$

$$\Rightarrow 9x^4 - 32x^2 - 16 = 0 \Rightarrow (9x^2 + 4)(x^2 - 4) = 0$$

أما $9x^2 + 4 = 0$ يهمـــل

أو $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \begin{cases} 2 \Rightarrow y = \frac{-2}{2} = -1 \\ -2 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$

سؤال وزاري 2000/د1: إذا كان: $x = 2 + 3i$ ، $y = 3 - i$ ، جد قيمة $x^2 + 2y^2$.

الحل/

$x^2 = (2+3i)^2 = 4 + 12i + 9i^2 = -5 + 12i$

$y^2 = (3-i)^2 = 9 - 6i + i^2 = 8 - 6i$

$x^2 + 2y^2 = -5 + 12i + 2(8 - 6i) = -5 + 12i + 16 - 12i = 11$

سؤال وزاري 2000/د1: جد قيمة: $\left(\frac{1}{1+w} - \frac{1}{1+w^2}\right)^2$.

الحل/

$\left(\frac{w^3}{-w^2} - \frac{w^3}{-w}\right)^2 = (-w + w^2)^2 = w^2 - 2w^3 + w^4 = w^2 - 2 + w^3.w$

$= (w^2 + w) - 2 = -2 - 1 = -3$

سؤال وزاري 2000/د2: جد قيمة كل من x و y الحقيقيتين إذا علمت:

$x(x+i) + y(y-i) + i = 13$

الحل/

$x^2 + xi + y^2 - yi + i = 13 \Rightarrow (x^2 + y^2) + (x - y + 1)i = 13 + 0i$

$x^2 + y^2 = 13 \ldots\ldots(1)$, $x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = x + 1 \ldots\ldots(2)$

$x^2 + (x+1)^2 = 13 \Rightarrow x^2 + x^2 + 2x + 1 - 13 = 0$

$\Rightarrow 2x^2 + 2x - 12 = 0 \overset{\div 2}{\Rightarrow} x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0$

$either \quad x + 3 = 0 \Rightarrow x = -3 \Rightarrow y = -3 + 1 = -2$

$or \quad x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2 + 1 = 3$

سؤال وزاري 2001/د1: جد قيمة المقدار $(3 - 2w)^2 + (3 - 2w^2)^2$.

الحل/

المقدار $= 9 - 12w + 4w^2 + 9 - 12w^2 + 4w^4$

$= 18 - 12w - 8w^2 + 4w^3.w = 18 - 12w - 8w^2 + 4w$

$= 18 - 8w - 8w^2 = 18 - 8(w + w^2) = 18 + 8 = 26$

سـؤال وزاري 2001/د1: ضـع المقـدار $\frac{7+\sqrt{3}i}{1+2\sqrt{3}i}$ بالصـيغة العاديـة للعـدد المركـب ثـم جـد المقيـاس والقيمـة الأساسيـة للسعة.

الحل/

$$\frac{7+\sqrt{3}\,i}{1+2\sqrt{3}\,i} = \frac{7+\sqrt{3}\,i}{1+2\sqrt{3}\,i} \times \frac{1-2\sqrt{3}\,i}{1-2\sqrt{3}\,i}$$

$$= \frac{7-14\sqrt{3}\,i+\sqrt{3}\,i-6i^2}{1+12} = \frac{13-13\sqrt{3}\,i}{13} = 1-\sqrt{3}\,i$$

المقياس $= \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2\,,\quad \cos\theta = \frac{1}{2}\,,\quad \sin\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}$

القيمة الأساسية للسعة $(\theta) = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$		θ تقع في الربع الرابع

سـؤال وزاري 2002/د1: ضـع $(3+2i)(-2+i)$ بالصـيغة العاديـة للعـدد المركـب ثـم جـد نظيـره الضـربي وبالصيغة العادية أيضاً.

الحل/

$$(3+2i)(-2+i) = -6+3i-4i+2i^2 = -8-i$$

النظير الضربي $= \frac{1}{-8-i} \times \frac{-8+i}{-8+i} = \frac{-8+i}{64+1} = \frac{-8}{65} + \frac{1}{65}i$

سؤال وزاري 2001/د2: كون المعادلة التربيعية التي جذرها $(3w-2i), (3w^2-2i)$.

الحل/

مجموع الجذرين $= 3w-2i+3w^2-2i = 3(w+w^2)-4i = -3-4i$

حاصل ضرب الجذرين $= (3w-2i)(3w^2-2i) = 9w^3-6wi-6w^2i+4i^2$

$$= 9-6i(w+w^2)-4 = 5+6i$$

$x^2-(-3-4i)x+(5+6i) = 0$		المعادلة التربيعية

سؤال 2002/د2: اذا كان $z = \left(-\sqrt{3}, 1\right)$ عدداً مركباً، أكتب الشكل الجبري لهذا العدد ثم جد مقياسه والقيمة الأساسية لسعته.

الحل/

$z = -\sqrt{3}+i$ الشكل الجبري

$\|z\| = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$ المقياس $,\quad \cos\theta = \frac{-\sqrt{3}}{2}\,, \sin\theta = \frac{1}{2}$

$\therefore$ القيمة الأساسية للسعة $(\theta) = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$		θ تقع في الربع الثاني

سؤال وزاري 2002/د2: جد قيمة $(-1+3w-w^2)(2+3w^2+2w)$.

الحل/ $= [-(1+w^2)+3w][2(1+w)+3w^2]$

$= (w+3w)(-2w^2+3w^2) = (4w)(w^2) = 4w^3 = 4$

سؤال وزاري 2002/د1: كون المعادلة التربيعية التي جذرها $(2-3iw), (2-3iw^2)$.

الحل/ مجموع الجذرين $= 2-3iw+2-3iw^2 = 4-3i(w+w^2) = 4+3i$

حاصل الضرب $= (2-3iw)(2-3iw^2) = 4-6iw^2-6iw+9i^2w^3$

$= -5-6i(w^2+w) = -5+6i$

المعادلة التربيعية $\therefore\ x^2-(4+3i)x+(-5+6i)=0$

سؤال وزاري 2003/د1: إذا كان $x=3+2i$, $y=1-i$ إثبت أن $\overline{x+y} = \overline{x}+\overline{y}$.

الحل/ $\overline{x+y} = \overline{(3+2i)+(1-i)} = \overline{4+i} = 4-i$

$\overline{x}+\overline{y} = \overline{(3+2i)}+\overline{1-i} = 3-2i+1+i = 4-i$

$\overline{x+y} = \overline{x}+\overline{y}$

سؤال وزاري 2003/د1: جد النظير الضربي للعدد المركب $3+5i$ ثم ضعه بالصورة العادية.

الحل/ النظير الضربي $= \frac{1}{3+5i} = \frac{1}{3+5i}\times\frac{3-5i}{3-5i} = \frac{3-5i}{9+25} = \frac{3-5i}{34} = \frac{3}{34}-\frac{5}{34}i$

سؤال وزاري 2003/د1: جد قيمة المقدار $\frac{1}{3+5w+4w^2}+\frac{1}{3+4w+5w^2}$.

الحل/

$= \frac{1}{3+4w+5(-1-w)}+\frac{1}{3+5w+4(-1-w)}$

$= \frac{1}{3+4w-5-5w}+\frac{1}{3+5w-4-4w} = \frac{1}{-2-w}+\frac{1}{-1+w}$

$= \frac{(-1+w)+(-2-w)}{(-2-w)(-1+w)} = \frac{-1+w-2-w}{2-2w+w-w^2} = \frac{-3}{2-w-w^2}$

$= \frac{-3}{2-(w+w^2)} = \frac{-3}{3} = -1$

سؤال وزاري 2003/د2: إذا كان Z عدداً مركباً مقياسه (2) وسعته $\left(\frac{\pi}{3}\right)$ جد كلا من الشكل الديكارتي والجبري لهذا العدد.

الحل/ $\cos\theta = \frac{x}{\|z\|} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{3} = \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{2} \Rightarrow \boxed{x = 1}$

$\sin\theta = \frac{y}{\|z\|} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{3} = \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{y}{2} \Rightarrow \boxed{y = \sqrt{3}}$

$\therefore z = 1 + \sqrt{3}i$ الشكل الجبري

$z = (1, \sqrt{3})$ الشكل الديكارتي

سؤال وزاري 2004/د1: كون المعادلة التربيعية التي جذرها $\left(i - \frac{5}{w}\right), \left(i - \frac{5}{w^2}\right)$.

الحل/ $i - \frac{5}{w^2} = i - \frac{5w^3}{w^2} = \boxed{i - 5w}$, $i - \frac{5}{w} = i - \frac{5w^3}{w} = \boxed{i - 5w^2}$

مجموع الجذرين $= i - 5w + i - 5w^2 = -5(w + w^2) + 2i = \boxed{5 + 2i}$

حاصل ضرب الجذرين $= (i - 5w)(i - 5w^2) = i^2 - 5w^2 i - 5wi + 25w^3$

$= -1 - 5i(w^2 + w) + 25$

$= \boxed{24 + 5i}$

$\therefore\ x^2 - (5 + 2i)x + (24 + 5i) = 0$ المعادلة التربيعية

سؤال وزاري 2004/د1: جد الصيغة العادية للعدد المركب $\left(1 - \sqrt{3}i\right)^2 + \left(2 - \sqrt{3}i\right)^2$.

الحل/ $\left(1 - \sqrt{3}i\right)^2 + \left(2 - \sqrt{3}i\right)^2 = 1 - 2\sqrt{3}i + 3i^2 + 4 - 4\sqrt{3}i + 3i^2$

$= 5 - 6\sqrt{3}i - 3 - 3$

$= -1 - 6\sqrt{3}i$

سؤال وزاري 2004/د2: جد قيمة $(2 + w^2)^2 + (2 + w)^2$.

الحل/ المقدار $= 4 + 4w^2 + w^4 + 4 + 4w + w^2 = 8 + 4(w^2 + w) + w.w^3 + w^2$

$= 8 - 4 + (w + w^2) = 4 - 1 = \boxed{3}$

سؤال وزاري 2005/د1: جد ناتج $(3+4i)^2+(5-3i)(1+i)$ بالصيغة الديكارتية.

الحل/ المقدار $= 9+24i+16i^2+5+5i-3i-3i^2$

$= (9-16+5+3)+(24+5-3)i = 1+26i$

$\therefore (1,26)$ الصيغة الديكارتية

سؤال وزاري 2005/د1: كون المعادلة التربيعية التي جذراها $\left(i-\frac{3}{w^2}\right)$, $\left(i-\frac{3}{w}\right)$.

الحل/ $i-\frac{3}{w}=i-\frac{3w^3}{w}=\boxed{i-3w^2}$, $i-\frac{3}{w^2}=i-\frac{3w^3}{w^2}=\boxed{i-3w}$

مجموع الجذرين $= i-3w^2+i-3w = -3(w^2+w)+2i = 3+2i$

حاصل الضرب $= (i-3w^2)(i-3w) = i^2-3wi-3w^2i+9w^3$

$= -1-3i(w+w^2)+9 = 8+3i$

$\therefore x^2-(3+2i)x+(8+3i)=0$ المعادلة التربيعية

سؤال وزاري 2005/د2: إذا كان $x=-1+2i$ فجد x^2+3x+5 بالصيغة الديكارتية.

$x^2+3x+5 = (-1+2i)^2+3(-1+2i)+5$

$= 1-4i+4i^2-3+6i+5 = -1+2i$

$\therefore (-1,2)$ الصيغة الديكارتية

سؤال وزاري 2005/د2: جد الجذر التربيعي للمقدار $\frac{1+iw+iw^2}{1-iw-iw^2}$.

الحل/

$\frac{1+iw+iw^2}{1-iw-iw^2} = \frac{1+i(w+w^2)}{1-i(w+w^2)} = \frac{1-i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i}$

$= \frac{1-i-i+i^2}{1+1} = \frac{-2i}{2} = -i$

نفرض $\sqrt{-i}=x+yi$ $\xrightarrow{\text{بالتربيع}}$ $0-i=(x^2-y^2)+2xyi$

$\therefore x^2-y^2=0 \ldots\ldots(1)$, $2xy=-1 \Rightarrow y=\frac{-1}{2x} \ldots\ldots\ldots(2)$

$x^2-\frac{1}{4x^2}=0 \xrightarrow{(.4x)^2} 4x^4-1=0 \Rightarrow (2x^2-1)(2x^2+1)=0$

أما $2x^2+1=0$ يهمل

أو $2x^2-1=0 \Rightarrow 2x^2=1 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt2} \Rightarrow y=\frac{-1}{2\frac{1}{\sqrt2}}=\frac{-1}{\sqrt2}\\ \frac{-1}{\sqrt2} \Rightarrow y=\frac{1}{\sqrt2}\end{cases}$

$\therefore \sqrt{-i}=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}i\\ \frac{-1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}i\end{cases}$

سؤال وزاري 2006/د1: إذا كان z عددا مركباً مقياسه (4) وسعته الاساسية $\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ فجد كلا من الشكل الديكارتي والشكل الجبري للعدد z.

الحل/

$\cos\frac{5\pi}{6}=\frac{x}{4}\Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{x}{4}\Rightarrow 2x=-4\sqrt{3}\Rightarrow \boxed{x=-2\sqrt{3}}$

$\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{y}{4}\Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{y}{4}\Rightarrow 2y=4\Rightarrow \boxed{y=2}$

$\therefore z=-2\sqrt{3}+2i$ الشكل الجبري

$z=\left(-2\sqrt{3},2\right)$ الشكل الديكارتي

سؤال وزاري 2006/د1: كون المعادلة التربيعية التي جذراها $5+2iw^2$, $5+2iw$.

الحل/

مجموع الجذرين $=5+2iw+5+2iw^2=10+2i(w+w^2)=\boxed{10-2i}$

حاصل الضرب $=(5+2iw)(5+2iw^2)=25+10iw^2+10iw+4i^2w^3$

$=25+10i(w^2+w)-4=\boxed{21-10i}$

$\therefore\ x^2-(10-2i)x+(21-10i)=0$ المعادلة التربيعية

سؤال وزاري 2006/د1: جد قيمتي x و y الحقيقيتين من المعادلة: $(2x+i)(y+2i)=2+9i$.

الحل/

$2xy+4xi+iy+2i^2=2+9i\Rightarrow(2xy-2)+i(4x+y)=2+9i$

$2xy-2=2\Rightarrow 2xy=4\Rightarrow xy=2\Rightarrow y=\frac{2}{x}\quad \dots\dots\dots(1)$

$4x+y=9\quad \dots\dots\dots(2)$

$4x+\frac{2}{x}=9\quad \overset{(.x)}{\Longrightarrow}\quad 4x^2+2=9x\Rightarrow 4x^2-9x+2=0$

$\Rightarrow(4x-1)(x-2)=0$

أما $4x-1=0\Rightarrow 4x=1\Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{4}}\Rightarrow y=\frac{2}{\frac{1}{4}}\Rightarrow\boxed{y=8}$

أو $x-2=0\Rightarrow\boxed{x=2}\Rightarrow y=\frac{2}{2}\Rightarrow\boxed{y=1}$

سؤال وزاري 2006/د2: كون المعادلة التربيعية التي جذراها $(3-2iw), (3-2iw^2)$.

الحل/
مجموع الجذرين $= 3-2iw+3-2iw^2 = 6-2i(w+w^2) = \boxed{6+2i}$

حاصل الضرب $= (3-2iw)(3-2iw^2) = 9-6iw^2-6iw+4i^2w^3$

$= 9-6i(w^2+w)-4 = \boxed{5+6i}$

$\therefore\ x^2-(6+2i)x+(5+6i)=0$ المعادلة التربيعية

سؤال وزاري 2006/د2: جد قيمتي x و y الحقيقيتين إذا علمت أن:

$(3x-i)(2y+i)+11=7i$

الحل/

$6xy+3xi-2yi-i^2+11=0+7i$

$(6xy+12)+(3x-2y)i=0+7i$

$6xy+12=0 \overset{(\div 6)}{\Longrightarrow} xy=-2 \Rightarrow y=\frac{-2}{x} \ldots\ldots\ldots(1)$

$3x-2y=7 \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

$3x-2\left(\frac{-2}{x}\right)=7 \overset{(.x)}{\Longrightarrow} 3x^2+4=7x \Rightarrow 3x^2-7x+4=0$

$\Rightarrow (3x-4)(x-1)=0$

$3x-4=0 \Rightarrow 3x=4 \Rightarrow \boxed{x=\frac{4}{3}} \Rightarrow y=\frac{-2}{\frac{4}{3}}=\frac{-6}{4} \Rightarrow \boxed{y=\frac{-3}{2}}$

$or\ \ x-1=0 \Rightarrow \boxed{x=1} \Rightarrow y=\frac{-2}{1} \Rightarrow \boxed{y=-2}$

سؤال وزاري 2007/د1: جد الجذر التربيعي للعدد $3+4i$.

الحل/
نفرض $\sqrt{3+4i}=x+yi$ بالتربيع

$3+4i=x^2-y^2+2xyi$

$x^2-y^2=3 \ldots\ldots\ldots\ldots(1)\quad ,\quad 2xy=4 \overset{(\div 2)}{\Longrightarrow} xy=2 \Rightarrow y=\frac{2}{x} \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

$x^2-\frac{4}{x^2}=3 \overset{(.x^2)}{\Longrightarrow} x^4-4=3x^2 \Rightarrow x^4-3x^2-4=0 \Rightarrow (x^2-4)(x^2+1)=0$

$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\begin{cases} 2 \Rightarrow y=1 \\ -2 \Rightarrow y=-1 \end{cases}$

$\therefore\ \sqrt{3+4i}=\begin{cases} 2+i \\ -2-i \end{cases}$

سؤال وزاري 2007/د1: جد قيمة $\left(1-\frac{1}{w}+w\right)\left(1-\frac{1}{w^2}+w^2\right)$.

$$\text{المقدار} = \left(1-\frac{w^3}{w}+w\right)\left(1-\frac{w^3}{w^2}+w^2\right) = (1-w^2+w)(1-w+w^2)$$

$$= [(1+w)-w^2][(1+w^2)-w] = (-w^2-w^2)(-w-w)$$

$$= (-2w^2)(-2w) = 4w^3 = \boxed{4}$$

سؤال وزاري 2007/د2: جد المقياس والسعة الأساسية للعدد المركب $\left(\frac{2i}{1+i}\right)$.

الحل/

$$\frac{2i}{1+i} = \frac{2i}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i} = \frac{2i-2i^2}{2} = \frac{2i+2}{2} = i+1 = 1+i$$

$$\text{المقياس} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \quad , \quad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$$

سؤال وزاري 2008/ د1 : جد المقياس والقيمة الأساسية للسعة للعدد المركب $(1+\sqrt{3}i)^2$.

الحل/

$$(1+\sqrt{3}\,i)^2 = 1+2\sqrt{3}\,i+3i^2 = \boxed{-2+2\sqrt{3}\,i}$$

$$\text{المقياس} = \sqrt{4+12} = \sqrt{16} = 4 \; , \; \cos\theta = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore\ \theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ θ تقع في الربع الثاني

سؤال وزاري 2008/د1: أكتب المعادلة التربيعية التي جذراها $3w^2+\frac{i}{w^2}$, $3w+\frac{i}{w}$.

الحل/

$$3w+\frac{i}{w} = 3w+\frac{iw^3}{w} = \boxed{3w+iw^2}$$

$$3w^2+\frac{i}{w^2} = 3w^2+\frac{iw^3}{w^2} = \boxed{3w^2+iw}$$

$$\text{المجموع} = 3w+iw^2+3w^2+iw = 3(w+w^2)+i(w^2+w) = \boxed{-3-i}$$

$$\text{حاصل الضرب} = (3w+iw^2)(3w^2+iw) = 9w^3+3iw^2+3iw^4+i^2w^3$$

$$= 9+3iw^2+3iw^3.w-1$$

$$= 8+3i(w^2+w) = \boxed{8-3i}$$

$\therefore\ x^2-(-3-i)x+(8-3i) = 0$ المعادلة التربيعية

سؤال وزاري 2008/د2: جد قيمتي x و y الحقيقيتين واللتان تحققان المعادلة

$y + 5i = (2x + i)(x + i)$

الحل/

$y + 5i = 2x^2 + 2xi + ix + i^2 \Rightarrow y + 5i = (2x^2 - 1) + 3xi$

$y = 2x^2 - 1 \dots\dots\dots(1) \quad , \quad 5 = 3x \Rightarrow x = \frac{5}{3}$

$\therefore y = 2\left(\frac{25}{9}\right) - 1 = \frac{50}{9} - 1 = \frac{50-9}{9} = \frac{41}{9} = 4\frac{5}{9}$

سؤال وزاري 2009/د1: جد قيمة المقدار $w(1+i)^4 - (5 + 3w + 5w^2)^2$.

الحل/

المقدار $= w[(1+i)^2]^2 - [5(1+w^2) + 3w]^2$

$= w[1 + 2i + i^2]^2 - [-5w + 3w]^2 = w(4i^2) - 4w^2$

$= -4w - 4w^2 = -4(w + w^2) = 4$

سؤال وزاري 2009/د1: جد الجذر التربيعي للعدد: $\frac{14+2i}{1+i}$.

الحل/

$\frac{14+2i}{1+i} = \frac{14+2i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i}$

$= \frac{14-14i+2i-2i^2}{2} = \frac{16-12i}{2} = \boxed{8 - 6i}$

نفرض $\sqrt{8-6i} = x + yi \xrightarrow{\text{بالتربيع}} 8 - 6i = x^2 - y^2 + 2xyi$

$x^2 - y^2 = 8 \dots\dots(1) \quad , \quad 2xy = -6 \xrightarrow{(\div 2)} xy = -3 \Rightarrow y = \frac{-3}{x} \dots\dots\dots(2)$

$x^2 - \frac{9}{x^2} = 8 \xrightarrow{(.x^2)} x^4 - 9 = 8x^2 \Rightarrow x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \Rightarrow (x^2 - 9)(x^2 + 1) = 0$

يهمل

$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \begin{cases} 3 \Rightarrow y = -1 \\ -3 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$

$\therefore \sqrt{8-6i} = \begin{cases} 3 - i \\ -3 + i \end{cases}$

سؤال وزاري 2009/د2: حل المعادلة $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$ حيث z عدد مركب.

الحل/

$(z^2+9)(z^2+4)=0$

$z^2+9=0 \Rightarrow z^2=-9 \Rightarrow z^2=9i^2 \Rightarrow z=\pm 3i$

$or\ z^2+4=0 \Rightarrow z^2=-4 \Rightarrow z^2=4i^2 \Rightarrow z=\pm 2i$

$\therefore$ مج $=\{-2i, 2i, -3i, 3i\}$

سؤال وزاري 2009/د2: جد قيمة المقدار $\left(2w+\frac{3}{w}+2\right)^2\left(5+\frac{2}{w^2}+5w^2\right)^2$.

المقدار $=\left(2w+\frac{3w^3}{w}+2\right)^2\left(5+\frac{2w^3}{w^2}+5w^2\right)^2$

$=(2w+3w^2+2)^2(5+2w+5w^2)^2$

$=\ [2(w+1)+3w^2]^2\ \ [5(1+w^2)+2w]^2$

$=\ [-2w^2+3w^2]^2\ \ \ [-5w+2w]^2$

$=(w^2)^2(-3w)^2=w^4.(9w^2)=9w^6=9(w^3)^2=9(1)^2=9$

سؤال وزاري 2010/د1: جد قيمتي x و y الحقيقيتين واللتان تحققان المعادلة:

$$(x+3i)(y-2i)=12+5i$$

الحل/

$xy-2xi+3yi-6i^2=12+5i \Rightarrow (xy+6)+(-2x+3y)i=12+5i$

$xy+6=12 \Rightarrow xy=6 \Rightarrow y=\frac{6}{x} \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$

$-2x+3y=5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$

$-2x+3\left(\frac{6}{x}\right)=5 \quad \overset{(.x)}{\Longrightarrow} \quad -2x^2+18=5x \Rightarrow 2x^2+5x-18=0$

$(2x+9)(x-2)=0$

$2x+9=0 \Rightarrow 2x=-9 \Rightarrow \boxed{x=\frac{-9}{2}} \Rightarrow y=\frac{6}{\frac{-9}{2}}=\frac{-12}{9}=\boxed{y=\frac{-4}{3}}$

$or\ x-2=0 \Rightarrow \boxed{x=2} \Rightarrow y=\frac{6}{2}=\boxed{y=3}$

سؤال وزاري 2010/د1: جد قيمة $\left(\frac{\sqrt{2}}{w}+3\sqrt{2}w+\sqrt{2}\right)^2\left(\frac{1}{w}+4w+1\right)$.

الحل/

$$=\left(\frac{\sqrt{2}w^3}{w}+3\sqrt{2}w+\sqrt{2}\right)^2\left(\frac{w^3}{w}+4w+1\right)$$

$$=\left(\sqrt{2}w^2+3\sqrt{2}w+\sqrt{2}\right)^2(w^2+4w+1)$$

$$=\left[\sqrt{2}(w^2+1)+3\sqrt{2}w\right]^2\ \left[(w^2+1)+4w\right]$$

$$=\left(-\sqrt{2}w+3\sqrt{2}w\right)^2(-w+4w)$$

$$=\left(2\sqrt{2}w\right)^2(3w)\ \Rightarrow\ (8w^2)(3w)=24w^3=\boxed{24}$$

سؤال وزاري 2010/د2: جد الجذرين التربيعيين للعدد المركب z حيث $z=(-1+7i)(1+i)$

الحل/

$$z=-1-i+7i+7i^2=-8+6i$$

نفرض $\sqrt{-8+6i}=x+yi \xrightarrow{\text{بالتربيع}} -8+6i=(x^2-y^2)+2xyi$

$$x^2-y^2=-8\ \ldots\ldots\ldots(1)\quad ,\quad 2xy=6\Rightarrow xy=3\Rightarrow y=\frac{3}{x}\ \ldots\ldots(2)$$

$$x^2-\left(\frac{3}{x}\right)^2=-8\ \Rightarrow\ x^2-\frac{9}{x^2}=-8\ \xrightarrow{(.x^2)}\ x^4-9=-8x^2\ \Rightarrow\ x^4+8x^2-9=0$$

$$\Rightarrow\ (x^2+9)(x^2-1)=0$$

أما $x^2+9=0$ يهمل

أو $x^2-1=0\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\begin{cases}1\Rightarrow y=3\\-1\Rightarrow y=-3\end{cases}$

$$\therefore\ \sqrt{-8+6i}=\begin{cases}1+3i\\-1-3i\end{cases}$$

سؤال وزاري 2010/د2: أكتب المعادلة التربيعية التي جذراها $\frac{w}{1+2w}$, $\frac{w^2}{1+2w^2}$.

الحل/

$$\text{مجموع الجذرين} = \frac{w^2}{1+2w^2} + \frac{w}{1+2w} = \frac{w^2(1+2w)+w(1+2w^2)}{(1+2w^2)(1+2w)}$$

$$= \frac{w^2+2w^3+w+2w^3}{1+2w+2w^2+4w^3}$$

$$= \frac{w^2+2+w+2}{1+2w+2w^2+4} = \frac{4+(w^2+w)}{5+2(w+w^2)} = \frac{4-1}{5-2} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\text{حاصل ضرب الجذرين} = \frac{w^2}{1+2w^2} \times \frac{w}{1+2w} = \frac{w^3}{1+2w+2w^2+4w^3} = \frac{1}{5+2(w+w^2)} = \frac{1}{3}$$

$\therefore\ x^2 - x + \frac{1}{3} = 0$ المعادلة التربيعية

سؤال وزاري 2012/د1: إذا كان $\frac{5}{x+yi}$, $\frac{2+i}{3-i}$ **مترافقين، جد قيمتي y ، x الحقيقيتين.**

الحل/

$$\frac{5}{x+yi} = \frac{2-i}{3+i} \Rightarrow (2-i)(x+yi) = 15+5i \Rightarrow x+yi = \frac{15+5i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i}$$

$$\Rightarrow x+yi = \frac{30+15i+10i+5i^2}{4+1} \Rightarrow x+yi = \frac{25+25i}{5}$$

$$\Rightarrow x+yi = 5+5i \qquad \Rightarrow \boxed{x=5}\ ,\ \boxed{y=5}$$

سؤال وزاري 2012/د2: ضع بالصيغة العادية للعدد المركب المقدار : $(1+i)^5 + (1-i)^5$

الحل/

$$(1+i)^5 - (1-i)^5 = [(1+i)^2]^2(1+i) - [(1-i)^2]^2(1-i)$$
$$= (1+2i+i^2)^2(1+i) - (1-2i+i^2)^2(1-i)$$
$$= (2i)^2(1+i) - (-2i)^2(1-i)$$
$$= (-4)(1+i) - (-4)(1-i)$$
$$= -4-4i+4-4i = -8i = 0-8i$$

سؤال وزاري 2013/د1: جد قيمة : $(1-i)(1-i^2)(1-i^3)$

الحل/ هذا السؤال محلول في الصفحة (13) بصيغة أثبت $(1-i)(1-i^2)(1-i^3) = 4$

$$(1-i)(1-i^2)(1-i^3) = (1-i)(1+1)[1-(-i)] = (1-i)(2)[1+i]$$

$$= (1-i)(2+2i) = 2+2i-2i-2i^2 = 2-2i^2 = 2+2 = 4$$

سؤال وزاري 2013/د3:

أذا كان $(Z_1 = 3+4i)$, $(Z_2 = 5+2i)$ وضح في شكل أرجاند $Z_1 + Z_2$

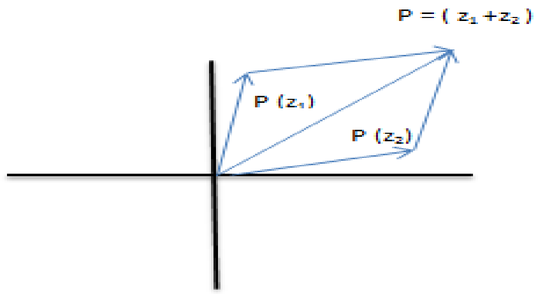
الحل/

$$Z_1 = 3 + 4i \quad \Rightarrow \quad p(Z_1) = (3,4)$$

$$Z_2 = 5 + 2i \quad \Rightarrow \quad p(Z_2) = (5,2)$$

$$Z_1 + Z_2 = Z_3 = (3 + 4i) + (5 + 2i)$$

$$Z_3 = 8 + 6i \quad \Rightarrow \quad p(Z_3) = (8,6)$$



سؤال وزاري 2014/د1: جد الصيغة القطبية للجذور الخمسة للمقدار : $\sqrt[5]{(\sqrt{3}+i)^2}$

$$let\ Z = \sqrt{3} + i \quad \Rightarrow \quad r = mod\, Z = \|Z\| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\|Z\|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{1}{2} \qquad \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$Z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow Z^2 = 2^2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^2 \Rightarrow Z^2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$(Z^2)^{\frac{1}{5}} = 4^{\left(\frac{1}{5}\right)}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{4}\left(\cos\left[\frac{\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi}{5}\right] + i\sin\left[\frac{\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi}{5}\right]\right)$$

$$\sqrt[5]{z^2} = \sqrt[5]{4}\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi + 6k\pi}{3}}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi + 6k\pi}{3}}{5}\right)\right]$$

$$\sqrt[5]{z^2} = \sqrt[5]{4}\left[\cos\left(\frac{\pi + 6k\pi}{15}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 6k\pi}{15}\right)\right] \qquad k = 0,1,2,3,4$$

$$if \quad k = 0 \quad \Rightarrow Z_1 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right)$$

$$if \quad k = 1 \quad \Rightarrow Z_2 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{7\pi}{15} + i\sin\frac{7\pi}{15}\right)$$

$$if \quad k = 2 \quad \Rightarrow Z_3 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{13\pi}{15} + i\sin\frac{13\pi}{15}\right)$$

$$if \quad k = 3 \quad \Rightarrow Z_4 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{19\pi}{15} + i\sin\frac{19\pi}{15}\right)$$

$$if \quad k = 4 \quad \Rightarrow Z_5 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{25\pi}{15} + i\sin\frac{25\pi}{15}\right) = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$$

سؤال وزاري 2014/د2: اثبت ان $\left(\frac{5\omega^2 i-1}{5+i\,\omega}\right)^6 = -1$

الحل/

$$\left(\frac{5\omega^2 i-1}{5+i\,\omega}\right)^6 = \left(\frac{5\omega^2\, i-1(-i^2\cdot\omega^3)}{5+i\,\omega}\right)^6 = \left(\frac{5\omega^2\, i+i^2\cdot\omega^3}{5+i\,\omega}\right)^6 = \left(\frac{\omega^2\, i\,(\,5\,+\,i\,\omega)}{5+i\,\omega}\right)^6$$

$$= (\omega^2\;\, i)^6 \;= \omega^{12}\cdot i^2 \;= -1$$

سؤال وزاري 2014/د3: جد الصيغة القطبية للعدد المركب $Z = 5 - 5i$

الحل/

$$Mod\, z \;= \|z\| \;= r \;= \sqrt{x^2+y^2} \;= \sqrt{25+25} \;= \sqrt{50} = \;5\sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\|\,z\,\|} = \frac{5}{5\sqrt{2}} \;= \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\;\theta = \frac{y}{\|\,z\,\|} = \frac{-5}{5\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\theta \;= \;2\,\pi \;- \frac{\pi}{4} \;= \frac{7\pi}{4}$$ الربع الرابع

$$Z \;= \;5\sqrt{2}\;(\,cos\frac{7\pi}{4} + i\;sin\frac{7\pi}{4})$$

سؤال وزاري 2015/د2: عبر عن العدد بالصيغة القطبية $\frac{1-3i^2}{1-\omega i-\omega^2 i}$

الحل/

$$let\;\, Z \;= \frac{1-3i^2}{1-\omega i-\omega^2 i} = \frac{1+3}{1-i\,(\omega+\omega^2)} = \frac{4}{1+i} = \frac{4}{1+i}\times\frac{1-i}{1-i} = \frac{4-4i}{2} \;= \;2 - 2\,i$$

$$r \;= \sqrt{x^2+y^2} \;= \sqrt{(2)^2+(-2)^2} \;\;= \sqrt{4+4} \;= \sqrt{8} \;= \;2\sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \;= \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad , \quad \sin\;\,\theta \;\;= \frac{y}{r} = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

زاوية الاسناد هي $\frac{\pi}{4}$ *والسعة* θ تقع بالربع الرابع

$$arg\,(\,z\,) \;= \;\theta \;= \;2\pi \;- \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

$$z \;= \;r\,(cos\,\theta \;+\; i\;sin\,\theta\,) = \;2\,\sqrt{2}\;\left(cos\frac{7\pi}{4} \;+\; i\;sin\frac{7\pi}{4}\right)$$ الصورة القطبية

سؤال وزاري 2015/د2: اذا كان $(2-4i)$ هو أحد جذري المعادلة $2x^2 - x - bx + c - 6 = 0$ ، معاملاتها حقيقية ، جد قيمتي $b , c \in R$

الحل/ بما ان المعاملات حقيقية فان الجذران مترافقان

$$let \quad h = 2 - 4i \quad , \quad k = 2 + 4i$$

$$h + k = (2 - 4i) + (2 + 4i) = 4$$

$$h . k = (2 - 4i)(2 + 4i) = 4 + 16 = 20$$

$$x^2 - 4x + 20 = 0 \overset{(.2)}{\Longrightarrow} 2x^2 - 8x + 40 = 0$$

بالمقارنة مع $\quad 2x^2 - (1 + b)x + (c - 6) = 0$

$$1 + b = 8 \Rightarrow b = 7$$

$$c - 6 = 40 \Rightarrow c = 46$$

سؤال وزاري 2015/د3:

جد مجموعة حل المعادلة في مجموعة الأعداد المركبة بأستخدام مبرهنة ديموافر : $x^3 - 8i = 0$

الحل/

$$\because x^3 - 8i = 0 \Rightarrow x^3 = 8i \Rightarrow x^3 = 8\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$ (بالجذر التكعيبي)

$$\therefore x = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^{\frac{1}{3}} = 2\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}\right)\right]$$

$$\therefore x = 2\left[\cos\left(\frac{\frac{\pi + 4k\pi}{2}}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi + 4k\pi}{2}}{3}\right)\right] = 2\left[\cos\left(\frac{\pi + 4k\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi + 4k\pi}{6}\right)\right]$$

$k = 0, 1, 2$

$$if \quad k = 0 \Rightarrow x = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right] \Rightarrow x = \sqrt{3} + i$$

$$if \quad k = 1 \Rightarrow x = 2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] = 2\left[\frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right] \Rightarrow x = -\sqrt{3} + i$$

$$if \quad k = 1 \Rightarrow x = 2\left[\cos\left(\frac{9\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{9\pi}{6}\right)\right] = 2[0 - i] \Rightarrow x = -2i$$

∴ مجموعة الحل للمعادلة هي $\{\sqrt{3} + i \ , -2i \ , -\sqrt{3} + i\}$

سؤال وزاري 2016/د1: أثبت أن: $\left(5-\frac{5}{w^2+1}+\frac{3}{w^2}\right)^6=64$.

الحل/

$$\text{الطرف الأيمن} = \left(5-\frac{5}{w^2+1}+\frac{3}{w^2}\right)^6$$

$$=\left(5-\frac{5}{(-w)}+\frac{3}{w^2}\right)^6=\left(5+\frac{5w^3}{w}+\frac{3w^3}{w^2}\right)^6$$

$$=(5+5w^2+3w)^6=[5(1+w^2)+3w]^6$$

$$=[5(-w)+3w]^6=[-2w]^6=64w^6=64(w^3)^2=64(1)^2=64$$

سؤال وزاري 2016/د1: بأستخدام مبرهنة ديموافر ، جد الجذور التكعيبية للعدد $8i$.

الحل/

$$let\ \ Z=8i \quad \Rightarrow\ r=mod\ Z=\|Z\|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(8)^2}=8$$

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{x}{\|Z\|}=\frac{0}{8}=0 \quad ,\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{8}{8}=1 \quad \theta=\frac{\pi}{2}$$ (الربع الاول)

$$\sqrt[3]{Z}=\sqrt[3]{8i}=(8i)^{\left(\frac{1}{3}\right)}=r^{\left(\frac{1}{3}\right)}(\cos\theta+i\sin\theta)^{\left(\frac{1}{3}\right)}=(8)^{\left(\frac{1}{3}\right)}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)}$$

$$\sqrt[3]{Z}=\sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right)\right) \qquad k=0,1,2$$

$$\text{if}\ \ k=0 \quad \Rightarrow Z_1=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]=2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right]=\sqrt{3}+i$$

$$\text{if}\ \ k=1 \quad \Rightarrow Z_2=2\left[\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right]=2\left[\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right]$$

$$=2\left[-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right]=2\left[\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right]=-\sqrt{3}+i$$

$$\text{if}\ \ k=2 \quad \Rightarrow Z_3=2\left[\cos\left(\frac{9\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{9\pi}{6}\right)\right]=2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]=0+2(-i)=-2i$$

أسئلة حول الأعداد المركبة

س1/ إذا كان (a – i) أحد الجذرين التربيعين للعدد (3 + bi) حيث a، b أعداد حقيقية، جد السعة للعدد المركب $z = (a^2 - 3) - \sqrt{b^2 - 19}$

س2/ أثبت أن: $2 + \sqrt{w} - \frac{4}{w} - \frac{3}{w^2} = 5$

س3/ هل أن العددين $(1 - 6w - 2w^2), (2 - w - 5w^2)$ مترافقتان.

س4/ جد ناتج ما يلي :

(1) $\sqrt{\sqrt{w^5} + \sqrt{w^7}}$ (2) $\left(1 + \sqrt{3}\, i\right)^5 - \left(1 + \sqrt{3}\, i\right)^5$

(3) $(1 + i)^8$ (4) $(1 - i)^6$

س5/ أوجد الجدور التربيعية للعدد $5 + 12i$

س6/ أذا كان $Z = b + \sqrt{3}i$ عدد مركب مقياسه (2) ، جد قيمة b .

س7/ إذا كان $a + bi = \frac{2+i}{1-i}$ فأثبت أن $2[a^3 + b^3] = 7$

س8/ أذا كان $(1 + ai)$ هو أحد الجذور المعادلة التربيعية للعدد $(b + 4i)$ فجد قيمتي $a , b \in R$

س9/ العدد المركب $(1 - 2i)$ هو أحذ جذور المعادلة $x^2 - 2x - bx + a - 7 = 0$ فجد قيم $a, b \in R$

س10/ بأستخدام مبرهنة ديموافر ، حل المعادلة $x^2 + 27 = 0$ حيث $x \in \mathbb{C}$

س11/ حل المعادلات التالية في المجموعة $\mathbb{C}$ بطريقتين مختلفتين

(1) $x^3 - 8 = 0$ (2) $x^3 - 8i = 0$

(3) $x^3 + 64 = 0$ (4) $x^3 - 64 = 0$

س12/ أحسب بأستخدام مبرهنة ديموافر كلاً مما يأتي :

(a) $\left(\sqrt{3} - i\right)^7$ (b) $(-1 + i)^7$ (c) $(1 + i)^5$

الفصل الثاني/القطوع المخروطية

القطع المخروطي : ليكن (x_1 , y_1) نقطة ثابتة في المستوي وليكن $ax + by + c = 0$ مستقيم ثابت في المستوي نفسه لذا فان مجموعة كل النقاط التي نسبة بعد كل منها عن النقطة (x_1 , y_1) الى بعدها عن المستقيم $ax + by + c = 0$ تساوي عدد ثابت (e) تكون شكل هندسي يسمى بالقطع المخروطي أو هو مجموعة النقط التي بعدها عن نقطة معلومة يساوي بعدها عن مستقيم معلوم

حيث ان لكل شكل مخروطي عدة مفاهيم أساسية يتعين بها وهي :

① النقطة الثابتة (x_1 , y_1) تسمى بؤرة القطع المخروطي $(Focus)$

② المستقيم الثابت $ax + by + c = 0$ يسمى دليل القطع المخروطي $(Directrix)$

③ النسبة (e) تسمى بالاختلاف المركزي $(Eccentricity)$ حيث أذا كان

نوع القطع زائد $(e > 1) \Rightarrow$	نوع القطع ناقص $(e < 1) \Rightarrow$	نوع القطع مكافئ $(e = 1) \Rightarrow$

④ المسافة بين البؤرة والدليل $= |2p|$

القطع المكافئ : هو مجموعة النقط $M(x, y)$ في المستوي والتي يكون بعدها عن نقطة ثابتة $F(p, 0)$ تسمى البؤرة حيث $p \neq 0$ مساويآ دائمآ لبعدها عن مستقيم معلوم (D) والذي يسمى الدليل وهو لا يحتوي البؤرة أو بمعنى أخر هو مجموعة من النقط داخل مستوي والتي يكون بعدها عن نقطة معلومة مساويا لبعدها عن مستقيم معلوم .

معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته تنتمي لمحور السينات (x-axis) والرأس في نقطة الأصل :

باستخدام التعريف يمكن أيجاد المعادلة القياسية للقطع المكافئ بالاعتماد على قانون البعد بين نقطتين

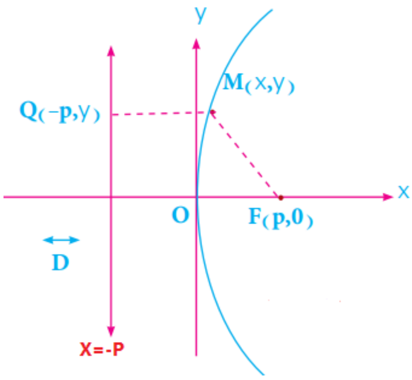
$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ (قانون البعد)

$MF = MQ$ (من تعريف القطع المكافئ)

$\sqrt{(x - p)^2 + (y - 0)^2} = \sqrt{(x + p)^2 + (y - y)^2}$ (تربيع الطرفين)

$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2 + 0$

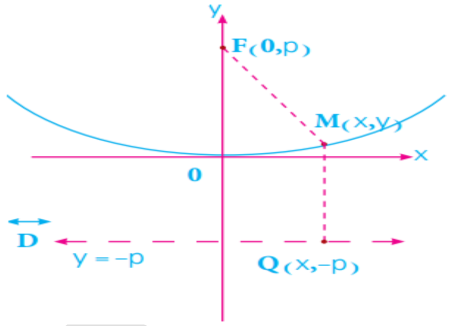
$\boxed{\therefore\ y^2 = 4px}$ $\forall p > 0$ (المعادلة القياسية للقطع المكافئ)



وهذه هي المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي بؤرته تنتمي لمحور السينات (x-axis) والرأس في نقطة الأصل حيث تسمى النقطة "O" برأس القطع المكافئ حيث بؤرته $\boxed{F(p, 0)}$ ومعادلة دليله $\boxed{x + p = 0}$ حيث $\boxed{x = -p}$ وبنفس الأسلوب يمكن أثبات $\boxed{y^2 = -4px}$

معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته تنتمي لمحور الصادات (y-axis) والرأس في نقطة الأصل :

باستخدام التعريف يمكن أيجاد المعادلة القياسية للقطع المكافئ بالاعتماد على قانون البعد بين نقطتين



$\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ (قانون البعد)

$MF = MQ$ (من تعريف القطع المكافئ)

$\sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2}$ (تربيع الطرفين)

$x^2+y^2-2py+p^2 = y^2+2py+p^2$

$\boxed{\therefore\ x^2 = 4py}$ $\forall p > 0$ (المعادلة القياسية للقطع المكافئ)

وهذه هي المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي بؤرته تنتمي لمحور الصادات ($y-\text{axis}$)والرأس في نقطة الأصل حيث تسمى النقطة "O" برأس القطع المكافئ حيث بؤرته $\boxed{F(0,p)}$ ومعادلة دليله $\boxed{y+p=0}$ حيث $\boxed{y=-p}$ وبنفس الأسلوب يمكن أثبات $\boxed{x^2=-4py}$

نلاحظ مما سبق انه يوجد معادلتين للقطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل $(0,0)$ أحداهما عندما يكون على المحور السيني والأخرى عندما يكون على المحور الصادي والجدول أدناه يوضح ذلك .

عندما يكون على محور السينات $(x-axis)$	عندما يكون على محور الصادات $(y-axis)$
① البؤرة تنتمي لمحور السينات ($x-axis$)	① البؤرة تنتمي لمحور الصادات ($y-axis$)
② البؤرة $\boxed{F(p,0)}$ ومعادلة الدليل $\boxed{x=-p}$	② البؤرة $\boxed{F(0,p)}$ ومعادلة الدليل $\boxed{y=-p}$
③ معادلة محور القطع هي $y=0$	③ معادلة محور القطع هي $x=0$
④ الدليل يوازي المحور الصادي	④ الدليل يوازي المحور السيني
⑤ التناظر حول محور السينات	⑤ التناظر حول محور الصادات
⑥ المحور السيني ينصف الدليل	⑥ المحور الصادي ينصف الدليل
⑦ القانون $\boxed{y^2=4px}$	⑦ القانون $\boxed{x^2=4py}$

ملاحظات عامة :

1. أشاره البؤرة عكس أشاره الدليل والعكس صحيح
2. المسافة بين البؤرة والدليل = 2p
3. كل نقطة تنتمي للقطع المكافئ فهي تحقق معادلته (أي أن القطع المكافئ يمر بها)
4. كل نقطة تنتمي للقطع المكافئ بعدها عن البؤرة يساوي بعدها عن الدليل
5. رأس القطع المكافئ هو نقطة الاصل ومعادلة المميز الخاصة به هي $(b^2-4ac=0)$
6. الجدول أدناه يوضح تفاصيل أكثر عن معادلات القطع المكافئ

التناظر	أتجاه القطع	المحور	الدليل	البؤرة	المعادلة
x-axis	اليمين	x-axis	$x=-p$	$(p,0)$	$y^2=4px$
x-axis	اليسار	x-axis	$x=p$	$(-p,0)$	$y^2=-4px$
y-axis	الأعلى	y-axis	$y=-p$	$(0,p)$	$x^2=4py$
y-axis	الأسفل	y-axis	$y=p$	$(0,-p)$	$x^2=-4py$

مثال (1)/ جد البؤرة ومعادلة دليل القطع المكافئ $y^2 = -8x$

الحل /

$\because \ y^2 = -8x$

$y^2 = -4px$ (بالمقارنة مع المعادلة القياسية)

$\Rightarrow 4p = 8 \quad \Rightarrow p = \frac{8}{4} \quad \Rightarrow \boxed{p = 2}$

$F(-p, 0) = F(-2, 0)$ البؤرة

$x = p \quad \Rightarrow \boxed{x = 2}$ معادلة الدليل

مثال (2)/ جد معادلة القطع المكافئ أذا علم : أ) بؤرته (3,0) والرأس في نقطة الأصل .
ب) معادلة الدليل $2x - 6 = 0$ ورأسه في نقطة الأصل .

الحل / أ)

$\because \ (p, 0) = (3, 0)$ البؤرة

$\therefore \ p = 3 \quad \Rightarrow y^2 = 4px$ (المعادلة القياسية للقطع المكافئ)

$\therefore \ y^2 = 4(3)x \quad \Rightarrow \boxed{y^2 = 12x}$ معادلة القطع المكافئ

ب)

$\because \ 2x - 6 = 0$ معادلة الدليل

$\therefore \ 2x = 6 \quad \Rightarrow x = 3$

$\therefore \ p = 3 \quad \Rightarrow y^2 = -4px$

$\therefore \ y^2 = -4(3)x \quad \Rightarrow \boxed{y^2 = -12x}$ معادلة القطع المكافئ

مثال (3)/ جد بؤرة ومعادلة دليل القطع المكافئ $y^2 = 4x$ ثم أرسمه

الحل /

$\because \ y^2 = 4x$ (بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع المكافئ)

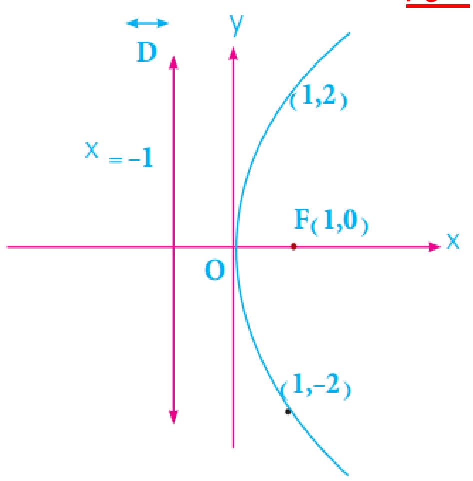
$y^2 = 4px$

$\Rightarrow 4p = 4 \quad \Rightarrow p = \frac{4}{4} \quad \Rightarrow \boxed{p = 1}$

$F(p, 0) = F(1, 0)$ البؤرة

$x = -p \quad \Rightarrow \boxed{x = -1}$ معادلة الدليل

$y^2 = 4px = 4(1)x = 4x \quad \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{x}$



x	0	1	2
y	0	± 2	$\pm 2\sqrt{x}$

مثال (4)/ بأستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ أذا علم أن بؤرته $(\sqrt{3}\,,0)$ والرأس في نقطة الأصل .

الحل / البؤرة $F(\sqrt{3}\,,0)$ ولتكن النقطة $M(x,y)$ نقطة تنتمي الى منحني القطع المكافئ ولتكن النقطة $Q(-\sqrt{3}\,,y)$ هي نقطة تقاطع العمود المرسوم من (M) على الدليل $\overleftrightarrow{D}$ فمن تعريف القطع المكافئ

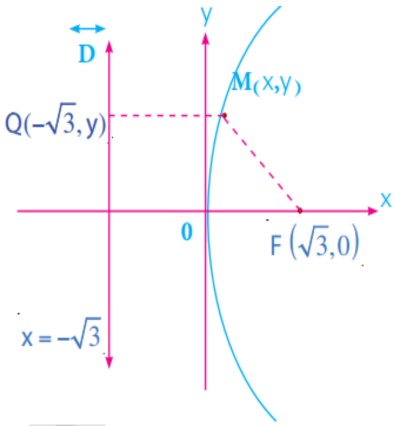
$MF = MQ$ (من تعريف القطع المكافئ)

$\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+(y-0)^2} = \sqrt{(x+\sqrt{3})^2+(y-y)^2}$ (تربيع الطرفين)

$(x-\sqrt{3}\,)^2 + y^2 = (x+\sqrt{3}\,)^2$

$x^2 - 2\sqrt{3}\,x + 3 + y^2 = x^2 + 2\sqrt{3}\,x + 3$

$y^2 = 4\sqrt{3}\,x$ معادلة القطع المكافئ



مثال (5)/ جد البؤرة ومعادلة دليل القطع المكافئ $3x^2 - 24y = 0$

الحل /

$\because\ 3x^2 - 24y = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = 24y$ (نقسم طرفي المعادلة على 3)

$x^2 = 8y$

$x^2 = 4py$ (بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع المكافئ)

$\Rightarrow\ 4p = 8 \quad \Rightarrow\ p = \frac{8}{4} \quad \Rightarrow \boxed{p = 2}$

$F(0,p) = F(0,2)$ البؤرة

$y = -p \quad \Rightarrow \boxed{y = -2}$ معادلة الدليل

مثال (6)/ جد معادلة القطع المكافئ أذا علم : أ) بؤرته $(0,5)$ ورأسه في نقطة الأصل .
ب) معادلة الدليل $y = 7$ ورأسه في نقطة الأصل .

الحل / أ)

$\because\ (0,p) = (0,5)$ البؤرة

$\therefore\ p = 5 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4py$ (المعادلة القياسية للقطع المكافئ)

$x^2 = 4(5)y \quad \Rightarrow \boxed{x^2 = 20y}$ معادلة القطع المكافئ

ب)

$\because\ y = 7$ (بالمقارنة مع معادلة الدليل)

$\therefore\ p = 7 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -4py$ (المعادلة القياسية للقطع المكافئ)

$x^2 = -4(7)y \quad \Rightarrow \boxed{y^2 = -28y}$ معادلة القطع المكافئ

مثال (7)/ جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(2\ ,4)\ ,(2\ ,-4)$ ورأسه نقطة الأصل

الحل/ $\because$ النقطتان متناظرتان حول محور السينات (لأن قيمة x ثابتة لم تتغير)

$\therefore$ المعادلة القياسية للقطع المكافئ هي $y^2 = 4px$

$\therefore$ نعوض أحدى النقطتين اللتين تحققان معادلة القطع المكافئ لأنه يمر بها ولتكن النقطة $(2\ ,4)$

$(4)^2 = 4p(2) \Rightarrow 16 = 8p \Rightarrow p = \frac{16}{8} \Rightarrow \boxed{p = 2}$

$y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 4(2)x \Rightarrow \boxed{y^2 = 8x}$ معادلة القطع المكافئ

مثال (8)/ جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر دليل القطع المكافئ بالنقطة $(3\ ,-5)$

الحل/ يوجد أحتمالين للمعادلة القياسية للقطع المكافئ لعدم تحديد البؤرة ، والاحتمالين هما :

أولا : البؤرة تنتمي لمحور الصادات

$x^2 = 4py$ (المعادلة القياسية للقطع المكافئ)

$y = -5$ (معادلة الدليل)

$p = 5$

$\because\ x^2 = 4py \Rightarrow x^2 = 4(5)y$

$\boxed{x^2 = 20x}$ معادلة القطع المكافئ

ثانيا : البؤرة تنتمي لمحور السينات

$y^2 = 4px$ (المعادلة القياسية للقطع المكافئ)

$x = 3$ (معادلة الدليل)

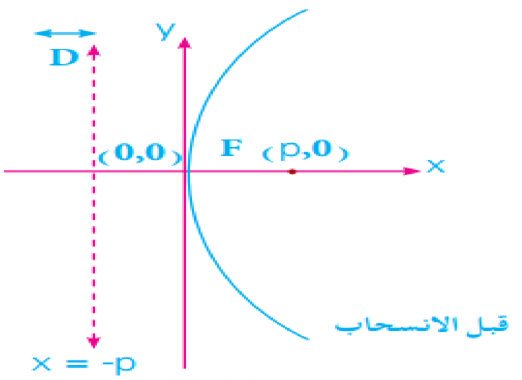
$p = -3$

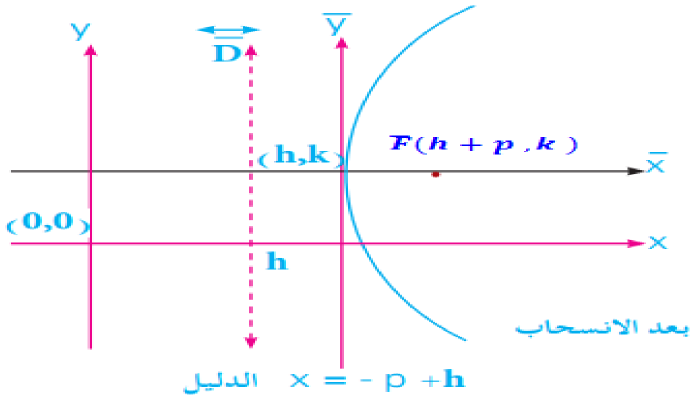
$\because\ y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 4(-3)y$

$\boxed{y^2 = -12x}$ معادلة القطع المكافئ

انسحاب المحاور للقطع المكافئ:

① المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي رأسه النقطة (h, k) ومحوره يوازي محور السينات $(x - axis)$

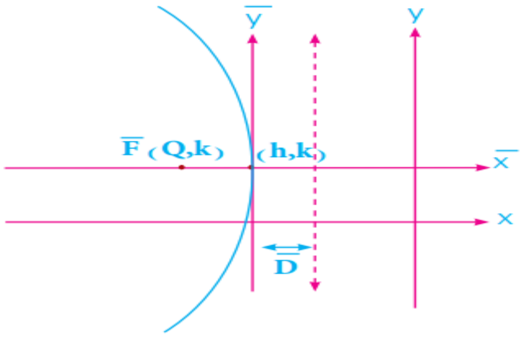




العنصر	قبل الانسحاب	بعد الانسحاب
البؤرة	$F(p, 0)$	$\bar{F}(h + p, k)$
الدليل	$x = -p$	$x = -p + h$
المحور	$y = 0$	$y = k$
القانون	$y^2 = 4px$	$(y - k)^2 = 4p(x - h)$

رحلة التفوق في السادس

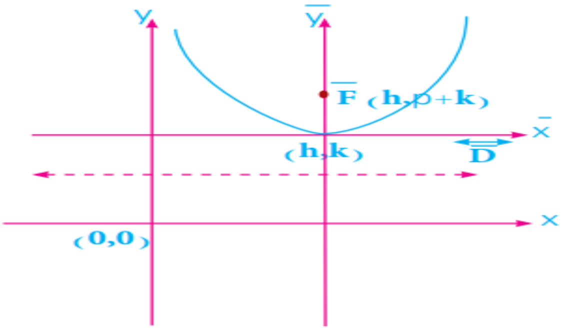
ويمكن أن تكون فتحة القطع المكافئ بالاتجاه السالب لمحور السينات لاحظ الرسم أدناه والقوانين الخاصة :



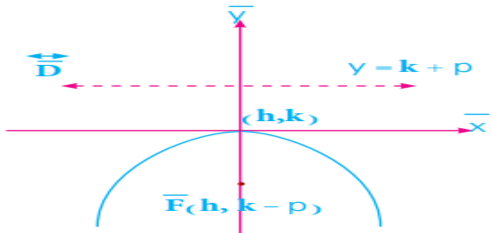
العنصر	قبل الانسحاب	بعد الانسحاب
البؤرة	$F(-p,0)$	$\bar{F}(h-p,k)$
الدليل	$x=p$	$x=p+h$
المحور	$y=0$	$y=k$
القانون	$y^2=-4px$	$(y-k)^2=-4p(x-h)$

② المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي رأسه النقطة (h,k) ومحوره يوازي محور الصادات $(y-axis)$

العنصر	قبل الانسحاب	بعد الانسحاب
البؤرة	$F(0,p)$	$\bar{F}(h,k+p)$
الدليل	$y=-p$	$y=-p+k$
المحور	$x=0$	$x=h$
القانون	$x^2=4py$	$(x-h)^2=4p(y-k)$



ويمكن أن تكون فتحة القطع المكافئ بالاتجاه الأسفل لمحور الصادات لاحظ الرسم أدناه والقوانين الخاصة :



العنصر	قبل الانسحاب	بعد الانسحاب
البؤرة	$F(0,-p)$	$\bar{F}(h,k-p)$
الدليل	$y=p$	$y=p+k$
المحور	$x=0$	$x=h$
القانون	$x^2=-4py$	$(x-h)^2=-4p(y-k)$

والجدول أدناه يوضح الفروق بين المعادلات بين كلا المحورين

عندما يكون على محور السينات $(x-axis)$	عندما يكون على محور الصادات $(y-axis)$
① البؤرة $F(p+h,k)$ ومعادلة الدليل $x=-p+h$	① البؤرة $F(h,p+k)$ ومعادلة الدليل $y=-p+k$
② الدليل يوازي المحور الصادي	② الدليل يوازي المحور السيني
③ الرأس والبؤرة يقعان على الأحداثي السيني	③ الرأس والبؤرة يقعان على الأحداثي الصادي
④ الرأس $V(h,k)$	④ الرأس $V(h,k)$
⑤ القانون $(y-k)^2=4p(x-h)$	⑤ القانون $(x-h)^2=4p(y-k)$
⑥ معادلة المحور $y=k$	⑥ معادلة المحور $x=h$

ملاحظة :

الرأس هو منتصف البعد بين البؤرة والدليل أي أن $x_{(\text{الرأس})} = \frac{X_{(\text{البؤرة})} + X_{(\text{دليله})}}{2}$ وكذلك $y_{(\text{الرأس})} = \frac{Y_{(\text{البؤرة})} + Y_{(\text{دليله})}}{2}$

مثال (9)/ من معادلة القطع المكافئ $(y+1)^2 = 4(x-2)$ عين الرأس ، البؤرة ، معادلة المحور ، معادلة الدليل

الحل/ بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع المكافئ $(y-k)^2 = 4p(x-h)$ نحصل على

$\boxed{h=2}\ ,\ \boxed{k=-1} \Rightarrow (h,k) = (2,-1)$ الرأس

$\because\ 4p = 4 \Rightarrow \boxed{p=1} \Rightarrow F(p+h,k) = F(1+2,-1) = F(3,-1)$ البؤرة

$\because\ y = k \Rightarrow \boxed{y=-1}$ معادلة المحور

$\because\ x = -p+h \Rightarrow x = -1+2 \Rightarrow \boxed{x=1}$ معادلة الدليل

مثال (10)/ ناقش القطع المكافئ $y = x^2 + 4x$

الحل/ نضيف (4) الى طرفي معادلة القطع المكافئ حتى تكون حدود(x) بشكل مربع كامل

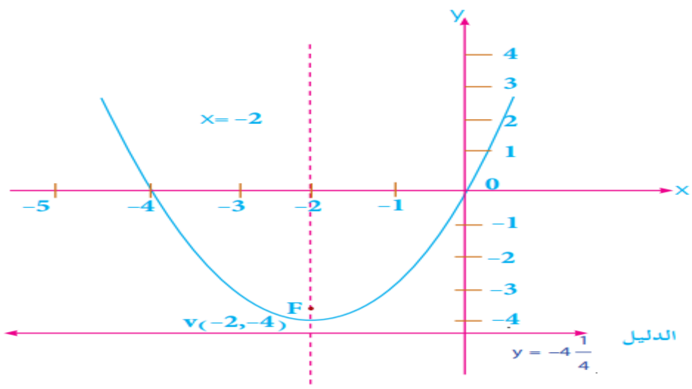
$y + 4 = x^2 + 4x + 4 \Rightarrow y + 4 = (x+2)^2$ (بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع المكافئ)

$(x-h)^2 = 4p(y-k) \Rightarrow \boxed{h=-2}\ ,\ \boxed{k=-4} \Rightarrow (h,k) = (-2,-4)$ الرأس

$\because\ 4p = 1 \Rightarrow \boxed{p = \frac{1}{4}} \Rightarrow F(h, p+k) = F\left(-2, \frac{1}{4} - 4\right) = F\left(-2, \frac{-15}{4}\right) = F\left(-2, -3\frac{3}{4}\right)$ البؤرة

$\because\ x = h \Rightarrow \boxed{x=-2}$ معادلة المحور

$\because\ y = -p+k \Rightarrow y = \frac{-1}{4} - 4 = \frac{-1-16}{4} \Rightarrow y = \frac{-17}{4} \Rightarrow \boxed{y = -4\frac{1}{4}}$ معادلة الدليل



تمارين(1 − 2)

س 1 / جد المعادلة للقطع المكافئ في كل مما يأتي ثم أرسم المنحني البياني لها :

(أ) البؤرة $(5,0)$ والرأس في نقطة الأصل

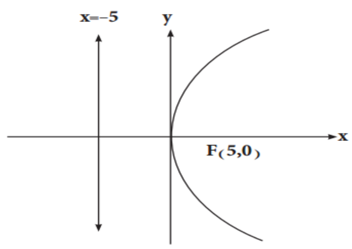
الحل/

$\mathbf{F(5,0)}$

$p = 5 \Rightarrow x = -5$ معادلة الدليل

$y^2 = 4px \Rightarrow y^2 = 4(5)x \Rightarrow y^2 = 20x$ المعادلة القياسية

x	0	1	2
y	0	$\pm 2\sqrt{5}$	$\pm 2\sqrt{10}$



(ب) البؤرة $(0,-4)$ والرأس في نقطة الأصل

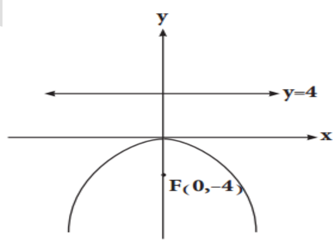
الحل/

$\mathbf{F(0,-4)}$

$p = 4 \Rightarrow y = 4$ معادلة الدليل

$x^2 = -4py \Rightarrow x^2 = -4(4)y \Rightarrow x^2 = -16y$ المعادلة القياسية

x	0	± 4	$\pm 4\sqrt{2}$
y	0	-1	-2



(ج) البؤرة $(0,\sqrt{2})$ والرأس في نقطة الأصل

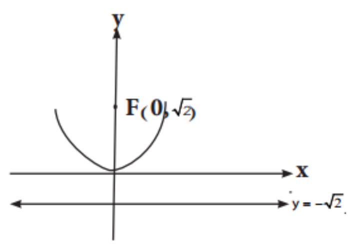
الحل/

$\mathbf{F(0,\sqrt{2})}$

$p = \sqrt{2} \Rightarrow y = -\sqrt{2}$ معادلة الدليل

$x^2 = 4py \Rightarrow x^2 = 4(\sqrt{2})y$ المعادلة القياسية

x	0	$\pm 2\sqrt{\sqrt{2}}$	$\pm 2\sqrt{2}$
y	0	1	$\sqrt{2}$



(د) معادلة دليل القطع المكافئ $4y+3=0$ والرأس في نقطة الأصل

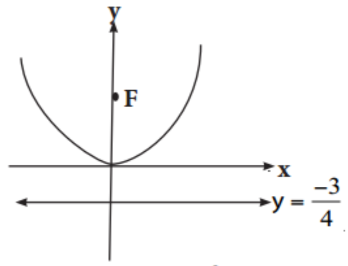
الحل/

$4y+3=0 \quad \Rightarrow 4y=-3 \quad \Rightarrow \boxed{y=\frac{-3}{4}}$ معادلة الدليل

$y=-p \quad \Rightarrow \quad p=\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad F\left(0,\frac{3}{4}\right)$ البؤرة

$x^2=4py \quad \Rightarrow x^2=4\left(\frac{3}{4}\right)y \quad \Rightarrow x^2=3y$ المعادلة القياسية

x	0	$\pm\sqrt{3}$	$\pm\sqrt{6}$
y	0	1	2



س 2 / في كل مما يأتي جد البؤرة والرأس ومعادلتي المحور والدليل للقطع المكافئ :

$(a)\ \ x^2=4y$

الحل/

$\because\ 4p=4 \quad \Rightarrow \boxed{p=1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F(0,1)}$ البؤرة

$\therefore\ \boxed{x=0}$ (معادلة المحور) $\boxed{y=-1}$ (معادلة الدليل) $\boxed{V(0,0)}$ الرأس

$(b)\ \ 2x+16y^2=0$

الحل/

$\because\ 16y^2=-2x \quad \Rightarrow y^2=\frac{-1}{8}x \quad \Rightarrow 4p=\frac{1}{8} \quad \Rightarrow \boxed{p=\frac{1}{32}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F\left(\frac{-1}{32},0\right)}$ البؤرة

$\boxed{y=0}$ (معادلة المحور) $\boxed{x=\frac{1}{32}}$ (معادلة الدليل) $\boxed{V(0,0)}$ الرأس

$(c)\ \ y^2=-4(x-2)$

الحل/ بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع المكافئ $(y-k)^2=-4p(x-h)$ نحصل على

$\boxed{h=2}\ ,\ \boxed{k=0} \quad \Rightarrow \quad \bar{V}(h,k)=\bar{V}(2,0)$ الرأس

$\because\ -4p=-4 \quad \Rightarrow \boxed{p=1} \quad \Rightarrow \bar{F}(-p+h,k)=\bar{F}(-1+2\ ,0)=\bar{F}(\ 1,0)$ البؤرة

$\because\ \ y=k \quad \Rightarrow \quad \boxed{y=0}$ معادلة المحور

$\because\ \ x=p+h \quad \Rightarrow \quad x=1+2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=3}$ معادلة الدليل

$(d)\ \ (x-1)^2 = 8(y-1)$

الحل/ بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع المكافئ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ نحصل على

$\boxed{h=1}\ ,\ \boxed{k=1} \Rightarrow \bar{V}(h,k) = \bar{V}(1,1)$ الرأس

$\because\ 4p = 8 \Rightarrow \boxed{p=2} \Rightarrow \bar{F}(h, p+k) = \bar{F}(1, 2+1) = \bar{F}(1\ ,3)$ البؤرة

$\because\ x = h \Rightarrow \boxed{x = 1}$ معادلة المحور

$\because\ y = -p + k \Rightarrow y = -2+1 \Rightarrow \boxed{y = -1}$ معادلة الدليل

وزاري 2012 / د1

$(e)\ \ y^2 + 4y + 2x = -6$

الحل/ نرتب المعادلة بحيث تكون حدود (y) في طرف وحدود (x) في الطرف الأخر $(y^2 + 4y = -2x - 6)$

نضيف (4) الى طرفي معادلة القطع المكافئ حتى تكون حدود (y) بشكل مربع كامل

$y^2 + 4y + 4 = -2x - 6 + 4 \Rightarrow (y+2)^2 = -2x - 2$

$(y+2)^2 = -2(x+1)$ معادلة القطع المكافئ

بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع المكافئ $(y-k)^2 = -4p(x-h)$ نحصل على

$\boxed{h=-1}\ ,\ \boxed{k=-2} \Rightarrow \bar{V}(h,k) = \bar{V}(-1,-2)$ الرأس

$\because\ -4p = -2 \Rightarrow \boxed{p = \frac{1}{2}} \Rightarrow \bar{F}(-p+h, k) = \bar{F}\left(\frac{-1}{2} - 1\ , -2\right) = \bar{F}\left(\frac{-3}{2}, -2\right)$ البؤرة

$\because\ y = k \Rightarrow \boxed{y = -2}$ معادلة المحور

$\because\ x = p + h \Rightarrow x = \frac{1}{2} - 1 \Rightarrow \boxed{x = \frac{-1}{2}}$ معادلة الدليل

$(f)\ x^2+6x-y=0$

الحل/ نرتب المعادلة بحيث تكون حدود (y) في طرف وحدود (x) في الطرف الأخر $(x^2+6x=y)$

نضيف (9) الى طرفي معادلة القطع المكافئ حتى تكون حدود(x) بشكل مربع كامل

$x^2+6x+9=y+9 \quad \Rightarrow \quad (x+3)^2=(y+9)$ معادلة القطع المكافئ

بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع المكافئ $(x-h)^2=4p(y-k)$ نحصل على

$\boxed{h=-3}\ ,\ \boxed{k=-9} \quad \Rightarrow \bar{V}(h,k)=\bar{V}(-3,-9)$ الرأس

$\because\ 4p=1 \quad \Rightarrow \boxed{p=\frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \bar{F}(h,p+k)=\bar{F}\left(-3,\frac{1}{4}-9\right)=\bar{F}\left(-3,\frac{-35}{4}\right)$ البؤرة

$\because\ x=h \quad \Rightarrow$ $\boxed{x=-3}$ معادلة المحور

$\because\ y=-p+k \quad \Rightarrow y=\frac{-1}{4}-9=\frac{-1-36}{4} \quad \Rightarrow$ $\boxed{y=\frac{-37}{4}}$ معادلة الدليل

س 3 / جد معادلة القطع المكافئ المار بالنقطتين $(2,5)$, $(2,-5)$ والرأس في نقطة الأصل

الحل/ $\because$ النقطتان متناظرتان حول المحور السيني $\therefore$ البؤرة تنتمي لمحور السينات والقانون $(y^2=4px)$

$\therefore$ النقطتان تحققان المعادلة لان القطع المكافئ يمر بهما لذا نأخذ النقطة $(2,5)$ ونعوضها في المعادلة القياسية

$(5)^2=4p(2) \quad \Rightarrow 25=8p \quad \Rightarrow \boxed{p=\frac{25}{8}}$

$y^2=4px=4\left(\frac{25}{8}\right)x \quad \Rightarrow$ $\boxed{y^2=\frac{25}{2}x}$ معادلة القطع المكافئ

س 4 / أذا كان دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة $(-3,4)$ والرأس في نقطة الأصل جد معادلته علما أن بؤرته تنتمي لأحد المحورين

الحل/ $\because$ الدليل يمر بالنقطة $(-3,4)$ $\therefore$ هناك دليلان هما الأول $(x=-3)$ والثاني $(y=4)$

$\therefore$ هناك قطعان مكافئان

القطع المكافئ الأول (البؤرة تنتمي لمحور السينات)

$\because\ x=-3 \ \Rightarrow \boxed{p=3}$

$\therefore\ y^2=4px$ القانون

$y^2=4(3)x \quad \Rightarrow y^2=12x$

القطع المكافئ الثاني (البؤرة تنتمي لمحور الصادات)

$\because\ y=4 \ \Rightarrow \boxed{p=4}$

$\therefore\ x^2=-4py$ القانون

$x^2=-4(4)y \quad \Rightarrow x^2=-16y$

س 5 / قطع مكافئ معادلته $Ax^2 + 8y = 0$ يمر بالنقطة $(1, 2)$ جد قيمة A ثم جد بؤرته ودليله ثم أرسم القطع

وزاري 2011 / د1

الحل/ ∵ القطع المكافئ يمر بالنقطة $(1, 2)$

∴ النقطة $(1, 2)$ تحقق معادلة القطع المكافئ $(Ax^2 + 8y = 0)$

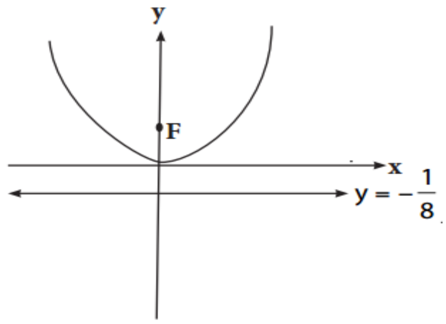
$A(1)^2 + 8(2) = 0 \Rightarrow \boxed{A = -16} \Rightarrow -16x^2 + 8y = 0 \quad (\div -16)$

$x^2 - \frac{1}{2}y = 0 \Rightarrow \boxed{x^2 = \frac{1}{2}y}$ (بالمقارنة مع المعادلة القياسية $x^2 = 4py$)

$4p = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{p = \frac{1}{8}}$

البؤرة $F(0, p) = F\left(0, \frac{1}{8}\right)$ معادلة الدليل $\boxed{y = \frac{-1}{8}}$

x	y
0	0
$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
± 1	2



س 6 / باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ :

(أ) البؤرة $(7, 0)$ والرأس في نقطة الأصل

الحل/

$p = 7 \Rightarrow x = -7$ معادلة الدليل

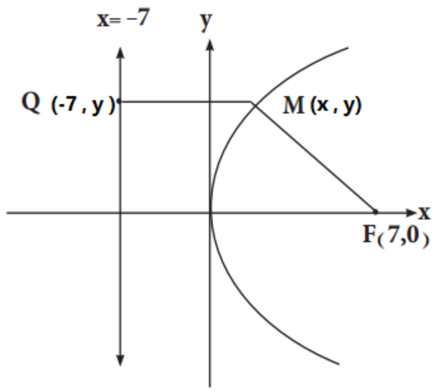
$MF = MQ$ (تعريف القطع المكافئ)

$\sqrt{(x-7)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+7)^2 + (y-y)^2}$ (بتربيع الطرفين)

$(x-7)^2 + (y-0)^2 = (x+7)^2$

$x^2 - 14x + 49 + y^2 = x^2 + 14x + 49$

$-14x + y^2 = 14x \Rightarrow \boxed{y^2 = 28x}$ (معادلة القطع المكافئ)



(ب) معادلة الدليل $y = \sqrt{3}$ والرأس في نقطة الأصل

الحل/

$y = \sqrt{3} \quad , \quad y = p \quad \Rightarrow p = \sqrt{3}$

$\therefore F(0 , -p) = F(0, -\sqrt{3})$ البؤرة

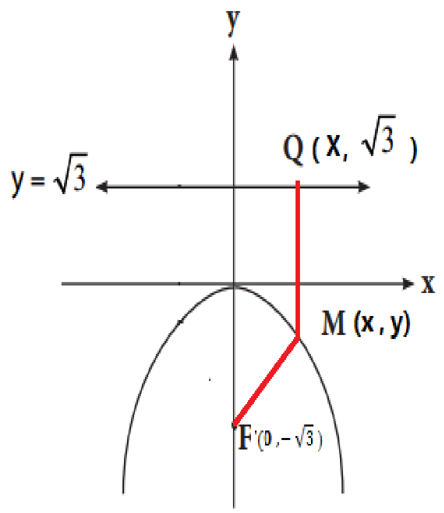
$MF = MQ$ (تعريف القطع المكافئ)

$\sqrt{(x-0)^2 + (y+\sqrt{3})^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y-\sqrt{3})^2}$ (بتربيع الطرفين)

$x^2 + (y+\sqrt{3})^2 = (y-\sqrt{3})^2$

$x^2 + y^2 + 2\sqrt{3}y + 3 = y^2 - 2\sqrt{3}y + 3$

$x^2 + 2\sqrt{3}y = -2\sqrt{3}y \quad \Rightarrow \boxed{x^2 = -4\sqrt{3}y}$ (معادلة القطع المكافئ)



****

أمثلة أضافية محلولة

مثال / جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقط $(-13, -10)$, $(11, -10)$ والذي رأسه $(-1, 2)$

الحل / قيمة المحور الصادي للنقطتين ثابتة وهذا يدل على أن محور التماثل هو (x)

$\therefore x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-13 + 11}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \quad \Rightarrow \boxed{x = -1}$

نلاحظ أن محور التماثل يوازي المحور الصادي وهذا يعني أن القانون هو $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

$\therefore \boxed{(x+1)^2 = 4p(y-2) \quad \text{صيغة معادلة القطع المكافئ}}$

النقطة $(11, -10) \in$ للقطع المكافئ لذا فهي تحقق معادلته

$(12)^2 = 4p(-12) \quad \Rightarrow 12 = -4p \quad \Rightarrow \boxed{p = -3}$ (الفتحة الى الأسفل)

$\therefore (x+1)^2 = 4(-3)(y-2) \quad \Rightarrow \boxed{(x+1)^2 = -12(y-2) \quad \text{معادلة القطع المكافئ}}$

مثـال / النـقط $(0,0)$, $(4,-6)$, $(-12,-6)$ تنتمـي للقطـع المكـافئ $(y = ax^2 + bx + c)$ جـد أحـداثي البؤرة ومعادلة الدليل والرأس والبعد البؤري

الحل / $\because$ النقطة $(0,0) \in$ للقطع المكافئ لذا فهي تحقق معادلته

$0 = 0 + 0 + c \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = 0}$

$\because$ النقطة $(4,-6) \in$ للقطع المكافئ لذا فهي تحقق معادلته

$-6 = 16a + 4b + c \quad] \ (\div 2) \quad \Rightarrow \quad 8a + 2b = -3 \quad$ (معادلة ①)

$\because$ النقطة $(-12,-6) \in$ للقطع المكافئ لذا فهي تحقق معادلته

$-6 = 144a - 12b \quad] \ (\div 6) \quad \Rightarrow \quad 24a - 2b = -1 \quad$ (معادلة ②)

نحل المعادلتين حلا أنيا فنحصل على :

$32a = -4 \quad \Rightarrow \boxed{a = \frac{-1}{8}} \quad \Rightarrow 8\left(\frac{-1}{8}\right) + 2b = -3 \quad \Rightarrow -1 + 2b = -3 \quad \Rightarrow 2b = -2 \quad \Rightarrow \boxed{b = -1}$

$\therefore y = \frac{-1}{8}x^2 - x \quad \Rightarrow \quad 8y = -x^2 - 8x \quad \Rightarrow \quad \boxed{x^2 + 8x = -8y}$ معادلة القطع المكافئ

بإضافة (16) الى طرفي معادلة القطع المكافئ حتى تكون حدود(x) بشكل مربع كامل

$x^2 + 8x + 16 = -8y + 16 \quad \Rightarrow (x+4)^2 = -8y + 16 \quad \Rightarrow (x+4)^2 = -8(y-2)$

بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع المكافئ $(x-h)^2 = -4p(y-k)$ نحصل على

$\boxed{h = -4}$, $\boxed{k = 2} \quad \Rightarrow \quad \bar{V}(h,k) = \bar{V}(-4,2)$ الرأس

$\because \ -4p = -8 \quad \Rightarrow \boxed{p = 2} \quad \Rightarrow F(h, -p + k) = F(-4, -2 + 2) = F(-4, 0)$ البؤرة

$\because \quad x = h \quad \Rightarrow \boxed{x = -4}$ معادلة المحور

$\because \quad y = p + k \quad \Rightarrow y = 2 + 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 4}$ معادلة الدليل

$\therefore$ البعد البؤري $= 4p = 8$

مثال / جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويحقق الشروط التالية :

(1) بؤرته $(5,0)$

الحل/ $\because$ البؤرة تنتمي لمحور السينات $x-axis$ $\Leftarrow$ معادلة القطع المكافئ هي $y^2=4px$

$\because (p,0)=(5,0) \Rightarrow \boxed{p=5}$ $\therefore y^2=4(5)x \Rightarrow \boxed{y^2=20x}$ $\forall x>0$

(2) بؤرته $(0,3)$

الحل/ $\because$ البؤرة تنتمي لمحور الصادات $y-axis$ $\Leftarrow$ معادلة القطع المكافئ هي $x^2=4py$

$\because (0,p)=(0,3) \Rightarrow \boxed{p=3}$ $\therefore x^2=4(3)y \Rightarrow \boxed{x^2=12y}$ $\forall y>0$

(3) معادلة دليله $2y-6=0$

الحل/

$\because 2y-6=0 \Rightarrow 2y=6 \Rightarrow \boxed{y=3} \Rightarrow \boxed{p=-3} \Rightarrow f(0,-3)$ البؤرة

$\therefore x^2=-4py$

$\Rightarrow x^2=-4(-3)y \Rightarrow$ $\boxed{x^2=12y}$ معادلة القطع المكافئ

(4) بؤرته تنتمي لمحور الصادات ويمر بالنقطة $\left(\sqrt{2}\,,\,\frac{1}{2}\right)$

الحل/ $\because$ البؤرة تنتمي لمحور الصادات $\Leftarrow$ معادلة القطع المكافئ هي $x^2=4py$

$\because$ النقطة $\left(\sqrt{2}\,,\,\frac{1}{2}\right)$ تنتمي للقطع فهي تحقق معادلته

$(\sqrt{2})^2=4p\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 2=2p \Rightarrow \boxed{p=1}$

$\because x^2=4py=4(1)y \Rightarrow$ $\boxed{x^2=4y}$ معادلة القطع المكافئ

(5) يمر بالنقطتين $(1,2\sqrt{5}),(1,,-\sqrt{5})$ جد معادلته ومعادلة دليله

الحل / $\because$النقطتين متناظرتان حول محور السينات (لأن قيمة x ثابتة لم تتغير) $\Leftarrow$ معادلته هي $y^2=4px$

$\therefore$ نعوض أحدى النقطتين لأنه يمر بها

$(2\sqrt{5})^2=4p(1) \Rightarrow 20=4p \Rightarrow \boxed{p=5} \Rightarrow$ $\boxed{x=-5}$ معادلة الدليل

$\because y^2=4px=4(5)x \Rightarrow$ $\boxed{y^2=20x}$ معادلة القطع المكافئ

(6) بؤرته تنتمي لمحور السينات ودليله يمر بالنقطة $(2,-4)$

الحل/ $\because$ بؤرته تنتمي لمحور السينات $\Leftarrow$ معادلة القطع المكافئ هي $y^2=-4px$

$\because$ دليله يمر بالنقطة $(2,-4)$ لذا فأن $\boxed{x=2}$ هي معادلة الدليل لأن الدليل يقطع الأحداثي السيني $\Leftarrow$ $\boxed{p=-2}$

$\because p=-2 \Rightarrow y^2=-4px \Rightarrow y^2=-4(-2)x \Rightarrow$ $\boxed{y^2=8x}$ معادلة القطع المكافئ

(7) رأسه نقطة الأصل وبؤرته مركز الدائرة التي معادلتها $x^2+y^2-4y+1=0$

الحل/ مركز الدائرة= $\left(\frac{(-x \text{ معامل})}{2}\,,\,\frac{(-y \text{ معامل})}{2}\right)=\left(\frac{0}{2}\,,\frac{-(-4)}{2}\right)=(0\,,2)=$ البؤرة

$\therefore \boxed{p=2}$ و البؤرة تنتمي لمحور الصادات ومعادلة القطع المكافئ هي $x^2=4py$

$x^2=4py=4(2)y \Rightarrow$ $\boxed{x^2=8y}$ معادلة القطع المكافئ

(8) دليله يوازي المحور الصادي ومعادلة محوره $y = 0$ ويمر بالنقطة $(-2, 1)$

الحل/ ∵ الدليل يوازي المحور الصادي ويمر بالنقطة $(-2, 1)$

∴ الدليل يقطع الأحداثي السيني السالب والبؤرة تقع على الأحداثي السيني الموجب

∴ معادلة القطع المكافئ هي $y^2 = 4px$

∵ القطع يمر بالنقطة $(-2, 1)$ لذا فهي تحققه

$\because y^2 = 4px \quad \Rightarrow (1)^2 = 4p(-2) \quad \Rightarrow \quad 1 = -8p \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = \frac{-1}{8}}$

$\therefore y^2 = 4\left(\frac{-1}{8}\right)x \quad \Rightarrow \boxed{y^2 = \frac{-1}{2}x}$ معادلة القطع المكافئ

(9) يقطع من المستقيم $x = 4$ قطعة طولها (10) وحدات

الحل/

$\because 2y = 10 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 5} \quad \Rightarrow \quad (4, 5)(4, -5)$ رأسي القطع المكافئ

∵التناظر حول محور السينات ⟸ معادلة القطع المكافئ $\boxed{y^2 = 4px}$ والنقطة $(4, 5)$ تحققه

$y^2 = 4px \quad \Rightarrow (5)^2 = 4p(4) \quad \Rightarrow \quad p = \frac{25}{16}$

$y^2 = 4px = 4\left(\frac{25}{16}\right)x \quad \Rightarrow \boxed{y^2 = \frac{25}{4}x}$

مثال/ جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويحقق الشروط التالية

(1) بؤرته الصيغة الديكارتية للعدد $z = \frac{-4+2i}{2-i}$

الحل/

$z = \frac{-4+2i}{2-i} \times \frac{2+i}{2+i} = \frac{-8-4i+4i-2}{5} = \frac{-10}{5} = -2 \quad \Rightarrow (-2, 0)$ الصيغة الديكارتية

$\therefore (-2, 0) = (p, 0)$ البؤرة $\quad \Rightarrow \quad \boxed{p = -2}$

$\therefore y^2 = 4px = 4(-2)x \quad \Rightarrow \boxed{y^2 = -8x}$ معادلة القطع المكافئ

(2) بؤرته تنتمي لأحد المحورين ودليله يمر بالنقطة (3,4)

الحل/ ∵ الدليل يمر بالنقطة (3,4) ولم يحدد لاي المحورين يوازي ⟸ يوجد دليلان $\boxed{p = 4}$ $\boxed{p = 3}$

∴ يوجد بؤرتان الاولى $(0, -4)$ والثانية $(-3, 0)$ مما يعني وجدود قطعان مكافئان

$\therefore y^2 = -4px = -4(3)x \quad \Rightarrow \boxed{y^2 = -12x}$ معادلة القطع المكافئ الأول

$\because x^2 = -4py = -4(4)y \quad \Rightarrow \boxed{x^2 = -16y}$ معادلة القطع المكافئ الثاني

(3) يمر بروؤس المثلث ABC حيث $A(0, 0), B(-2, 4), C(2, m)$ ثم أوجد قيمة m

الحل/ ∵ النقطة (2,m) تقع أما في الربع الأول أو الرابع

⟸ النقطة (2,m) ∋ للربع الأول لكي يتحقق القطع

⟸ البؤرة تقع على المحور الصادي و القانون $\boxed{x^2 = 4py}$

∵ القطع يمر بالنقطة $(-2, 4)$ فهي تحققه

$\therefore (-2)^2 = 4p(4) \quad \Rightarrow p = \frac{4}{16} \quad \Rightarrow \boxed{p = \frac{1}{4}} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4py = 4\left(\frac{1}{4}\right)y \quad \Rightarrow \boxed{x^2 = y}$ معادلة القطع

∵ النقطة (2,m) تقع على القطع لذا فهي تحقق معادلة القطع

$\therefore (2)^2 = m \quad \Rightarrow \boxed{m = 4}$

(4) رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $2y+\sqrt{3}=0$

الحل/

$2y+\sqrt{3}=0 \quad \Rightarrow 2y=-\sqrt{3} \quad \Rightarrow \boxed{y=\frac{-\sqrt{3}}{2}} \quad \Rightarrow \boxed{p=\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$\because x^2=4py=4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)y \quad \Rightarrow \boxed{x^2=2\sqrt{3}y}$ معادلة القطع المكافئ

****

واجبات

س 1 : في كل مما يأتي جد البؤرة ومعادلتي المحور والدليل للقطع المكافئ :

$(a) \quad y^2=-8(x-2)$

$(b) \quad x^2+4x-y=0$

$(c) \quad x^2+28y=0$

س 2 : أذا كان دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة $(-2,5)$ والرأس في نقطة الأصل فجد معادلته علما أن بؤرتـــــه تنتمي لأحد المحورين

س 3: في كل مما يأتي جد معادلة القطع المكافئ الذي :

(أ) بؤرته $(-7\,,0)$ والرأس في نقطة الأصل .

(ب) معادلة الدليل له $2x-3=0$ والرأس في نقطة الأصل .

(ج) بؤرته تنتمي لمحور السينات ويمر بالنقطة $(3\,,6)$ والرأس في نقطة الأصل .

(د) بؤرته تنتمي لمحور السينات و دليله يمر بالنقطة $(-4\,,5)$ والرأس في نقطة الأصل .

(ب) معادلة الدليل له $2y+\sqrt{3}=0$ والرأس في نقطة الأصل .

س 4: أذا كانت النقطة $(2\,,4)$ تنتمي للقطع المكافئ $y^2=(a+4)x$ فجد قيمة (a) ثم جد أحداثي البؤرة ومعادلة الدليل

س 5 : بأستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذي :

(أ) بؤرته $(4,0)$ والرأس في نقطة الأصل

(ب) معادلة الدليل $y-5=0$ والرأس في نقطة الأصل

القطع الناقص(الرأس في نقطة الأصل) :

هو مجموعة نقاط المستوي $P(x,y)$ التي يكون مجموع بعدي أي نقطة منها عن نقطتين ثابتتين تسميان البؤرتان تساوي عددا ثابتا قيمته تساوي $(2a)$

معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان لمحور السينات (x-axis) ومركزه نقطة الأصل

$\because PF_1 + PF_2 = 2a$ (تعريف القطع الناقص)

$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$

$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}$ (بتربيـــــع الطرفين)

$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+(y)^2}+x^2+2cx+c^2+y^2$

$4a\sqrt{(x+c)^2+(y)^2}=4a^2+4cx \qquad (\div 4)$

$a\sqrt{x^2+2cx+c^2+y^2}=a^2+cx$ (بتربيـــــع الطرفين)

$a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)=a^4+2a^2cx+c^2x^2$

$a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4+2a^2cx+c^2x^2$

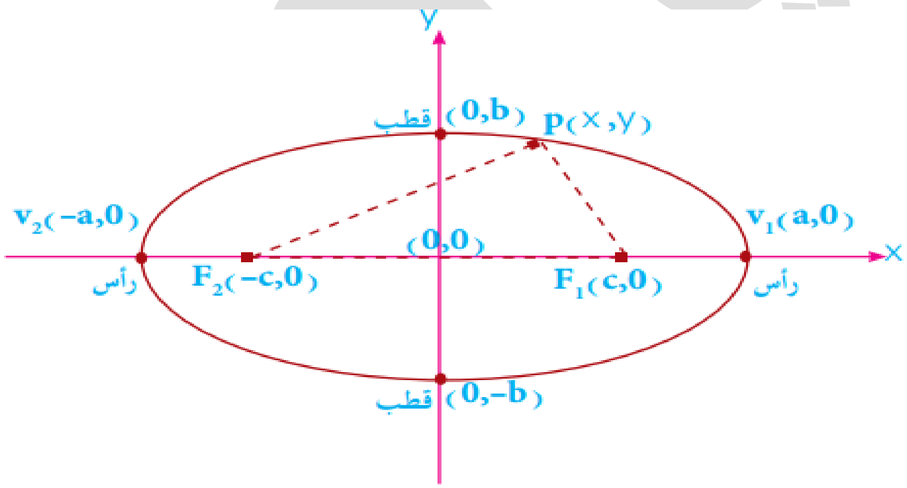
$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$

$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$ [نفرض $a^2-c^2=b^2$ حيث $b>0$]

$x^2b^2+a^2y^2=a^2b^2 \qquad (\div a^2b^2)$

$\frac{x^2b^2}{a^2b^2}+\frac{a^2y^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$

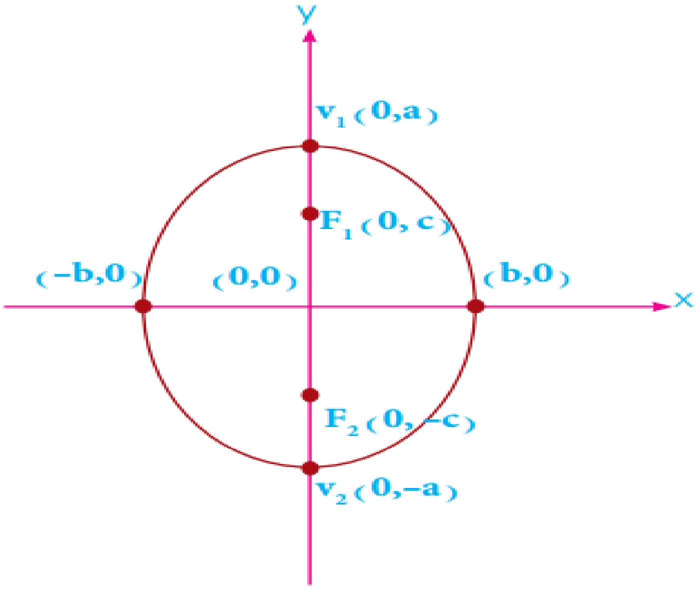
$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$ (معادلة القطع الناقص)



حيث أن $(a>b)$, $(a>c)$

- رأسا القطع الناقص هما $V_1(a,0)$, $V_2(-a,0)$ وبؤرتاه هي $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$
- بـنفس الأسـلوب يمكننـا أيجـاد معادلـة القطـع النـاقص الـذي بؤرتـاه تنتميـان لمحـور الصـادات وهـي $\boxed{\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1}$ حيـث أن رأسـا القطـع النـاقص همـا $V_1(0,a)$, $V_2(0,-a)$ وبؤرتـاه هـي $F_1(0,c)$, $F_2(0,-c)$

لاحظ الشكل التالي :



ملاحظات :

① دائما $(a > b)$, $(a > c)$ حيث أن $(a, b, c > 0)$

② طول المحور الكبير $= 2a$

③ طول المحور الصغير $= 2b$

④ البعد بين البؤرتين $= 2c$

⑤ دائما يكون $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$

⑥الاختلاف المركزي $\left(e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$ حيث يلاحظ أنه يكون $(e < 1)$ وقيمة $\left(c = \sqrt{a^2 - b^2} \right)$

⑦ مساحة القطع الناقص $\boxed{A = ab\pi}$

⑧ محيط القطع الناقص $\boxed{p = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}$ حيث أن $\left(\pi = \frac{22}{7}\right)$

⑨ النسبة بين طول محوريه $= \frac{2a}{2b}$

⑩ أذا مر القطع بنقطة أحد إحداثياتها صفر فالإحداثي الثاني هو أما (a) أو (b) والأكبر هو(a) والأصغر هو (b)

⑪ لاحظ الجدول أدناه :

قطع ناقص بؤرتاه على محور الصادات	قطع ناقص بؤرتاه على محور السينات
المعادلة $\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$	المعادلة $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$
البؤرتان $F_2(0, -c)$, $F_1(0, c)$	البؤرتان $F_2(-c, 0)$, $F_1(c, 0)$
الرأسان $V_2(0, -a)$, $V_1(0, a)$	الرأسان $V_2(-a, 0)$, $V_1(a, 0)$

مثال (11)/ في كل مما يأتي جد طول كل من المحورين وأحداثي كل من البؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي

① $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ ② $4x^2+3y^2=\frac{4}{3}$

الحل (1)

بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع الناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$a^2=25 \Rightarrow \boxed{a=5}$, $b^2=16 \Rightarrow \boxed{b=4}$, $c^2=a^2-b^2=25-16=9 \Rightarrow \boxed{c=3}$

$2a=2(5)=10$ وحدة طول المحور الكبير

$2b=2(4)=8$ وحدة طول المحور الصغير

$2c=2(3)=6$ وحدة البعد البؤري

$V_1(5,0)$, $V_2(-5,0)$ الرأسان $F_1(3,0), F_2(-3,0)$ البؤرتان

$e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5}<1$ الاختلاف المركزي

الحل (2)

$4x^2+3y^2=\frac{4}{3} \quad \left(\times\frac{3}{4}\right)$

$\frac{4x^2}{\left(\frac{4}{3}\right)}+\frac{3y^2}{\left(\frac{4}{3}\right)}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{1}{3}\right)}+\frac{9y^2}{4}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{1}{3}\right)}+\frac{y^2}{\left(\frac{4}{9}\right)}=1$

$a^2=\frac{4}{9} \Rightarrow \boxed{a=\frac{2}{3}}$ $b^2=\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{b=\frac{1}{\sqrt{3}}}$ $c^2=a^2-b^2=\frac{4}{9}-\frac{1}{3}=\frac{1}{9} \Rightarrow \boxed{c=\frac{1}{3}}$

$2a=2\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}$ وحدة طول المحور الكبير

$2b=2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{\sqrt{3}}$ وحدة طول المحور الصغير

$\therefore V_1\left(0,\frac{2}{3}\right), V_2\left(0,\frac{-2}{3}\right)$ الرأسان $F_1\left(0,\frac{1}{3}\right), F_2\left(0,\frac{-1}{3}\right)$ البؤرتان

$e=\frac{c}{a}=\frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{2}{3}\right)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{2}<1$ الاختلاف المركزي

مثال (12)/ جد معادلـــة القطع الناقــص الذي بؤرتـــاه $F_2(-3,0), F_1(3,0)$ ورأســـاه النقطـــتان $V_2(-5,0), V_1(5,0)$ ومركزه نقطة الاصل .

الحل/

∵ البؤرتان والرأسان يقعان على محور السينات والمركز في نقطة الأصل ⇐ $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$

$\Rightarrow C=3 \quad \Rightarrow \quad C^2=9$

$\Rightarrow a=5 \quad \Rightarrow \quad a^2=25$

$\Rightarrow \quad C^2=a^2-b^2 \qquad \Rightarrow \quad b^2=a^2-C^2=25-9=16 \qquad \Rightarrow \quad b^2=16$

$\therefore \boxed{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1}$ معادلة القطع الناقص

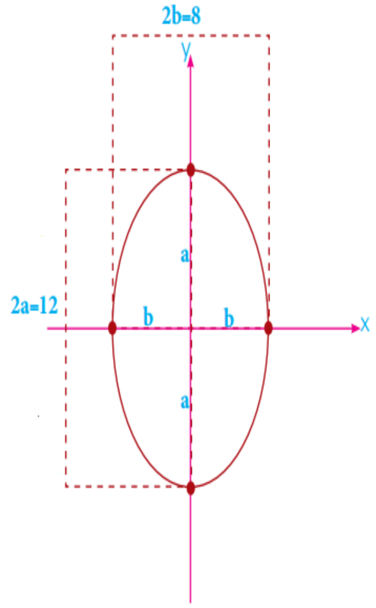
مثال (13)/ جد معادلـــة القطع الناقــص الذي مركزه نقطة الأصل وينطبق محوراه على المحوريـــن الإحداثيين ويقطع من محور السينات جزءاً طوله (8) وحدات ومن محور الصادات جزءاً طوله (12)وحدة،ثم جد المسافة بين البؤرتين ومساحة منطقته ومحيطه .

الحل/

∵ المحور الكبير $=2a=12 \ \Rightarrow a=6 \ \Rightarrow a^2=36$ (البؤرة تقع على الصادات)

∵ المحور الصغير $=2b=8 \Rightarrow \mathrm{b}=4 \ \Rightarrow b^2=16$

$\therefore \boxed{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1}$ (معادلة القطع الناقص)



$\because a^2=b^2+c^2 \qquad \Rightarrow c^2=36-16=20$

$\Rightarrow \mathrm{c}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

$\Rightarrow 2\mathrm{c}=4\sqrt{5}$ (المسافة بين البؤرتين)

المساحة $= \ A=ab\pi=(6)(4)\pi \ =24\pi$ (وحدة مربعة)

المحيط $=p=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=2\pi\sqrt{\frac{36+16}{2}}=2\pi\sqrt{\frac{52}{2}}$

$\Rightarrow \mathrm{p}=2\sqrt{26}\ \pi$ (وحدة)

الاختلاف المركزي $=e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{6}=\frac{\sqrt{5}}{3}$

مثال (14)/ لتكن $kx^2+4y^2=36$ معادلـــة قطع ناقـــص مـركزه نقطة الأصـــل وأحدى بؤرتيـــه $(\sqrt{3},0)$ جد قيمة $k\in R$ **وزاري 2015 / د1**

الحل/

$$kx^2+4y^2=36 \quad (\div 36)$$

$$\frac{kx^2}{36}+\frac{4y^2}{36}=1 \quad \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{36}{k}\right)}+\frac{y^2}{9}=1$$

∵ البؤرة $(\sqrt{3},0)$ تنتمي لمحور السينات ⇐ القانون $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$

$$\therefore\ C=\sqrt{3} \quad \Rightarrow C^2=3 \quad , \quad b^2=9 \quad , \quad a^2=\frac{36}{k}$$

$$\because a^2=b^2+c^2 \Rightarrow \frac{36}{k}=9+3 \Rightarrow \frac{36}{k}=12 \Rightarrow k=\frac{36}{12} \Rightarrow \boxed{k=3}$$

مثال (15)/ جد معادلـــة القطع الناقــص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور الســــينات والمسافة بين البؤرتين (6) والفرق بين طولي المحورين (2) وحدة .

الحل/

$$\because 2c=6 \quad \Rightarrow \boxed{c=3}$$

$$\because 2a-2b=2 \quad \Rightarrow a-b=1 \quad \Rightarrow a=1+b$$

$$\because a^2=b^2+c^2 \Rightarrow (1+b)^2=b^2+9 \Rightarrow 1+2b+b^2=b^2+9 \Rightarrow 2b=8 \Rightarrow \boxed{b=4}\ \boxed{a=5}$$

$$\therefore \boxed{\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1 \quad (\text{معادلة القطع الناقص})}$$

مثال (16)/ جد معادلـــة القطع الناقــص الذي مركزه نقطـــة الأصـــل وأحدى بؤرتيه بؤرة القطـــع المكافـــئ $y^2-12x=0$ وطول محوره الصغير يساوي (10) وحدات .

الحل/ من القطع المكافئ المعطى :

$$y^2=12x \quad (\text{بالمقارنة مع}) \Rightarrow y^2=4px \Rightarrow 4p=12 \Rightarrow \boxed{p=3} \Rightarrow \text{البورة}(3,0)$$

القطع الناقص : البؤرتان $F_1(3,0)\ ,\ F_2(-3,0)$ ⇐ $\boxed{c=3}$

$$2b=10 \Rightarrow \boxed{b=5} \Rightarrow a^2=b^2+c^2 \Rightarrow a^2=25+9 \Rightarrow \boxed{a^2=34}$$

$$\therefore \boxed{\frac{x^2}{34}+\frac{y^2}{25}=1 \quad (\text{معادلة القطع الناقص})}$$

مثال (17)/ بأستخدام التعريف ، جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه :
$F_1(2,0)$ ، $F_2(-2,0)$ والعدد الثابت $= 6$.

الحل/

$\because PF_1 + PF_2 = 2a$ (تعريف القطع الناقص)

$\sqrt{(x-2)^2+(y-0)^2} + \sqrt{(x+2)^2+(y-0)^2} = 2(3)$

$\sqrt{(x-2)^2+y^2} = 6 - \sqrt{(x+2)^2+y^2}$ (بتربيـــــع الطرفين)

$(x-2)^2+y^2 = 36 - 12\sqrt{(x+2)^2+y^2} + (x-2)^2 + y^2$

$x^2-4x+4+y^2 = 36 - 12\sqrt{(x+2)^2+y^2} + x^2+4x+4+y^2$

$12\sqrt{(x+2)^2+y^2} = 36+8x \qquad (\div 4)$

$3\sqrt{(x+2)^2+y^2} = 9+2x$ (بتربيـــــع الطرفين)

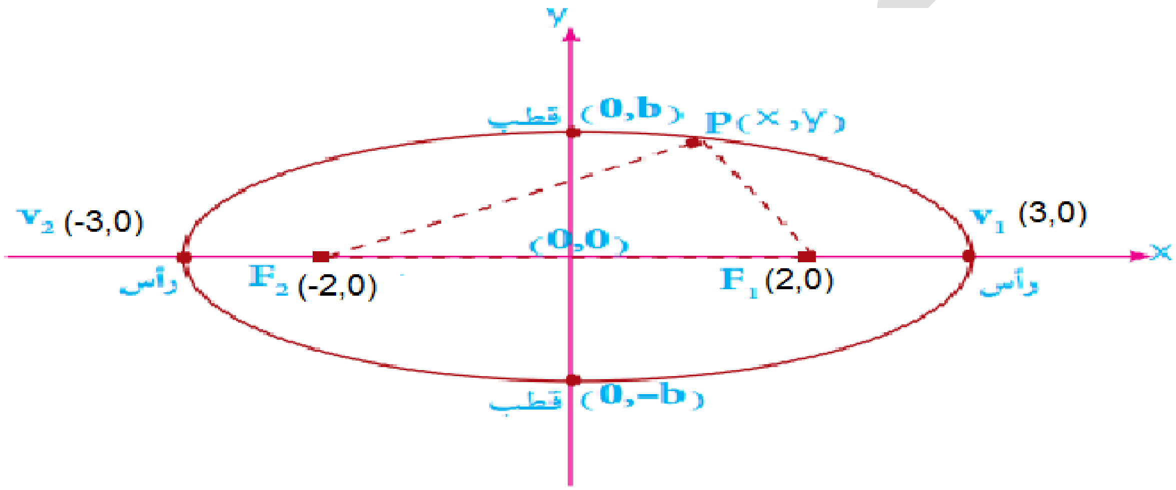
$9(x^2+4x+4+y^2) = 81+36x+4x^2$

$9x^2+36x+36+9y^2 = 81+36x+4x^2$

$5x^2+9y^2 = 81-36$

$5x^2+9y^2 = 45 \qquad (\div 45)$

$\boxed{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1}$ (معادلة القطع الناقص)



ملاحظة

لرسم قطع ناقص وليكن القطع $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$ نتبع الخطوات التالية :

① نعين النقطتين $V_1(a,0)\ ,\ V_2(-a,0)$

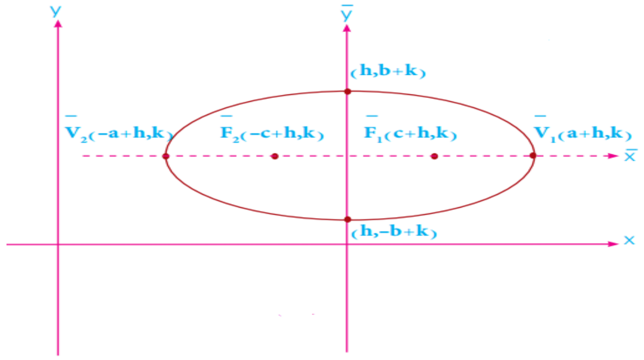
② نعين النقطتين $M_1(0,b)\ ,\ M_2(0,-b)$

③ نصل بين النقاط الأربعة $V_1\ M_1\ V_2\ M_2$ بالترتيب حتى يتكون منحني متصل

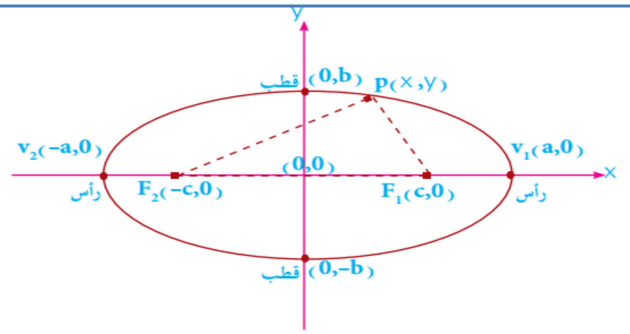
④ نعين البؤرتين $F_1(C,0)\ ,\ F_2(-C,0)$

القطع الناقص:(أنسحاب محاوره) :

①المعادلة القياسية للقطع الناقص الذى مركزه النقطة (h, k) ومحوره الكبير يوازى المحور السينى:



بعد الأنسحاب



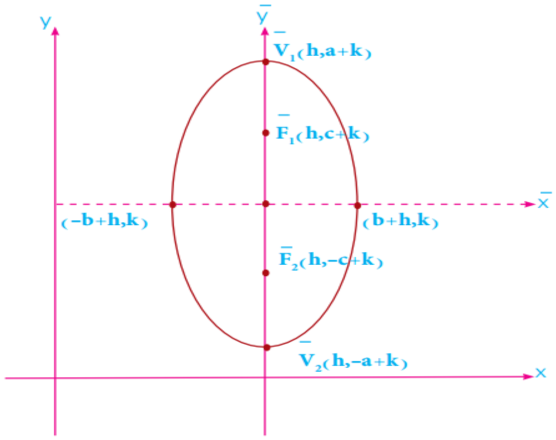
قبل الأنسحاب

بعد الأنسحاب	قبل الأنسحاب	العنصر
$\overline{V}(h \pm a, k)$	$V(\pm a\ , 0)$	الرأسان
$\overline{F}(h \pm c, k)$	$F(\pm c\ , 0)$	البؤرتان
(h, k)	$(0, 0)$	المركز
$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	القانون

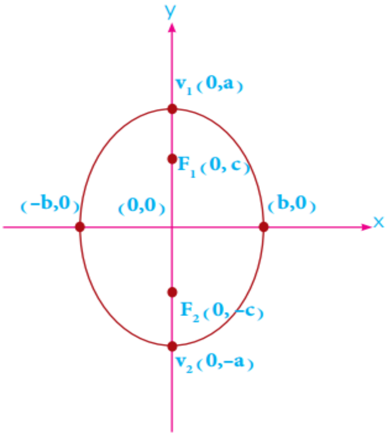
المحـور الكبير يـوازي محـور السـينات ومعادلتـه $(y = k)$ والمحـور الصـغير يـــوازي محـــور الصــــادات ومعادلتــه $(x = h)$

===========================

②المعادلة القياسية للقطع الناقص الذى مركزه النقطة (h, k) ومحوره الكبير يوازى محور الصادات :



بعد الأنسحاب



قبل الأنسحاب

بعد الأنسحاب	قبل الأنسحاب	العنصر
$\overline{V}(h, k \pm a)$	$V(\ 0, \pm a)$	الرأسان
$\overline{F}(h, k \pm c)$	$F(\ 0, \pm c)$	البؤرتان
(h, k)	$(0, 0)$	المركز
$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$	القانون

المحـور الكبير يـوازي محـور الصـادات ومعادلتـه $(x = h)$ والمحـور الصـغير يـــوازي محـــور الســـينات ومعادلتــه $(y = k)$

ملاحظات :

①معادلة المحور الكبير للقطع الناقص الذي يوازي محور السينات ورأسه (h,k) هي $(y=k)$

②معادلة المحور الكبير للقطع الناقص الذي يوازي محور الصادات ورأسه (h,k) هي $(x=h)$

③ احداثيات القطبين او نهايتي المحور الصغير للقطع الناقص الذي يوازي محور السينات هي $(h,k\pm b)$

④ احداثيات القطبين او نهايتي المحور الصغير للقطع الناقص الذي يوازي محور الصادات هي $(h\pm b,k)$

⑤ ستقتصر دراستنا في موضوع الانسحاب على أيجاد مركز القطع الناقص وبؤرتاه والراسان وطول محوريه الكبير والصغير ومعادلة كل من المحورين وحساب مساحة ومحيط القطع الناقص وايجاد الاختلاف المركزي .

مثال (18)/ جد البؤرتين والرأسين والقطبين و طول ومعادلة كل من المحورين للقطع الناقص $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$ ثم جد قيمة e ؟

الحل/

بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع الناقص $\boxed{\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1}$

$\boxed{h=2}$, $\boxed{k=1}$ $\Rightarrow (h,k)=(2,1)$ مركز القطع الناقص

$a^2=25 \Rightarrow \boxed{a=5} \Rightarrow 2a=10$ وحدة (طول المحور الكبير)

$b^2=9 \Rightarrow \boxed{b=3} \Rightarrow 2b=6$ وحدة (طول المحور الصغير)

$a^2=b^2+C^2 \Rightarrow C^2=a^2-b^2=25-9=16 \Rightarrow \boxed{C=4}$

$\boxed{x=h \Rightarrow x=2}$ (معادلة المحور الكبير) $\boxed{y=k \Rightarrow y=1}$ (معادلة المحور الصغير)

$\overline{F_1}(h,k+c)$,$\overline{F_2}(h,k-c) \Rightarrow \overline{F_1}(2,5)$,$\overline{F_2}(2,-3)$ البؤرتان

$\overline{V_1}(h,k+a)$,$\overline{V_2}(h,k-a) \Rightarrow \overline{V_1}(2,6)$,$\overline{V_2}(2,-4)$ الرأسان

$\overline{M_1}(h+b,k)$,$\overline{M_2}(h-b,k) \Rightarrow \overline{M_1}(5,1)$,$\overline{M_2}(-1,1)$ القطبان

الاختلاف المركزي $= e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}<1$

تمارين $(2-2)$

س 1 / عين كل من البؤرتين والرأسين والقطبين والمركز ثم جد طول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الناقصة المبينة معادلاتها في كل مما يأتي :

ⓐ $x^2+2y^2=1$

الحل/

$\frac{x^2}{1}+\frac{y^2}{\left(\frac{1}{2}\right)}=1 \quad \Rightarrow a^2=1 \quad \Rightarrow \boxed{a=1} \quad , \quad b^2=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \boxed{b=\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$2a=2(1)=2$ وحدة (طول المحور الكبير)

$2b=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$ وحدة (طول المحور الصغير)

$\because a^2=b^2+c^2 \quad \Rightarrow c^2=a^2-b^2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \boxed{c=\frac{1}{\sqrt{2}}}$

$2c=2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\sqrt{2}$ وحدة (المسافة بي البؤرتين)

$V_1(1,0)\ ,V_2(-1,0)$ الرأسان

$F_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\ ,F_2\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},0\right)$ البؤرتان

$P_1\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\ ,P_2\left(0,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ القطبين(طرفا المحور الصغير)

الاختلاف المركزي $= e=\frac{c}{a}=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{1}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$

معادلة المحور الكبير $(y=0)$ ومعادلة المحور الصغير $(x=0)$ والمركز $(0,0)$

ⓑ $9x^2 + 13y^2 = 117$

الحل/ بالقسمة على (117)

$\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \Rightarrow a^2 = 13 \quad \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{13}} \quad , \quad b^2 = 9 \quad \Rightarrow \boxed{b = 3}$

$2a = 2(\sqrt{13}) = 2\sqrt{13}$ وحدة (طول المحور الكبير)

$2b = 2(3) = 6$ وحدة (طول المحور الصغير)

$\because a^2 = b^2 + c^2 \quad \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 13 - 9 = 4 \quad \Rightarrow \boxed{c = 2}$

$2c = 2(2) = 4$ وحدة (المسافة بي البؤرتين)

$V_1(\sqrt{13}, 0)$, $V_2(-\sqrt{13}, 0)$ الرأسان

$F_1(2,0)$, $F_2(-2,0)$ البؤرتان

$P_1(0,3)$, $P_2(0,-3)$ القطبين

الاختلاف المركزي $= e = \frac{c}{a} = \frac{2}{\sqrt{13}} < 1$

معادلة المحور الكبير $(y = 0)$ ومعادلة المحور الصغير $(x = 0)$ والمركز $(0,0)$

وزاري 2013 / د2

ⓒ $\frac{(x-4)^2}{81} + \frac{(y+1)^2}{25} = 1$

الحل/ بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع الناقص $\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$

$a^2 = 81 \quad \Rightarrow \boxed{a = 9} \quad , \quad b^2 = 25 \quad \Rightarrow \boxed{b = 5}$

$\boxed{h = 4}$, $\boxed{k = -1}$ $\Rightarrow$ $(h, k) = (4, -1)$ المركز

$2a = 2(9) = 18$ وحدة (طول المحور الكبير)

$2b = 2(5) = 10$ وحدة (طول المحور الصغير)

$\because a^2 = b^2 + c^2 \quad \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 81 - 25 = 56 \quad \Rightarrow \boxed{c = 2\sqrt{14}}$

$2c = 2(2\sqrt{14}) = 4\sqrt{14}$ وحدة (المسافة بي البؤرتين)

$\because y = k \Rightarrow \quad y = -1$ (معادلة المحور الكبير)

$\because x = h \Rightarrow \quad x = 4$ (معادلة المحور الصغير)

$\overline{F_1}(h + c, k) = \overline{F_2}(h - c, k) \quad \Rightarrow \overline{F_1}(4 + 2\sqrt{14}, -1)$, $\overline{F_2}(4 - 2\sqrt{14}, -1)$ البؤرتان

$\overline{V_1}(h + a, k) = \overline{V_2}(h - a, k) \quad \Rightarrow \overline{V_1}(13, -1)$, $\overline{V_2}(-5, -1)$ الرأسان

$\overline{P_1}(h, k + b) = \overline{P_2}(h, k - b) \quad \Rightarrow \overline{P_1}(4,4)$, $\overline{P_2}(4, -6)$ القطبين

الاختلاف المركزي $= e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{14}}{9} < 1$

ⓓ $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{25}$ وزاري 2013 / د1

الحل/ بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع الناقص $\boxed{\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1}$

$a^2=25 \Rightarrow \boxed{a=5}$, $b^2=9 \Rightarrow \boxed{b=3}$

$\boxed{h=-3}$, $\boxed{k=-2}$ $\Rightarrow$ $(h,k)=(-3,-2)$ المركز

$2a=2(5)=10$ وحدة (طول المحور الكبير)

$2b=2(3)=6$ وحدة (طول المحور الصغير)

$\because a^2=b^2+c^2 \Rightarrow c^2=a^2-b^2=25-9=16 \Rightarrow \boxed{c=4}$

$2c=2(4)=8$ وحدة (المسافة بي البؤرتين)

$\because x=h \Rightarrow x=-3$ (معادلة المحور الكبير)

$\because y=k \Rightarrow y=-2$ (معادلة المحور الصغير)

$\overline{F_1}(h,k+c)\,,\overline{F_2}(h,k-c) \Rightarrow \overline{F_1}(-3,2)\,,\overline{F_2}(-3,-6)$ البؤرتان

$\overline{V_1}(h,k+a)\,,\overline{V_2}(h,k-a) \Rightarrow \overline{V_1}(-3,3)\,,\overline{V_2}(-3,-7)$ الرأسان

$\overline{P_1}(h+b,k)=\overline{V_2}(h-b,k) \Rightarrow \overline{P_1}(0,-2)\,,\overline{P_2}(-6,-2)$ القطبين

الاختلاف المركزي $=e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}<1$

ⓔ $9x^2+16y^2-72x-96y+144=0$

الحل/ نرتب المعادلة بحيث تكون حدود (x) وحدود (y) مربع كامل وكما يلي :

$9x^2+16y^2-72x-96y=-144 \Rightarrow 9(x^2-8x)+16(y^2-6y)=-144$

بإضافة (288) الى طرفي معادلة القطع الناقص حتى تكون حدود(x) وحدود (y) بشكل مربع كامل

$9(x^2-8x+16)+16(y^2-6y+9)=-144+288$

$9(x-4)^2+16(y-3)^2=144 \quad (\div 144)$

$\Rightarrow \boxed{\frac{(x-4)^2}{16}+\frac{(y-3)^2}{9}=1 \quad \text{معادلة القطع الناقص}}$

بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع الناقص $\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}$ نحصل على

$\boxed{h=4}\ ,\ \boxed{k=3} \quad \Rightarrow (h,k)=(4,3)$ مركز القطع الناقص

$a^2=16 \Rightarrow \boxed{a=4} \quad , \quad b^2=9 \Rightarrow \boxed{b=3}$

$2a=2(4)=8$ وحدة (طول المحور الكبير)

$2b=2(3)=6$ وحدة (طول المحور الصغير)

$\because a^2=b^2+c^2 \quad \Rightarrow c^2=a^2-b^2=16-9=7 \quad \Rightarrow \boxed{c=\sqrt{7}}$

$2c=2(\sqrt{7})=2\sqrt{7}$ وحدة (المسافة بي البؤرتين)

$y=k \Rightarrow y=3$ (معادلة المحور الكبير) , $x=h \Rightarrow x=4$ (معادلة المحور الصغير)

$\overline{F_1}(h+c,k)\ ,\overline{F_2}(h-c,k) \quad \Rightarrow \overline{F_1}(4+\sqrt{7},3)\ ,\overline{F_2}(4-\sqrt{7},3)$ البؤرتان

$\overline{V_1}(h+a,k)\ ,\overline{V_2}(h-a,k) \quad \Rightarrow \overline{V_1}(8,3)\ ,\overline{V_2}(0,3)$ الرأسان

$\overline{P_1}(h,k+b)=\overline{P_2}(h,k-b) \quad \Rightarrow \overline{P_1}(4,6)\ ,\overline{P_2}(4,0)$ القطبين

الاختلاف المركزي $= e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}<1$

ⓕ $x^2+25y^2+4x-150y+204=0$

الحل/ نرتب المعادلة بحيث تكون حدود (x) وحدود (y) مربع كامل وكما يلي :

$x^2+25y^2+4x-150y=-204 \quad \Rightarrow (x^2+4x)+25(y^2-6y)=-204$

بإضافة (229) الى طرفي معادلة القطع الناقص حتى تكون حدود(x) وحدود (y) بشكل مربع كامل

$(x^2+4x+4)+25(y^2-6y+9)=-204+229 \quad \Rightarrow (x+2)^2+25(y-3)^2=25 \quad (\div 25)$

$\Rightarrow \boxed{\frac{(x+2)^2}{25}+\frac{(y-3)^2}{1}=1}$ معادلة القطع الناقص

بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع الناقص $\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}$ نحصل على :

$\boxed{h=-2}\ ,\ \boxed{k=3} \quad \Rightarrow (h,k)=(-2,3)$ مركز القطع الناقص

$a^2=25 \Rightarrow \boxed{a=5} \quad , \quad b^2=1 \Rightarrow \boxed{b=1}$

$2a = 2(5) = 10$ وحدة (طول المحور الكبير)

$2b = 2(1) = 2$ وحدة (طول المحور الصغير)

$\because a^2 = b^2 + c^2 \quad \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 1 = 24 \quad \Rightarrow c = \sqrt{24} \quad \Rightarrow \boxed{c = 2\sqrt{6}}$

$2c = 2(2\sqrt{6}) = 4\sqrt{6}$ وحدة (المسافة بي البؤرتين)

$y = k \Rightarrow y = 3$ (معادلة المحور الكبير) , $x = h \Rightarrow x = -2$ (معادلة المحور الصغير)

$\overline{F_1}(h + c, k), \overline{F_2}(h - c, k) \quad \Rightarrow \overline{F_1}(-2 + 2\sqrt{6}, 3), \overline{F_2}(-2 - 2\sqrt{6}, 3)$ البؤرتان

$\overline{V_1}(h + a, k), \overline{V_2}(h - a, k) \quad \Rightarrow \overline{V_1}(3,3), \overline{V_2}(-7,3)$ الرأسان

$\overline{P_1}(h, k + b) = \overline{P_2}(h, k - b) \quad \Rightarrow \overline{P_1}(-2,4), \overline{P_2}(-2,2)$ القطبين

الاختلاف المركزي $= e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{24}}{5} < 1$

س 2 / جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه في نقطة الأصل في كل مما يأتي :

(أ) البؤرتان هما النقطتان $(5,0)$ و $(-5,0)$ وطول محوره الكبير يساوي (12)وحدة

الحل/

$\because F_1(5,0), F_2(-5,0) \quad \Rightarrow \quad c = 5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c^2 = 25}$

$\because 2a = 12 \quad \Rightarrow a = 6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a^2 = 36}$

$\because a^2 = b^2 + c^2 \quad \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 25 \quad \Rightarrow \boxed{b^2 = 11}$

$\therefore \boxed{\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1}$ (معادلة القطع الناقص)

(ب) البؤرتان هما $(0, \pm 2)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \pm 4$

الحل/

$\because F_1(0,2), F_2(0,-2) \quad \Rightarrow \quad c = 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c^2 = 4}$ (البؤرتان تنتميان الى محور الصادات)

نقط التقاطع مع محور السينات عند $x = \pm 4$ تمثل القطبين وهي $(-4,0), (4,0)$ $\Leftarrow \boxed{b^2 = 16}$

$\because a^2 = b^2 + c^2 = 16 + 4 \quad \Rightarrow \boxed{a^2 = 20}$

$\therefore \boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{20} = 1}$ (معادلة القطع الناقص)

(ج) أحدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين 5 , 1 وحدة على الترتيب

الحل/

$2a = 1+5 \quad \Rightarrow 2a = 6 \quad \Rightarrow a = 3 \quad \Rightarrow \boxed{a^2 = 9}$

$2c = 5-1 \quad \Rightarrow 2c = 4 \quad \Rightarrow c = 2 \Rightarrow \boxed{c^2 = 4}$

$\because a^2 = b^2 + c^2 \quad \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 \quad \Rightarrow \boxed{b^2 = 5}$

∴ هناك حالتين لمعادلة القطع الناقص وهما :

عندما البؤرتان تنتمي لمحور السينات

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ (معادلة القطع الناقص)

عندما البؤرتان تنتمي لمحور الصادات

$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$ (معادلة القطع الناقص)

(د) الاختلاف المركزي $= \frac{1}{2}$ وطول محوره الصغير (12) وحدة طولية

الحل/

$\because e = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow c = \frac{a}{2} \quad \Rightarrow c^2 = \frac{a^2}{4}$

$\because 2b = 12 \quad \Rightarrow \boxed{b = 6} \Rightarrow \boxed{b^2 = 36}$

$\because a^2 = b^2 + c^2 = 36 - \frac{a^2}{4} \quad \Rightarrow a^2 = \frac{144 - a^2}{4} \quad \Rightarrow 4a^2 = 144 - a^2 \quad \Rightarrow 3a^2 = 144 \Rightarrow \boxed{a^2 = 48}$

∴ هناك حالتين لمعادلة القطع الناقص وهما :

عندما البؤرتان تنتمي لمحور السينات

$\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{36} = 1$ (معادلة القطع الناقص)

عندما البؤرتان تنتمي لمحور الصادات

$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{48} = 1$ (معادلة القطع الناقص)

(هـ) المسافة بين بؤرتيه تساوي (8) وحدات ونصف محوره الصغير يساوي (3) وحدة

الحل/

$\because \frac{1}{2}(2b) = 3 \quad \Rightarrow b = 3 \quad \Rightarrow \boxed{b^2 = 9}$

$\because 2c = 8 \quad \Rightarrow c = 4 \quad \Rightarrow \boxed{c^2 = 16}$

$\because a^2 = b^2 + c^2 = 9 + 16 \quad \Rightarrow \boxed{a^2 = 25}$

∴ هناك حالتين لمعادلة القطع الناقص وهما :

عندما البؤرتان تنتمي لمحور السينات

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ (معادلة القطع الناقص)

عندما البؤرتان تنتمي لمحور الصادات

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ (معادلة القطع الناقص)

س 3 / باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص أذا علم :

ⓐ بؤرتاه النقطتان $(0, \pm 2)$ ورأساه النقطتان $(0, \pm 3)$ ومركزه في نقطة الاصل .

الحل/

$\because \boxed{c = 2} \quad \boxed{a = 3}$

$PF_1 + PF_2 = 2a$ (حسب التعريف)

$\sqrt{(x-0)^2 + (y-2)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y+2)^2} = 2(3)$

$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} + \sqrt{x^2 + (y+2)^2} = 6$

$\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = 6 - \sqrt{x^2 + (y+2)^2}$ (بتربيع الطرفين وفك الأقواس)

$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 36 - 12\sqrt{x^2 + (y+2)^2} + x^2 + y^2 + 4y + 4$

$12\sqrt{x^2 + (y+2)^2} = 8y + 36 \quad (\div 4)$

$3\sqrt{x^2 + (y+2)^2} = 2y + 9$ (بتربيع الطرفين وفك الأقواس)

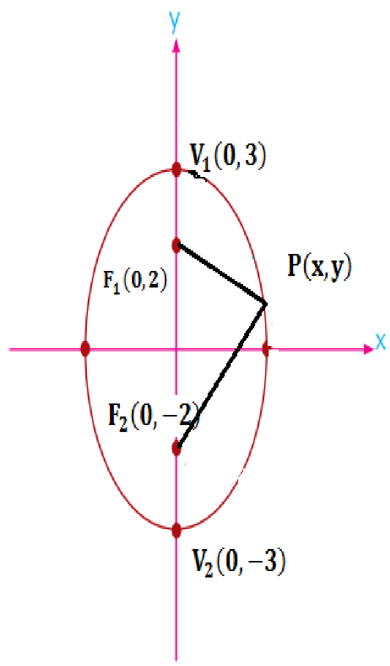
$9(x^2 + y^2 + 4y + 4) = 4y^2 + 36y + 81$

$9x^2 + 9y^2 + 36y + 36 = 4y^2 + 36y + 81$

$9x^2 + 5y^2 = 81 - 36$

$9x^2 + 5y^2 = 45 \quad (\div 45)$

$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1}$ (معادلة القطع الناقص)



ⓑ المسافة بين البؤرتين (6) وحدة والعدد الثابت (10) والبؤرتان تقعان على محور السينات ومركزه في نقطة الاصل .

الحل/

$\because 2c = 6 \quad \Rightarrow \quad c = 3 \quad \Rightarrow \quad (\pm 3, 0)$ البؤرتان

$\because 2a = 10 \quad \Rightarrow a = 5 \quad \Rightarrow \quad (\pm 5, 0)$ الراسان

وبالاعتماد على تعريف القطع الناقص

$$PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+3)^2 + (y-0)^2} = 2(5)$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} + \sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 10$$

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = 10 - \sqrt{(x+3)^2 + y^2}$$ (بتربيع الطرفين وفك الأقواس)

$$x^2 - 6x + 9 + y^2 = 100 - 20\sqrt{(x+3)^2 + y^2} + x^2 + 6x + 9 + y^2$$

$$20\sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 12x + 100 \quad (\div 4)$$

$$5\sqrt{(x+3)^2 + y^2} = 3x + 25$$ (بتربيع الطرفين وفك الأقواس)

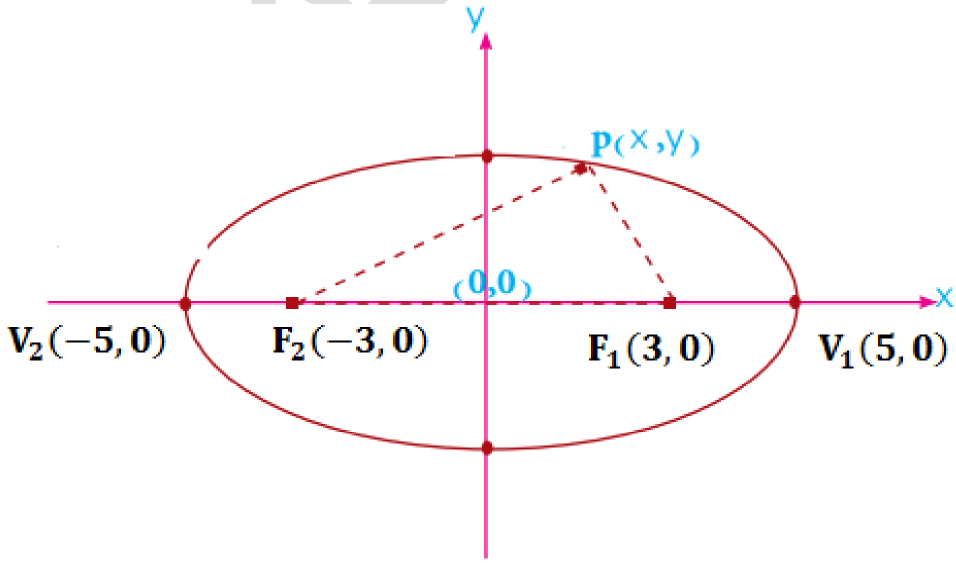
$$25(x^2 + 6x + 9 + y^2) = 9x^2 + 150x + 625$$

$$25x^2 + 150x + 225 + 25y^2 = 9x^2 + 150x + 625$$

$$16x^2 + 25y^2 = 625 - 225$$

$$16x^2 + 25y^2 = 400 \quad (\div 400)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$$ (معادلة القطع الناقص)



وزاري 2014 / د2

س 4 / جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه في نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $(y^2+8x=0)$ علما ان القطع الناقص يمر بالنقطة $(2\sqrt{3},\sqrt{3})$

الحل/ **في القطع المكافئ :**

$y^2=-8x \xrightarrow{\text{بالمقارنة مع}} y^2=4px \Rightarrow 4p=-8 \Rightarrow \boxed{p=-2} \Rightarrow (-2,0)$ البورة

في القطع الناقص :

البؤرتان $(2,0)\ ,\ (-2,0) \Leftarrow \boxed{c=2}$ والقانون هو $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$

النقطة $(2\sqrt{3},\sqrt{3})$ تحقق معادلة القطع الناقص لأنه يمر بها

$\frac{(2\sqrt{3})^2}{a^2}+\frac{(\sqrt{3})^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{12}{a^2}+\frac{3}{b^2}=1 \Rightarrow 12b^2+3a^2=a^2b^2$ (معادلة ①)

$\because a^2=b^2+c^2 \Rightarrow a^2=b^2+4$ (نعوض في ①)

$\therefore 12b^2+3(b^2+4)=(b^2+4)b^2 \Rightarrow 12b^2+3b^2+12=b^4+4b^2 \Rightarrow b^4-11b^2-12=0$

$\therefore (b^2-12)(b^2+1)=0$

$\Rightarrow \boxed{b^2=12}\ ,\ \boxed{a^2=16}$

$\Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ (معادلة القطع الناقص)

or $\boxed{b^2=-1}$ يهمل

س 5 / جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه في نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين $(3,4),(6,2)$

الحل/ $\because$ البؤرتان على محور السينات $\Leftarrow$ القانون هو $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$

$\because$ النقطة $(6,2)$ تحقق معادلة القطع الناقص لأنه يمر بها

$\therefore \frac{(6)^2}{a^2}+\frac{(2)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{36}{a^2}+\frac{4}{b^2}=1 \Rightarrow 36b^2+4a^2=a^2b^2$ (معادلة ①)

$\because$ النقطة $(3,4)$ تحقق معادلة القطع الناقص لأنه يمر بها

$\therefore \frac{(3)^2}{a^2}+\frac{(4)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{9}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1 \Rightarrow 9b^2+16a^2=a^2b^2$ (معادلة ②)

وبحل المعادلتين انيا بالطرح نحصل على المعادلة التالية

$-27b^2+12a^2=0 \Rightarrow 12a^2=27b^2 \Rightarrow 4a^2=9b^2 \Rightarrow \boxed{a^2=\frac{9b^2}{4}}$ (نعوض في ①)

$36b^2+4\left(\frac{9b^2}{4}\right)=\left(\frac{9b^2}{4}\right)b^2 \Rightarrow 36b^2+9b^2=\left(\frac{9b^2}{4}\right)b^2 \Rightarrow 45b^2=\frac{9b^4}{4} \Rightarrow 180b^2=9b^4$

$\Rightarrow 9b^4-180b^2=0 \Rightarrow b^4-20b^2=0 \Rightarrow b^2(b^2-20)=0 \Rightarrow \boxed{b^2=20}\ ,\ \boxed{a^2=45}$

$\therefore \boxed{\frac{x^2}{45}+\frac{y^2}{20}=1}$ (معادلة القطع الناقص)

س 6 / جـــــد معادلـــــــة القطع الناقــــص الـذي مركـزه نقطـة الاصـــل وبؤرتـاه نقطتـا تقـاطع المنحنـي $x^2+y^2-3x=16$ مع محور الصادات ويمس دليل القطع المكافئ $y^2=12x$

الحل/ $\because$ المنحني $(x^2+y^2-3x=16)$ يقطع المحور الصادي $\Leftarrow$ $\boxed{x=0}$

$\therefore\quad y^2=16 \quad\Rightarrow\quad y=\pm4$

$\therefore$ البؤرتان $(0,-4)\,,\,(0,4)$ $\Leftarrow$ $\boxed{c^2=16}$ والقانون هو $\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$

من القطع المكافئ المعطى

$y^2=12x$ (بالمقارنة مع) $y^2=4px \Rightarrow 4p=12 \Rightarrow \boxed{p=3}$

$x=-p \Rightarrow \boxed{x=-3}$ دليل القطع المكافئ $\Rightarrow (-3\,,0)$ نقطة التماس

$\because$ النقطة $(-3\,,0)$ تحقق معادلة القطع الناقص لأنه يمر بها

$\therefore\ \frac{(-3)^2}{b^2}+\frac{(0)^2}{a^2}=1 \Rightarrow \frac{9}{b^2}=1 \Rightarrow \boxed{b^2=9}$

$\because a^2=b^2+c^2=9+16 \Rightarrow \boxed{a^2=25}$

$\therefore\ \boxed{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1}$ (معادلة القطع الناقص)

س 7 / جـــــد معادلة القطع النـاقص الذي بؤرتـاه تنتمي الى محور الســــــينات ومركزه في نقطة الأصـــل وطول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير ويقطع القطع المكافئ $y^2+8x=0$ عند النقطة التي احداثيها السيني (-2)

الحل/ $\because$ البؤرتان تنتمي لمحور السينات $\Leftarrow$ القانون هو $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$

$\because$ طول المحور الكبير ضعف طول المحور الصغير

$\therefore\ 2a=2(2b) \Rightarrow a=2b \Rightarrow \boxed{a^2=4b^2}$

من القطع المكافئ المعطى نعوض قيمة $(x=-2)$

$y^2+8x=0 \Rightarrow y^2+8(-2)=0 \Rightarrow y^2-16=0 \Rightarrow y^2-16=0 \Rightarrow \boxed{y=\pm4}$

$\therefore$ النقطتان $(-2\,,-4)\,,(-2\,,4)$ تنتمي للقطع المكافئ والقطع الناقص لذا فهي تحقق معادلة القطع الناقص

$\frac{(-2)^2}{a^2}+\frac{(4)^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{4}{a^2}+\frac{16}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{4}{4b^2}+\frac{16}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{1}{b^2}+\frac{16}{b^2}=1$

$\Rightarrow \frac{17}{b^2}=1 \Rightarrow \boxed{b^2=17}$

$\Rightarrow a^2=4b^2=4(17) \Rightarrow \boxed{a^2=68}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{68}+\frac{y^2}{17}=1}$ (معادلة القطع الناقص)

س 8 / قطع ناقص معادلته $hx^2 + ky^2 = 36$ و مركزه نقطة الاصل ومجموع مربعي طولي محوريه يساوي (60) واحد بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 4\sqrt{3}\,x$ ما قيمة كل من $h , k \in R$

الحل/ من القطع المكافئ المعطى

$y^2 = 4\sqrt{3}\,x$ (بالمقارنة مع) $y^2 = 4px$

$4p = 4\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{p = \sqrt{3}} \Rightarrow (\sqrt{3}, 0)$ البؤرة

∴ بؤرتا القطع الناقص $(\sqrt{3}, 0)\ (-\sqrt{3}, 0) \Rightarrow \boxed{c^2 = 3} \Leftarrow$ القانون $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$

$\because hx^2 + ky^2 = 36 \quad (\div 36)$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{36}{h}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{36}{k}\right)} = 1 \Rightarrow \boxed{a^2 = \frac{36}{h}} \quad , \quad \boxed{b^2 = \frac{36}{k}}$$

∵ مجموع مربعي طول محوريه = 60

$\therefore (2a)^2 + (2b)^2 = 60 \Rightarrow 4a^2 + 4b^2 = 60 \Rightarrow a^2 + b^2 = 15 \Rightarrow \boxed{a^2 = 15 - b^2}$

$\because a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 15 - b^2 = b^2 + 3 \Rightarrow 2b^2 = 12 \Rightarrow \boxed{b^2 = 6} \quad \boxed{a^2 = 9}$

$\because a^2 = \frac{36}{h} \Rightarrow h = \frac{36}{9} \Rightarrow \boxed{h = 4}$

$\because b^2 = \frac{36}{k} \Rightarrow k = \frac{36}{6} \Rightarrow \boxed{k = 6}$

س 9 / جـــد معادلـــة القطع الناقــص الذي مركزه نقطـــة الاصـــل واحـــدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 = 24y$ ومجموع طولي محوريه (36) وحدة .

وزاري 2012 / د3

الحل/ من القطع المكافئ المعطى

$x^2 = 24y$ (بالمقارنة مع) $x^2 = 4py$

$\therefore 4p = 24 \Rightarrow \boxed{p = 6} \Rightarrow (0, 6)$ البؤرة

∴ بؤرتا القطع الناقص $(0, 6)\ (0, -6) \Rightarrow \boxed{c^2 = 36} \Leftarrow$ القانون $\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$

$\because 2a + 2b = 36 \Rightarrow a + b = 18 \Rightarrow \boxed{a = 18 - b}$

$\because a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (18 - b)^2 = b^2 + 36 \Rightarrow 324 - 36b + b^2 = b^2 + 36$

$\Rightarrow 324 - 36b = 36 \Rightarrow 36b = 288 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow \boxed{b^2 = 64}$

$\Rightarrow a = 18 - b = 18 - 8 = 10 \Rightarrow \boxed{a^2 = 100}$

$\therefore \boxed{\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1}$ (معادلة القطع الناقص)

س 10 / جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه $F_1(-4,0)$, $F_2(4,0)$ والنقطة Q تنتمي للقطع الناقص بحيث أن محيـــــط المثلث QF_1F_2 يساوي (24) وحدة . **وزاري 2014 / د1**

الحل/

$\because F_1(-4,0), F_2(4,0)$

$\therefore C = 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{C^2 = 16}$

$\because$ محيـــــط المثلث QF_1F_2 يساوي (24) وحدة وحسب تعريف القطع الناقص :

$QF_1 + QF_2 + F_1F_2 = 24$ (معادلة ①)

$\because F_1F_2 = 2C = 2(4) = 8$ وحدة (المسافة بين البؤرتين)

$\because QF_1 + QF_2 = 2a$ (حسب تعريف القطع الناقص)

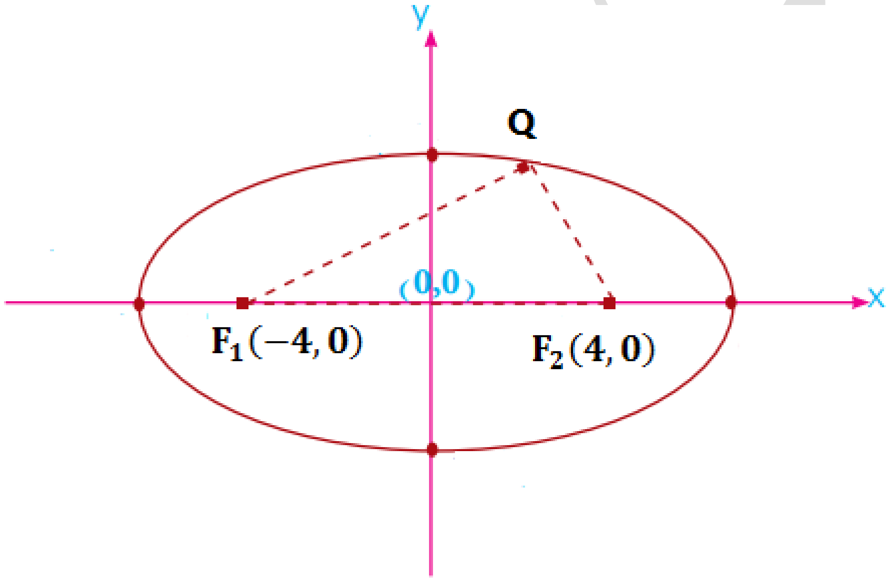
وبالتعويض في (معادلة ①) نحصل على ما يلي :

$2a + 8 = 24 \quad \Rightarrow \quad 2a = 16 \quad \Rightarrow \quad a = 8 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a^2 = 64}$

$\because a^2 = b^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad 64 = b^2 + 16 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 64 - 16 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b^2 = 48}$

$\because$ بؤرتا القطع الناقص $(4,0)$, $(-4,0)$ $\Leftarrow$ القانون $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$

$\therefore \boxed{\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1}$ (معادلة القطع الناقص)



أمثلة أضافية محلولة

مثال / لكل مما يأتي جد معادلة القطع الناقص الذي :

ⓐ بؤرتاه $(3,0)$, $(-3,0)$ وطول المحور الكبير (10 وحدات) ومركزه نقطة الأصل

$\because 2a = 10 \quad \Rightarrow \boxed{a = 5} \;,\; \boxed{c = 3} \quad \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16 \quad \Rightarrow \boxed{b = 4}$

$\therefore \boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1}$ (معادلة القطع الناقص)

ⓑ رأساه $(0,6)$, $(0,-6)$ وطول المحور الصغير (8 وحدات) ومركزه نقطة الأصل

$\because 2b = 8 \quad \Rightarrow \boxed{b = 4} \;,\; \boxed{a = 6}$

$\therefore \boxed{\frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{16} = 1}$ (معادلة القطع الناقص)

ⓒ أحدى بؤرتيه $(0,4)$ ومركزه نقطة الأصل والنسبة بين طول محوره الصغير والمسافة بين بؤرتيه تساوي $\left(\frac{3}{4}\right)$

$\because \frac{2b}{2c} = \frac{3}{4} \;,\; c = 4 \quad \Rightarrow \boxed{b = 3} \quad \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 = 9 + 16 = 25 \quad \Rightarrow \boxed{a = 5}$

$\therefore \boxed{\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{9} = 1}$ (معادلة القطع الناقص)

ⓓ مركزه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $(-4,0)$, $(0,3)$ ثم جد مساحته ومحيطه

$a = 4 \quad b = 3 \quad \therefore \boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1}$ (معادلة القطع الناقص)

المساحة $= A = ab\pi = (4)(3)\pi \quad \Rightarrow A = 12\pi$ (وحدة مربعة)

المحيط $= p = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{16 + 9}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{25}{2}} = 5\sqrt{2}\,\pi$ (وحدة)

ⓔ مركزه نقطة الأصل وأحد قطبيه يمر بأحدى نقطتي تقاطع المستقيم $2x + y = 8$

الحل / لأيجاد نقط التقاطع نجعل $(x = 0)$ ثم نجد قيم (y) ثم نجعل $(y = 0)$ لأيجاد قيم (x)

$if \ \ x = 0 \quad \Rightarrow y = 8 \quad \Rightarrow (0, 8) \qquad\qquad if \ \ y = 0 \quad \Rightarrow 2x = 8 \quad \Rightarrow (4, 0)$

$\therefore a = 8 \quad b = 4 \quad \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \ (\text{القانون})} \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{64} = 1 \quad (\text{معادلة القطع الناقص})}$

ⓕ مركزه نقطة الأصل ومحوره الكبير ينطبق على محور السينات والبعد الثابت لـه $(10$ وحدات$)$ وطول محوره الصغير $(6$ وحدات$)$

$\because 2a = 10 \quad \Rightarrow \boxed{a = 5} \qquad \because 2b = 6 \quad \Rightarrow \boxed{b = 3} \qquad \therefore \boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad (\text{معادلة القطع الناقص})}$

ⓖ أحدى بؤرتيه $(0, -3)$ ومركزه نقطة الأصل والنسبة بين طول محوريه تساوي $\left(\frac{4}{5}\right)$

$\because c = 3 \quad , \quad \frac{2b}{2a} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \boxed{b = \frac{4}{5}a}$

$\because a^2 = b^2 + c^2 \quad \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \quad \Rightarrow \frac{16}{25}a^2 = a^2 - 9 \quad \Rightarrow 16a^2 = 25a^2 - 225$

$\Rightarrow 9a^2 = 225 \quad \Rightarrow \boxed{a^2 = 25} \quad \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16$

$\therefore \boxed{\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1 \quad (\text{معادلة القطع الناقص})}$

ⓗ أحدى بؤرتيه $(4, 0)$ ومركزه نقطة الأصل واختلافه المركزي $\left(\frac{1}{2}\right)$

$\because c = 4 \quad , \quad e = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{4}{a} \quad \Rightarrow \boxed{a = 8} \quad \Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 = 64 - 16 \quad \Rightarrow \boxed{b^2 = 48}$

$\therefore \boxed{\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1 \quad (\text{معادلة القطع الناقص})}$

ⓘ مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومساحته (24π) والنسبة بين طول محوريه $\left(\frac{3}{8}\right)$

$A = ab\pi \Rightarrow 24\pi = ab\pi \Rightarrow a = \frac{24}{b}$ (معادلة ①)

$\because \frac{2b}{2a} = \frac{3}{8} \Rightarrow 3a = 8b \Rightarrow a = \frac{8b}{3} \Rightarrow \frac{24}{b} = \frac{8b}{3} \Rightarrow 8b^2 = 72 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow \boxed{b=3}\ \boxed{a=8}$

$\therefore \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{9} = 1$ (معادلة القطع الناقص)

ⓙ مركزه نقطة الأصل ومحوراه ينطبقان على المحورين الإحداثيين وأحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $(x^2 - 12y = 0)$ وطول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير

الحل / من القطع المكافئ :

$x^2 = 12y$ (بالمقارنة مع) $x^2 = 4py \Rightarrow 4p = 12 \Rightarrow \boxed{p=3} \Rightarrow$ البورة$(0,3)$

من القطع الناقص :

البؤرتان $(0,3)\,,\ (0,-3) \Rightarrow \boxed{c=3} \Rightarrow$ القانون هو $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

$\because a = 2b \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow (2b)^2 = b^2 + 9 \Rightarrow 4b^2 = b^2 + 9 \Rightarrow 3b^2 = 9 \Rightarrow \boxed{b^2 = 3}$

$\therefore a^2 = 4b^2 = 4(3) \Rightarrow \boxed{a^2 = 12} \Rightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{12} = 1$ (معادلة القطع الناقص)

ⓚ يمر بالنقطة $(0,3)$ والمسافة بين بؤرتيه $(6$ وحدات$)$

$\because 2c = 6 \Rightarrow \boxed{c=3}$

$\because a > c \Rightarrow \boxed{b=3}$ (لأنه يمر بالنقطة)

$\because a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 9 + 9 \Rightarrow a^2 = 18$ (توجد معادلتين للقطع الناقص)

$\therefore \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{18} = 1$ (معادلة القطع الناقص الأولى) or $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ (معادلة القطع الناقص الثانية)

مثال/ جد طول كل من المحورين والبعد البؤري وإحداثيات البؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي والمحيط والمساحة لمعادلة القطع التالية $16x^2 + 25y^2 = 400$

$16x^2 + 25y^2 = 400 \quad (\div 400) \quad \Rightarrow \quad \frac{16x^2}{400} + \frac{25y^2}{400} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

$\because a^2 = 25 \quad \Rightarrow \boxed{a = 5} \quad , \quad b^2 = 16 \Rightarrow \boxed{b = 4} \quad , \quad c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9 \quad \Rightarrow \boxed{c = 3}$

$2a = 2(5) = 10$ وحدة (المحور الكبير) , $2b = 2(4) = 8$ وحدة (المحور الصغير)

$2c = 2(3) = 6$ وحدة (البعد البؤري)

$\therefore (5, 0), (-5, 0)$ الرأسان $(3, 0), (-3, 0)$ البؤرتان

الاختلاف المركزي $= e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$

المساحة $= A = ab\pi = (5)(4)\pi \quad \Rightarrow A = 20\pi$ (وحدة مربعة)

المحيط $= p = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{25 + 16}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{41}{2}}$ (وحدة)

مثال/ عين كل من البؤرتين والرأسين ثم جد طول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطع النـاقص الذي معادلته هي $25x^2 + 9y^2 - 100x + 54y - 44 = 0$

الحل / نرتب المعادلة بحيث تكون حدود (x) وحدود (y) مربع كامل وكما يلي :

$25x^2 + 9y^2 - 100x + 54y = 44 \quad \Rightarrow 25(x^2 - 4x) + 9(y^2 + 6y) = 44$

بإضافة (181) الى طرفي معادلة القطع الناقص حتى تكون حدود(x) وحدود (y) بشكل مربع كامل

$25(x^2 - 4x + 4) + 9(y^2 + 6y + 9) = 44 + 181 \quad \Rightarrow \quad 25(x - 2)^2 + 9(y - 3)^2 = 225 \quad (\div 225)$

$\Rightarrow \boxed{\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y+3)^2}{25} = 1}$ معادلة القطع الناقص

بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع الناقص $\boxed{\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1}$ نحصل على

$\boxed{h = 2} \quad , \quad \boxed{k = -3} \quad \Rightarrow \quad (h, k) = (2, -3)$ مركز القطع الناقص

$a^2 = 25 \quad \Rightarrow \boxed{a = 5} \quad , \quad b^2 = 9 \Rightarrow \boxed{b = 3}, \quad c^2 = 16 \Rightarrow \boxed{c = 4}$

$2c = 2(4) = 8$ وحدة (المسافة بي البؤرتين)

$x = h \Rightarrow \ x = 2$ (معادلة المحور الكبير) , $y = k \Rightarrow \ y = -3$ (معادلة المحور الصغير)

$\overline{F_1}(h, k + c), \overline{F_2}(h, k - c) \quad \Rightarrow \overline{F_1}(2,1)\ , \overline{F_2}(2, -7)$ البؤرتان

$\overline{V_1}(h, k + a), \overline{V_2}(h, k - a) \quad \Rightarrow \overline{V_1}(2,2)\ , \overline{V_2}(2, -8)$ الرأسان

الاختلاف المركزي $= e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} < 1$

مثـــال / لـــتكن $Mx^2 + Ny^2 = 400$ معادلـــة قطـــع نـــاقص احـــدى بؤرتيـــه $(3, 0)$ والنســـبة بـــين طـــول محوره الكبير ومحوره الصغير $= \frac{4}{5}$ فجد قيم كل من $M , N \in R$

الحل /

$$Mx^2 + Ny^2 = 400 \quad (\div 400) \quad \Rightarrow \frac{Mx^2}{400} + \frac{Ny^2}{400} = 1 \quad \Rightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{400}{M}\right)} + \frac{y^2}{\left(\frac{400}{N}\right)} = 1$$

$\because$ البؤرة تنتمي لمحور السينات

$\therefore$ القانون $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1} \Leftarrow \boxed{a^2 = \frac{400}{M}} \ \boxed{b^2 = \frac{400}{N}} \ \boxed{c = 3}$

$$\because \frac{2b}{2a} = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow b = \left(\frac{4}{5}\right)a \quad \Rightarrow \boxed{b^2 = \frac{16a^2}{25}}$$

$$\because a^2 = b^2 + c^2 \ \Rightarrow a^2 = \frac{16}{25}a^2 + 9$$

$$\Rightarrow \quad 25a^2 = 16a^2 + 225 \quad \Rightarrow \quad 9a^2 = 225 \quad \Rightarrow \boxed{a^2 = 25}\ ,\ \boxed{b^2 = 16}$$

$$M = \frac{400}{a^2} = \frac{400}{25} \Rightarrow \boxed{M = 16}$$

$$N = \frac{400}{b^2} = \frac{400}{16} \Rightarrow \boxed{N = 25}$$

$\therefore \boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{(معادلة القطع الناقص)}}$

مثـال / جـد معادلـة القطـع النـاقص الـذي مسـاحته $(80\ \pi)$ والـذي يكـون البعـد بـين بؤرتيــه مسـاويا للبعـد بين بؤرة القطع المكافئ $(y^2+24x=0)$ ودليله

الحل / من القطع المكافئ

$y^2=-24x$ (بالمقارنة مع) $y^2=4px$

$\therefore\ 4p=-24 \Rightarrow p=-6 \Rightarrow 2|p|=12$

$2c=12 \Rightarrow c=6 \Rightarrow \boxed{c^2=36}$

من القطع الناقص :

$A=ab\pi \Rightarrow 80\ \pi = ab\pi \Rightarrow ab=80 \Rightarrow b^2=\frac{6400}{a^2}$ (معادلة ①)

$\because a^2=b^2+c^2 \Rightarrow a^2=\frac{6400}{a^2}+36 \Rightarrow a^4-36a^2-6400=0$

$(a^2-100)(a^2+64)=0$

either $\boxed{a^2=100} \Rightarrow \boxed{b^2=64}$ or $\boxed{a^2=-64}$ يهمل

$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1}$ (معادلة القطع الناقص الأولى) , $\boxed{\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100}=1}$ (معادلة القطع الناقص الثانية)

مثال / أذا كانت $\frac{y^2}{3M-2}-x=0$ معادلة قطع مكافئ دليله يمر بالنقطة $(-1,2)$ جد معادلة القطع النـاقص الذي أحد بؤرتيه $(0,M)$ ومربع طول النسبة بين محوريه $=\frac{3}{4}$

الحل / من القطع المكافئ نلاحظ أن القطع المكافئ من النوع السيني لذا فأن معادلة الدليل له

$(x=-p=-[-1] \Rightarrow \boxed{x=1})$ لأنه يقع على المحور السيني

$y^2=(3M-2)x \xrightarrow{\text{(بالمقارنة مع)}} y^2=4px \Rightarrow (3M-2)=4p \Rightarrow 3M-2=4 \Rightarrow \boxed{M=2}$

من القطع الناقص : بؤرتاه $(0,2)\ ,\ (0,-2)$ والقانون هو $\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$

$\because \frac{4b^2}{4a^2}=\frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{b^2=\frac{3}{4}a^2}$, $\boxed{c^2=4}$

$\because a^2=b^2+c^2 \Rightarrow a^2=\frac{3}{4}a^2+4 \Rightarrow 4a^2=3a^2+16 \Rightarrow \boxed{a^2=16}$, $\boxed{b^2=12}$

$\therefore$ $\boxed{\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{16}=1}$ (معادلة القطع الناقص)

مثال / جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه $F_1(-\sqrt{6},0)$, $F_2(\sqrt{6},0)$ ويمر خلال بؤرة القطع المكافئ $y^2-12x+2y-11=0$

الحل / من القطع المكافئ

نرتب المعادلة بحيث تكون حدود (y) في طرف وحدود (x) في الطرف الأخر $y^2+2y=12x+11$

نضيف (1) الى طرفي معادلة القطع المكافئ حتى تكون حدود(y) بشكل مربع كامل

$$y^2+2y+1=12x+11+1 \quad \Rightarrow (y+1)^2=12x+12 \quad \Rightarrow (y+1)^2=12(x+1)$$

بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع المكافئ $(y-k)^2=4p(x-h)$ نحصل على

$\boxed{h=-1}$, $\boxed{k=-1}$ $\Rightarrow (h,k)=(-1,-1)$الرأس

$\because\ 4p=12 \quad \Rightarrow \boxed{p=3} \quad \Rightarrow F(p+h,k)=F(3-1,-1)=F(2,-1)$ (تحقق معادلة القطع الناقص)

من القطع الناقص :

$\because$ بؤرتي القطع الناقص $(-\sqrt{6},0),(\sqrt{6},0)$ $\Leftarrow$ القانون هو $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$ $\boxed{c^2=6}$

$\therefore$ النقطة $(2,-1)$ تحقق معادلة القطع الناقص لأنه يمر بها (بؤرة القطع المكافئ)

$$\frac{4}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1 \xrightarrow{(\times a^2b^2)} 4b^2+a^2=a^2b^2$$ (معادلة ①)

$\because\ a^2=b^2+c^2 \quad \Rightarrow \quad a^2=b^2+6$ (نعوض في معادلة ①)

$$4b^2+b^2+6=(b^2+6)b^2 \quad \Rightarrow 5b^2+6=b^4+6b^2 \quad \Rightarrow b^4+b^2-6=0$$

$$(b^2+3)(b^2-2)=0$$

either $\boxed{b^2=2} \Rightarrow \boxed{a^2=8}$ *or* $\boxed{b^2=-3}$ يهمل

$\therefore$ $\boxed{\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1}$ (معادلة القطع الناقص)

مثـال / جـد أحـداثي البـؤرتين والرأســين والقطبـين وطـول ومعادلـة كـل مـن المحـورين للقطـع الناقص $(4x^2-8x+9y^2+36y+4=0)$ ثم جد قيمة e ؟

الحل / نرتب المعادلة بحيث تكون حدود (x) وحدود (y) مربع كامل وكما يلي :

$$4x^2-8x+9y^2+36y=-4 \quad \Rightarrow \quad 4(x^2-2x)+9(y^2+4y)=-4$$

بإضافة (40) الى طرفي معادلة القطع الناقص حتى تكون حدود(x) وحدود (y) بشكل مربع كامل

$$4(x^2-2x+1)+9(y^2+4y+4)=-4+40 \qquad \Rightarrow 4(x-1)^2+9(y+2)^2=36 \quad (\div 36)$$

$\Rightarrow \boxed{\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1}$ معادلة القطع الناقص

بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع الناقص $\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}$ **نحصل على**

$\boxed{h=1}$, $\boxed{k=-2}$ $\Rightarrow (h,k)=(1,-2)$ مركز القطع الناقص

$a^2=9 \Rightarrow \boxed{a=3}$, $b^2=4 \Rightarrow \boxed{b=2}$, $c^2=5 \Rightarrow \boxed{c=\sqrt{5}}$

$2c=2(\sqrt{5})=2\sqrt{5}$ وحدة (المسافة بي البؤرتين)

$y=k \Rightarrow y=-2$ (معادلة المحور الكبير) , $x=h \Rightarrow x=1$ (معادلة المحور الصغير)

$\overline{F_1}(h+c,k)$,$\overline{F_2}(h-c,k)$ $\Rightarrow \overline{F_1}(1+\sqrt{5},-2)$,$\overline{F_2}(1-\sqrt{5},-2)$ البؤرتان

$\overline{V_1}(h+a,k)$,$\overline{V_2}(h-a,k)$ $\Rightarrow \overline{V_1}(4,-2)$,$\overline{V_2}(-2,-2)$ الرأسان

الاختلاف المركزي $= e=\frac{\sqrt{5}}{3}<1$

مثال / جد أحداثي البؤرتين والرأسين والقطبين و طول ومعادلة كل من المحورين ومقدار الاختلاف المركزي ومعادلة القطع الناقص الذي مركزه $(1,-4)$ ومحوره الكبير يوازي محور الصادات وأحدى بؤرتيه تبعد عن الرأسين بالبعدين $2, 10$ وحدة طول

الحل / ∵ مجموع البعدين $=2a$ والفرق بين البعدين $=2c$

$2a=2+10 \Rightarrow 2a=12 \Rightarrow \boxed{a=6}$, $2c=10-2 \Rightarrow 2c=8 \Rightarrow \boxed{c=4}$

∵ محوره الكبير يوازي محور الصادات ⇐ المعادلة القياسية للقطع الناقص $\boxed{\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1}$

$\because a^2=b^2+c^2 \Rightarrow b^2=a^2-c^2 \Rightarrow b^2=36-16 \Rightarrow \boxed{b^2=20}$ $\boxed{h=1}$ $\boxed{k=-4}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{(x-1)^2}{20}+\frac{(y+4)^2}{36}=1}$ معادلة القطع الناقص

$2c = 2(4) = 8$ وحدة (المسافة بي البؤرتين)

$x = h \Rightarrow x = 1$ (معادلة المحور الكبير) , $y = k \Rightarrow y = -4$ (معادلة المحور الصغير)

$\overline{F_1}(h, k+c), \overline{F_2}(h, k-c) \quad \Rightarrow \overline{F_1}(1,0) \ , \overline{F_2}(1,-8)$ البؤرتان

$\overline{V_1}(h, k+a), \overline{V_2}(h, k-a) \quad \Rightarrow \overline{V_1}(1,2) \ , \overline{V_2}(1,-10)$ الرأسان

الاختلاف المركزي $= e = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} < 1$

****

واجبات

س 1 : جد أحداثي البؤرتين والرأسين والقطبين و طول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الناقصة التالية :

$(a) \quad 25x^2 + 9y^2 = 225$

$(b) \quad 4x^2 + y^2 = 16$

$(c) \quad 12x^2 + 25y^2 = 300$

س 2 : بأستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ الذي :

(أ) بؤرتاه النقطتان $(\pm 3, 0)$ ورأساه النقطتان $(\pm 6, 0)$ ومركزه نقطة الاصل .

(ب) بؤرتاه تقعان على محور السينات ومركزه نقطة الاصل وأحدى بؤرتيه تبعد عن الرأســـــــــــين بالبعدين 2, 8 وحدة طول .

القطع الزائد: (الرأس في نقطة الأصل) :

هو مجموعـــة نقاط المســتوي $P(x,y)$ التي تكون القيمة المطلقة لفرق بعدي اي منها عن نقطتين ثـابتتين تسمى (البؤرتين) يساوي عددا ثابتا قيمته $(2a)$

معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنتميان لمحور السينات (x-axis) ومركزه نقطة الأصل

$\because \ |PF_1 - PF_2| = 2a$ (حسب تعريف القطع الزائد)

$PF_1 - PF_2 = \pm 2a$

$\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2} - \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2} = \pm 2a$

$\sqrt{(x-c)^2+y^2} - \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \pm 2a$

$\sqrt{(x-c)^2+y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2+y^2}$ (بتربيـــــع الطرفين)

$(x-c)^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2 + y^2$

$(x-c)^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + (x+c)^2$

$x^2-2cx+c^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} + x^2+2cx+c^2$

$\pm 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 4a^2+4cx$ $(\div 4)$

$\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = a^2+cx$ (بتربيـــــع الطرفين)

$a^2(x^2+2cx+c^2+y^2) = a^4+2a^2cx+c^2x^2$

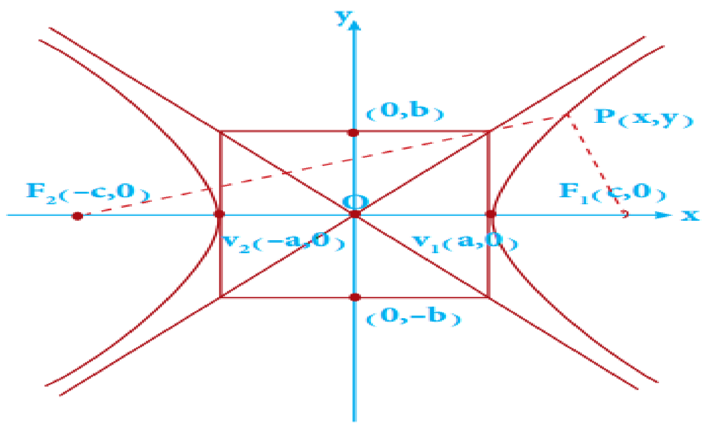
$a^2x^2+2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2 = a^4+2a^2cx+c^2x^2$

$a^2x^2+a^2y^2-c^2x^2 = a^4-a^2c^2$

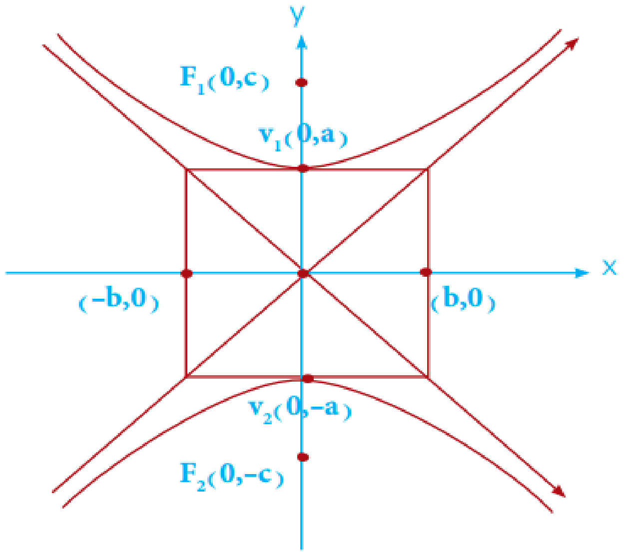
$x^2(a^2-c^2)+a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$ [نفرض $a^2-c^2=-b^2$ حيث $b>0$]

$-x^2b^2+a^2y^2 = -a^2b^2$ $(\div \ -a^2b^2)$

$\frac{-x^2b^2}{-a^2b^2}+\frac{a^2y^2}{-a^2b^2}=\frac{-a^2b^2}{-a^2b^2} \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$ (معادلة القطع الناقص)



- **رأسا القطع الزائـد هما $(a,0)$, $(-a,0)$ وبؤرتاه هي $(c,0)$, $(-c,0)$ والمعادلة $\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$**
- **بنفس الأسلوب يمكننا أيجاد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه تنتميان لمحور الصادات وهي $\boxed{\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1}$ حيث أن رأسا القطع الزائد هما $(0,a)$, $(0,-a)$ وبؤرتاه هي $(0,c)$, $(0,-c)$**



ملاحظات :

① دائما $(c > b)$, $(c > a)$ حيث أن $(a, b, c > 0)$

② طول المحور الحقيقي $= 2a$

③ طول المحور المرافق $= 2b$

④ البعد بين البؤرتين $= 2c$

⑤ الاختلاف المركزي $\left(e = \frac{c}{a}\right)$ حيث يلاحظ أنه يكون $(e > 1)$

⑥ دائما يكون $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$

⑦ النقطة التي تقع على احد المحورين ويمر بها القطع الزائد تمثل رأسي القطع الزائد وتمثل قيمة (a)

⑧ تسمى المسافة بين بؤرة القطع الزائد واي نقطة تنتمي للقطع (منتصف القطر البؤري)

مثال (19)/ عين البؤرتين والرأسين وطول كل من المحورين الحقيقي والمرافق للقطع الزائد $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$

الحل/

$\because a^2 = 64 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow 2a = 16$ وحدة طول المحور الحقيقي

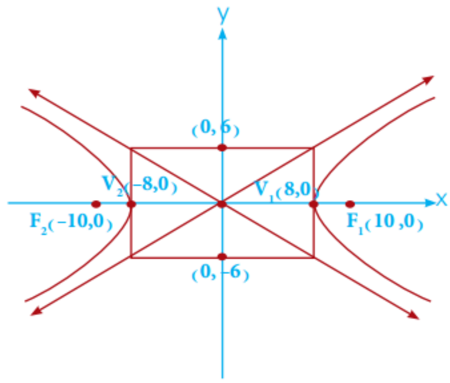
$\because b^2 = 36 \Rightarrow b = 6 \Rightarrow 2b = 12$ وحدة طول المحور المرافق

$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 64 + 36 \Rightarrow c^2 = 100 \Rightarrow \boxed{c = 10}$

$V_1(8, 0), V_2(-8, 0)$ رأسا القطع الزائد

$P_1(0, 6), P_2(0, -6)$ قطبا القطع الزائد

$F_1(10, 0), F_2(-10, 0)$ بؤرتا القطع الزائد



مثال (20)/ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وطول محوره الحقيقي $=6$ وحدات والاختلاف المركزي يساوي (2) والبؤرتان على محور السينات

الحل/

$\because 2a = 6 \quad \Rightarrow a = 3 \quad \Rightarrow \boxed{a^2 = 9}$

$\because e = \dfrac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad 2 = \dfrac{c}{3} \quad \Rightarrow \quad c = (2)(3) \quad \Rightarrow c = 6 \quad \Rightarrow \boxed{c^2 = 36}$

$\therefore c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow b^2 = 36 - 9 \quad \Rightarrow \boxed{b^2 = 27}$

$\therefore \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{27} = 1$ معادلة القطع الزائد

مثال (21)/ جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وطول محوره المرافق (4) وحدات وبؤرتاه هـــما النقطتان $F_1(0, \sqrt{8}),\ F_2(0, -\sqrt{8})$

الحل/ $\because$ البؤرتان تنتمي لمحور الصادات

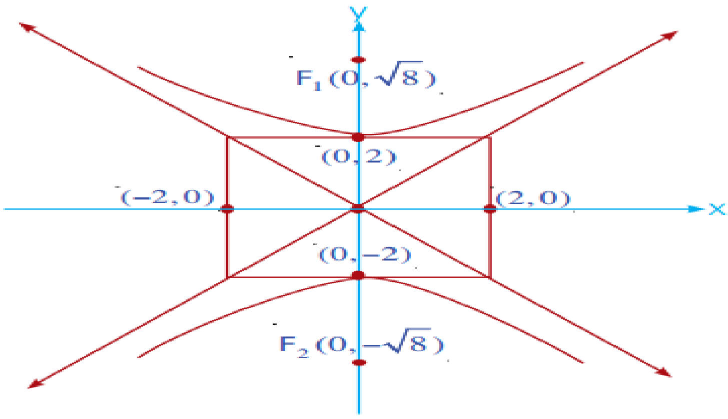
$\therefore$ المعادلة القياسية للقطع الزائد هي $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$

$\because 2b = 4 \quad \Rightarrow b = 2 \quad \Rightarrow \boxed{b^2 = 4}$

$\because c = \sqrt{8} \quad \Rightarrow \boxed{c^2 = 8}$

$\because c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow a^2 = 8 - 4 \quad \Rightarrow \boxed{a^2 = 4}$

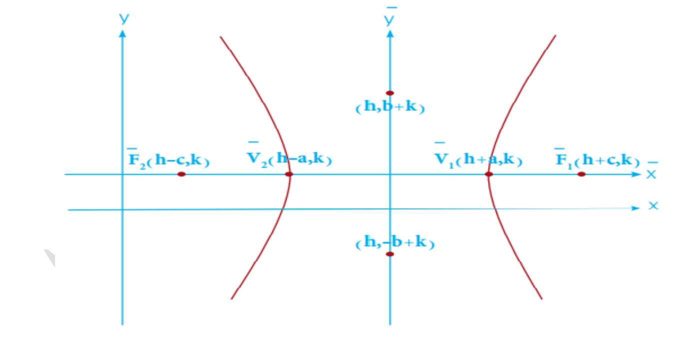
$\therefore \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{4} = 1$ معادلة القطع الزائد



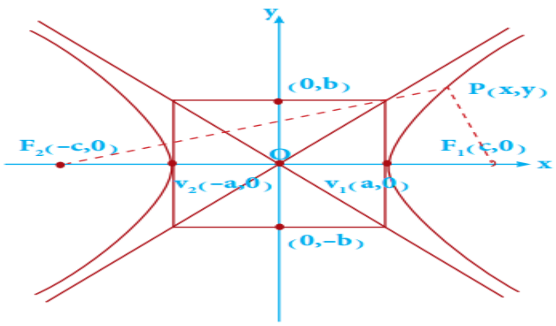
في المثال (21) أعلاه نلاحظ أن طول المحور الحقيقي مساوٍ الى طول المحور المرافق مثل هذا النوع من القطوع الزائدة يدعى (بالقطع الزائد القائم او متساوي الأضلاع) لأن النقاط الأربعة تشكل رؤوس مربع وفيه يكون الاختلاف المركزي (e) مقدار ثابت قيمته $(\sqrt{2})$.

القطع الزائد: (أنسحاب محاوره) :

①المعادلة القياسية للقطع الزائد الذى مركزه النقطة (h,k) ومحوره الحقيقي يوازي محور السينات:



بعد الأنسحاب

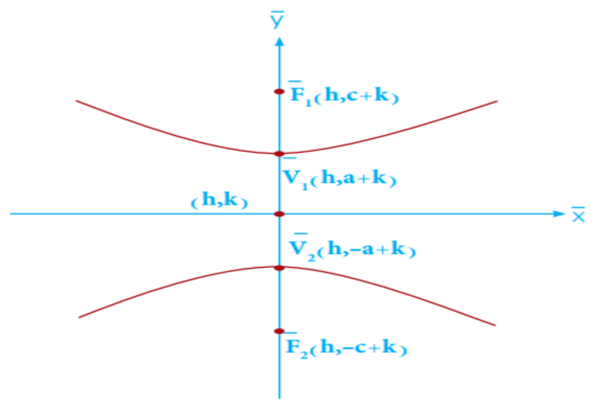


قبل الأنسحاب

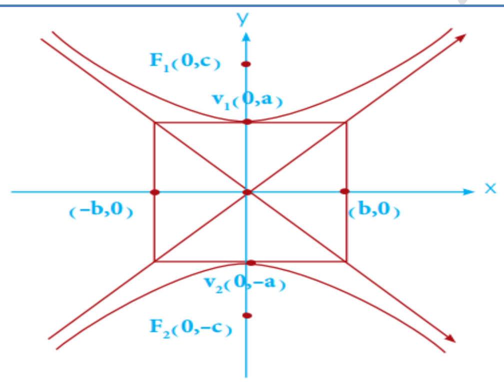
بعد الأنسحاب	قبل الأنسحاب	العنصر
$\bar{V}(h \pm a, k)$	$(\pm a\,, 0)$	الرأسان
$\bar{F}(h \pm c, k)$	$(\pm c\,, 0)$	البؤرتان
(h, k)	$(0, 0)$	المركز
$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	القانون

============================

②المعادلة القياسية للقطع الزائد الذى مركزه النقطة (h,k) ومحوره الحقيقي يوازي محور الصادات :



بعد الأنسحاب



قبل الأنسحاب

بعد الأنسحاب	قبل الأنسحاب	العنصر
$\bar{V}(h, k \pm a)$	$(\,0, \pm a)$	الرأسان
$\bar{F}(h, k \pm c)$	$(\,0, \pm c)$	البؤرتان
(h, k)	$(0, 0)$	المركز
$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$	القانون

ملاحظات :

① معادلة المحور للقطع الزائد الذي يوازي محور السينات هي $(y = k)$

② معادلة المحور للقطع الزائد الذي يوازي محور الصادات هي $(x = h)$

③ احداثيات القطبين او نهايتي المحور الصغير للقطع الزائد الذي يوازي محور السينات هي $(h, k \pm b)$

④ احداثيات القطبين او نهايتي المحور الصغير للقطع الزائد الذي يوازي محور الصادات هي $(h \pm b, k)$

⑤ ستقتصر دراستنا في موضوع الانسحاب على أيجاد مركز القطع الناقص وبؤرتاه والراسان وطول محوريه الكبير والصغير ومعادلة كل من المحورين وايجاد الاختلاف المركزي .

مثال (22)/ جد أحداثيا المركز والبؤرتين والرأسين و الاختلاف المركزي و طول المحورين للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{(x+2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

الحل/ بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع الزائد $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$

$\boxed{h = -2}$, $\boxed{k = 1}$ $\Rightarrow (h, k) = (-2,1)$ مركز القطع الزائد

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow 2a = 6$ وحدة طول المحور الحقيقي

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow 2b = 4$ وحدة طول المحور المرافق

$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 4 = 13 \Rightarrow c^2 = 13 \Rightarrow \boxed{c = \sqrt{13}}$

$\overline{F_1}(h + c, k), \overline{F_1}(h - c, k) \Rightarrow \overline{F_1}(-2 + \sqrt{13}, 1), \overline{F_2}(-2 - \sqrt{13}, 1)$ البؤرتان

$\overline{V_1}(h + a, k), \overline{V_2}(h - a, k) \Rightarrow \overline{V_1}(1,1), \overline{V_2}(-5,1)$ الرأسان

$\therefore e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3} > 1$ الاختلاف المركزي

تمارين $(3-2)$

س 1 / عين كل من البؤرتين والرأسين ثم جد طول كل من المحورين والأختلاف المركزي للقطوع الزائدة الاتية :

ⓐ $12x^2 - 4y^2 = 48$

الحل/ نقسم طرفي المعادلة على (48)

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$$

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 2a = 4$ وحدة طول المحور الحقيقي

$b^2 = 12 \Rightarrow b = 2\sqrt{3} \Rightarrow 2b = 4\sqrt{3}$ وحدة طول المحور المرافق

$\because c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 4 + 12 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow \boxed{c = 4}$

$V_1(2,0), V_2(-2,0)$ الرأسان $F_1\ (4,0), F_2(-4,0)$ البؤرتان

$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{2} = 2 > 1$ الاختلاف المركزي

ⓑ $16x^2 - 9y^2 = 144$

الحل/ نقسم طرفي المعادلة على (144)

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow 2a = 6$ وحدة طول المحور الحقيقي

$b^2 = 16 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow 2b = 8$ وحدة طول المحور المرافق

$\because c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 9 + 16 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow \boxed{c = 5}$

$V_1(3,0), V_2(-3,0)$ الرأسان $F_1\ (5,0), F_2(-5,0)$ البؤرتان

$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} > 1$ الاختلاف المركزي

وزاري 2011 / د2

ⓒ $2(y+1)^2 - 4(x-1)^2 = 8$

الحل/ نقسم طرفي المعادلة على (8)

$\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{2} = 1 \xrightarrow{\text{بالمقارنة مع}} \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$

$\boxed{h=1}$, $\boxed{k=-1}$ $\Rightarrow (h,k) = (1,-1)$ مركز القطع الزائد

$a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 2a = 4$ وحدة طول المحور الحقيقي

$b^2 = 2 \Rightarrow b = \sqrt{2} \Rightarrow 2b = 2\sqrt{2}$ وحدة طول المحور المرافق

$\because c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 4 + 2 = 6 \Rightarrow \boxed{c = \sqrt{6}}$

$\overline{F_1}(h, k+c), \overline{F_2}(h, k-c) \Rightarrow \overline{F_1}(1, -1+\sqrt{6}), \overline{F_2}(1, -1-\sqrt{6})$ البؤرتان

$\overline{V_1}(h, k+a), \overline{V_2}(h, k-a) \Rightarrow \overline{V_1}(1,1), \overline{V_2}(1,-3)$ الرأسان

$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{2} > 1$ الاختلاف المركزي

ⓓ $16x^2 + 160x - 9y^2 + 18y = 185$

الحل/ نرتب معادلة القطع الزائد بشكل مربع كامل كما يلي :

$\Rightarrow 16(x^2 + 10x) - 9(y^2 - 2y) = 185$

بإضافة (391) الى طرفي معادلة القطع الزائد حتى تكون حدود(x) وحدود (y) بشكل مربع كامل

$16(x^2 + 10x + 25) - 9(y^2 - 2y + 1) = 391 + 185$

$16(x+5)^2 - 9(y-1)^2 = 576 \Rightarrow \frac{16(x+5)^2}{576} - \frac{9(y-1)^2}{576} = \frac{576}{576}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{(x^2+5)}{36} - \frac{(y-1)^2}{64} = 1}$ معادلة القطع الزائد

بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع الزائد $\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$ نحصل على

$\boxed{h=-5}$, $\boxed{k=1}$ $\Rightarrow (h,k) = (-5,1)$ مركز القطع الزائد

$a^2 = 36 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow 2a = 12$ وحدة طول المحور الحقيقي

$b^2 = 64 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow 2b = 16$ وحدة طول المحور المرافق

$\because c^2 = a^2 + b^2 = 36 + 64 \Rightarrow c^2 = 100 \Rightarrow \boxed{c = 10}$

$\overline{F_1}(h+c, k), \overline{F_2}(h-c, k) \Rightarrow \overline{F_1}(5, 1), \overline{F_2}(-15, 1)$ البؤرتان

$\overline{V_1}(h+a, k), \overline{V_2}(h-a, k) \Rightarrow \overline{V_1}(1,1), \overline{V_2}(-11,1)$ الرأسان

$e = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} > 1$ الاختلاف المركزي

س 2 / أكتب معادلة القطع الزائد في الحالات التالية ثم ارسم القطع :

ⓐ البؤرتان هما النقطتان $(\pm 5, 0)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x = \pm 3$ ومركزه في نقطة الاصل .

الحل/

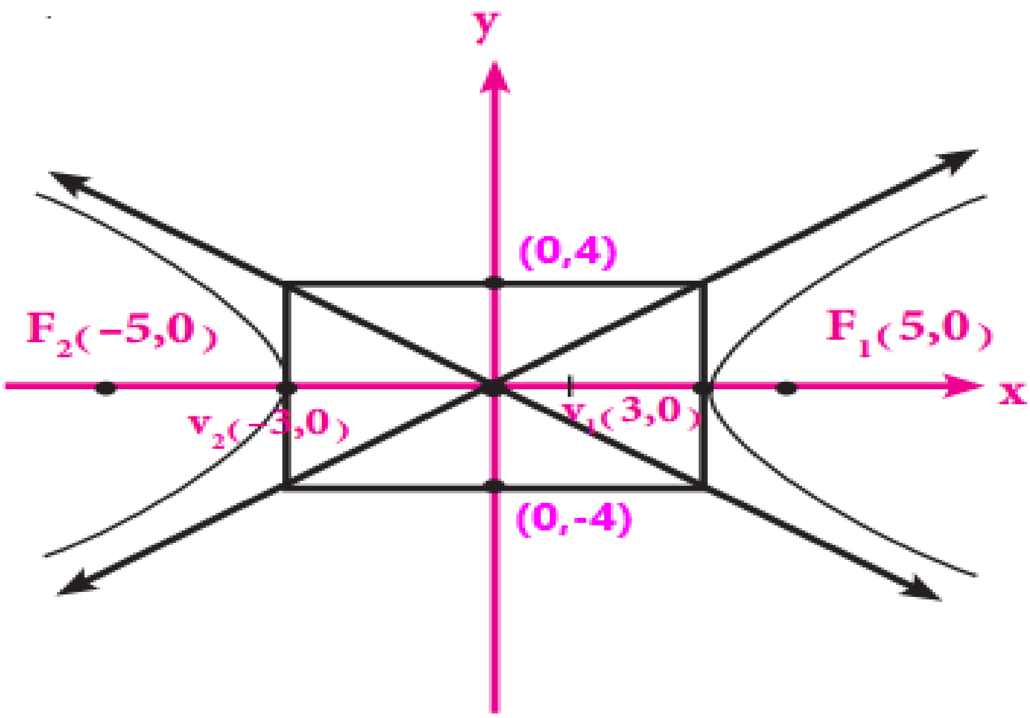
$\because$ بؤرتا القطع الزائد $F_1(-5\,,0), F_2\,(5\,,\,0)$ $\Leftarrow$ $\boxed{c = 5}$ $\Leftarrow$ القانون $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$

$\because$ القطع الزائد يتقاطع مع محور السينات عند $x = \pm 3$

$\therefore$ الراسان $(-3\,,0)\;(3\,,\,0)$ $\Leftarrow$ $\boxed{a^2 = 9}$

$$\because c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 \quad \Rightarrow b^2 = 25 - 9 \quad \Rightarrow \boxed{b^2 = 16}$$

$$\therefore \boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{(معادلة القطع الزائد)}}$$



ⓑ طـول محـوره الحقيقـي (12) وحـدة وطـول محـوره المرافـق (10) وحـدات وينطبـق محـوراه علـى المحورين الاحداثيين ومركزه نقطة الاصل .

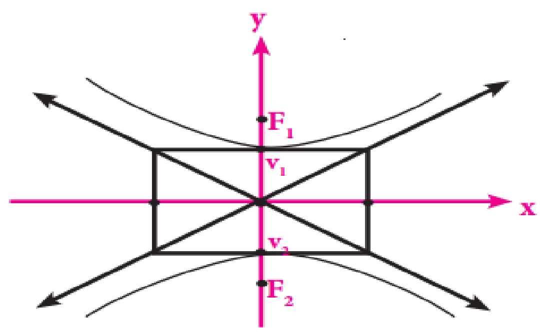
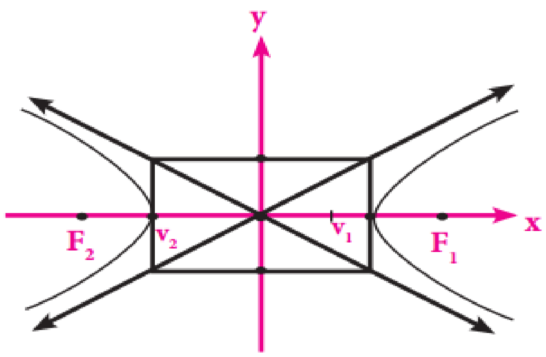
الحل/

$\because 2a = 12 \quad \Rightarrow a = 6 \quad \Rightarrow \boxed{a^2 = 36}$

$\because 2b = 10 \quad \Rightarrow b = 5 \quad \Rightarrow \boxed{b^2 = 25}$

$\because c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 36 \Rightarrow \boxed{C^2 = 61}$

$\therefore$ هنـــاك حالتيـــــن للقطع الزائـــــد وهما :-

عندما يوازي محور الصادات	عندما يوازي محور السينات
الرأسان $F_1(0\,,\sqrt{61}\,), F_2(0\,,-\sqrt{61}\,)$	الرأسان $F_1(\sqrt{61}\,,0), F_2(-\sqrt{61}\,,0)$
البؤرتان $V_1(0,6),\ V_2(0,-6)$	البؤرتان $V_1(6\,,0), FV_2(-6\,,0)$
معادلة القطع الزائد $\dfrac{y^2}{36} - \dfrac{x^2}{25} = 1$	معادلة القطع الزائد $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{25} = 1$
	

ⓒ مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور الصادات وطول محوره المرافق $(2\sqrt{2})$ وحدة واختلافه المركزي يساوي (3)   وزاري / 2013 / د2

الحل/ $\because$ بؤرتا القطع الزائد تنتمي لمحور الصادات $\Leftarrow$ القانون $\boxed{\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1}$

$\because 2b = 2\sqrt{2} \quad \Rightarrow b = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \boxed{b^2 = 2}$

$\because e = \dfrac{c}{a} \quad \Rightarrow 3 = \dfrac{c}{a} \quad \Rightarrow c = 3a$

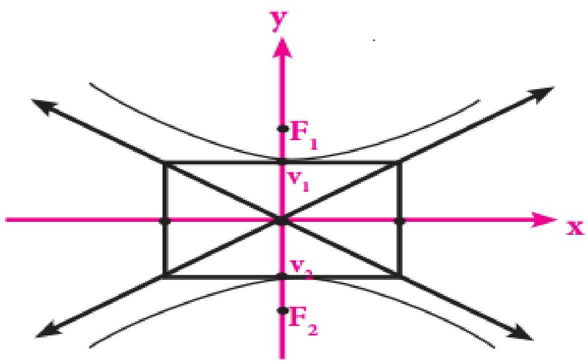
$\because c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow 9a^2 = a^2 + 2$

$\Rightarrow 8a^2 = 2 \quad \Rightarrow \boxed{a^2 = \dfrac{1}{4}}\ ,\ \boxed{C^2 = \dfrac{9}{4}}$

البؤرتان $F(0,\pm C) = \left(0\,,\dfrac{3}{2}\right)\left(0\,,\dfrac{-3}{2}\right)$

الراسان $V(0,\pm a) = \left(0\,,\dfrac{1}{2}\right)\left(0\,,\dfrac{-1}{2}\right)$

$\therefore \boxed{\dfrac{y^2}{\left(\frac{1}{4}\right)} - \dfrac{x^2}{2} = 1}$ (معادلة القطع الزائد)



س 3 / جد باستخدام تعريف القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتيه $(2\sqrt{2}\,,0)(-2\sqrt{2}\,,0)$ وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين والقيمة المطلقة للفرق بين بعدي اية نقطة عن بؤرتيه يساوي (4) وحدات

الحل/

$\because 2a = 4 \quad \Rightarrow a = 2$

نفرض ان النقطة $P(x\,,y) \ni$ للقطع الزائد

$|PF_1 - PF_2| = 2a$ (من تعريف القطع الزائد)

$\Rightarrow \quad PF_1 - PF_2 = \pm 2a$

$$\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+2\sqrt{2})^2 + (y-0)^2} = \pm 4$$

$$\sqrt{(x-2\sqrt{2})^2 + y^2} = \pm 4 + \sqrt{(x+2\sqrt{2})^2 + y^2}$$ (بتربيع الطرفين وفك الأقواس)

$$(x-2\sqrt{2})^2 + y^2 = 16 \pm 8\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2 + y^2} + (x+2\sqrt{2})^2 + y^2$$

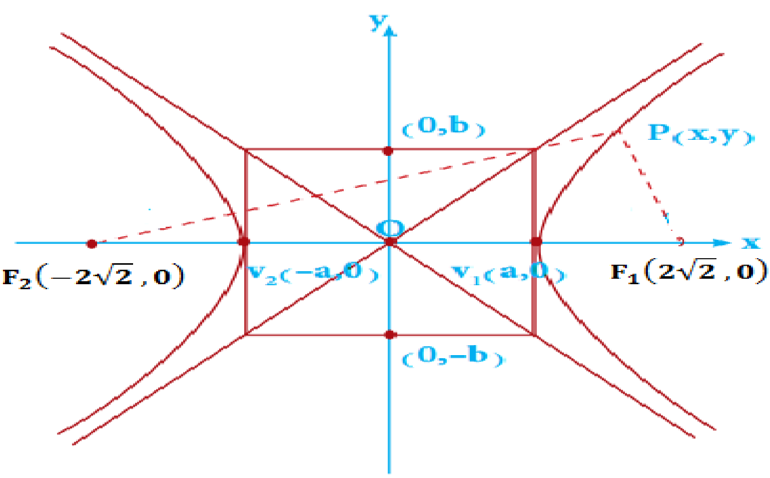
$$x^2 - 4\sqrt{2}\,x + 8 + y^2 = 16 \pm 8\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2 + y^2} + x^2 + 4\sqrt{2}\,x + 8 + y^2$$

$$\pm 8\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2 + y^2} = 16 + 8\sqrt{2}\,x \qquad (\div 8)$$

$$\pm\sqrt{(x+2\sqrt{2})^2 + y^2} = 2 + \sqrt{2}\,x$$ (بتربيع الطرفين وفك الأقواس)

$$x^2 + 4\sqrt{2}\,x + 8 + y^2 = 4 + 4\sqrt{2}\,x + 2x^2$$

$$x^2 - y^2 = 4 \quad] \quad (\div 4) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1}$$ معادلة القطع الزائد



س 4 / قطع زائد طول محوره الحقيقي (6) وحدات واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي راسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين $(1\,,2\sqrt{5})(1\,,-2\sqrt{5})$. جد معادلتي القطع المكافئ الذي راسه نقطة الاصل والقطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل . وزاري 2013 / د3 وزاري 2014 / د1

الحل/ من القطع المكافئ :

$\because$ النقطتان $(1\,,2\sqrt{5})(1\,,-2\sqrt{5})$ متناظرة مع المحور السيني لذا فالبؤرة تنتمي للمحور السيني

والقانون $(y^2 = 4px)$

$\therefore$ النقطة $(1\,,2\sqrt{5})$ تحقق معادلة القطع المكافئ (لأنه يمر بها)

$20 = 4p(1) \Rightarrow 4p = 20 \Rightarrow \boxed{p = 5} \Rightarrow (5\,,0)$ البؤرة

$\Rightarrow \boxed{y^2 = 20x \quad \text{(معادلة القطع المكافئ)}}$

في القطع الزائد:

$\because 2a = 6 \quad \Rightarrow a = 3 \quad \Rightarrow \boxed{a^2 = 9}$

$\because$ بؤرتا القطع الزائد $(5\,,0)(-5\,,0) \Rightarrow \boxed{c^2 = 25} \Rightarrow$ القانون $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$

$\because c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 \quad \Rightarrow b^2 = 25 - 9 \quad \Rightarrow \boxed{b^2 = 16}$

$\therefore \boxed{\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1 \quad \text{(معادلة القطع الزائد)}}$

س 5 / قطع زائد مركزه نقطة الاصـــــل ومعادلته $hx^2 - ky^2 = 90$ وطول محوره الحقيقي $(6\sqrt{2})$ وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع النـاقص الذي معادلتـه $9x^2 + 16y^2 = 576$ جـــد قيمـــة كل من $h\,,k$ التي تنتمي الى مجموعة الاعداد الحقيقية وزاري 2012 / د2

الحل/ من القطع الناقص :

$9x^2 + 16y^2 = 576 \quad] \quad (\div 576) \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$

$\therefore \boxed{a^2 = 64} \boxed{b^2 = 36} \quad \Rightarrow \quad a^2 = b^2 + c^2 \quad \Rightarrow c^2 = 64 - 36 \quad \Rightarrow \boxed{c^2 = 28} \Rightarrow \boxed{c = 2\sqrt{7}}$

$\therefore$ بؤرتا القطع الناقص $(2\sqrt{7}\,,\ 0)\ (-2\sqrt{7}, 0)$

من القطع الزائد :

بؤرتا القطع الزائد $(2\sqrt{7}\,,\ 0)\ (-2\sqrt{7}, 0) \Leftarrow \boxed{c = 2\sqrt{7}} \Leftarrow$ القانون $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$

$\because\ 2a = 6\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 3\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a^2 = 18}$

$\because c^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow b^2 = 28 - 18 \quad \Rightarrow \boxed{b^2 = 10} \quad \Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{10} = 1 \quad \text{معادلة القطع الزائد}}$

$\because\ hx^2 - ky^2 = 90 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{\left(\frac{90}{h}\right)} - \frac{y^2}{\left(\frac{90}{k}\right)} = 1$

$\because\ a^2 = \frac{90}{h} \quad \Rightarrow h = \frac{90}{a^2} = \frac{90}{18} \quad \Rightarrow \boxed{h = 5}$

$\because\ b^2 = \frac{90}{k} \quad \Rightarrow k = \frac{90}{10} \quad \Rightarrow \boxed{k = 9}$

س 6 / اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصـــل اذا علمت ان احـــد راسيه يبعد عن البؤرتين بالعددين $1,9$ وحدات على الترتيب وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين . وزاري 2012 / د3

الحل/

$2c = 1 + 9 \Rightarrow 2c = 10 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow \boxed{c^2 = 25}$

$a = 5 - 1 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow \boxed{a^2 = 16}$

$\because c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 \Rightarrow \boxed{b^2 = 9}$

∴ هناك أحتمـــــــــالين لمعادلة القطع الزائد

$\boxed{\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1}$ معادلة القطع الزائد صادية or $\boxed{\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1}$ معادلة القطع الزائد سينية

س 7 / جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الزائد الذي معادلته $x^2 - 3y^2 = 12$ والنسبة بين طولي محوريه $= \frac{5}{3}$ ومركزه نقطة الاصل . وزاري 2013 / د3

الحل/ من القطع الزائد :

$x^2 - 3y^2 = 12 \quad] \ (\div 12) \Rightarrow \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$

$\therefore \boxed{a^2 = 12}, \boxed{b^2 = 4} \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 12 + 4 \Rightarrow \boxed{c^2 = 16} \Rightarrow \boxed{c = 4}$

∴ بؤرتا القطع الزائد $(4, 0)\ (-4, 0)$

من القطع الناقص :

بؤرتا القطع الناقص $(4, 0)\ (-4, 0) \Rightarrow \boxed{c = 4} \Rightarrow$ القانون $\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$

$\because \frac{2a}{2b} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{25}{9} \Rightarrow \boxed{a^2 = \frac{25\,b^2}{9}}$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \frac{25\,b^2}{9} = b^2 + 16 \overset{(.9)}{\Longrightarrow} 25\,b^2 = 9\,b^2 + 144 \Rightarrow 16b^2 = 144 \Rightarrow \boxed{b^2 = 9}$

$a^2 = \frac{25\,b^2}{9} = \frac{25\,(9)}{9} \Rightarrow \boxed{a^2 = 25}$

$\therefore \boxed{\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1}$ معادلة القطع الناقص

س 8 / النقطة $p(6\,,L)$ تنتمي الى القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ومعادلته $x^2-3y^2=12$ جد كلا من:

أ. قيمة L ب. طول نصف القطر البؤري للقطع المرسوم في الجهة اليمنى من النقطة p

الحل/ (أ) ∵ النقطة $p(6\,,L)$ تنتمي الى القطع الزائد

∴ النقطة $p(6\,,L)$ تحقق معادلة القطع الزائد $(x^2-3y^2=12)$

$(6)^2-3L^2=12 \Rightarrow 36-12=3L^2 \Rightarrow 24=3L^2 \Rightarrow \boxed{L^2=8} \Rightarrow \boxed{L=\pm2\sqrt{2}}$

$\therefore\ P_1(6\,,2\sqrt{2})\,,\quad P_2(6\,,-2\sqrt{2})$

(ب) من القطع الزائد :

$x^2-3y^2=12 \Rightarrow \frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow \boxed{a^2=12}\ \boxed{b^2=4}$

$\because c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=12+4 \Rightarrow \boxed{c^2=16} \Rightarrow$ احداثي البؤرة الايمن $(4,0)$

$P_1F_1=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(6-4)^2+(2\sqrt{2}-0)^2}=\sqrt{4+8}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ (وحدة طول)

$P_2F_1=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{(6-4)^2+(-2\sqrt{2}-0)^2}=\sqrt{4+8}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ (وحدة طول)

وزاري 2011 / د1 وزاري 2014 / د2 وزاري 2015 / د1

س 9 / جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه همـا بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ ويمس دليل القطع المكافئ $x^2+12y=0$

الحل/ من القطع المكافئ :

$x^2=-12y$ (بالمقارنة مع) $x^2=-4py$

$-4p=-12 \Rightarrow \boxed{p=3}$

$y=p \Rightarrow \boxed{y=3}$ (معادلة الدليل)

من القطع الناقص :

$\boxed{a^2=25}\,,\ \boxed{b^2=9} \Rightarrow a^2=b^2+c^2 \Rightarrow \boxed{c^2=16} \Rightarrow c=4$

$\Rightarrow (0\,,4)(0\,,-4)$ البؤرتان

من القطع الزائد:

∵ دليل القطع المكافئ يقطع المحور الصادي عند النقطة $(0\,,3)$ وهي راس القطع الزائد

$\therefore \boxed{a=3} \Rightarrow \boxed{a^2=9}$

بؤرتا القطع الزائد $(0\,,4)(0\,,-4) \Rightarrow \boxed{c=4} \Rightarrow$ القانون $\boxed{\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1}$

$\Rightarrow c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b^2=16-9 \Rightarrow \boxed{b^2=7} \Rightarrow$ معادلة القطع الزائد $\boxed{\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1}$

أمثلة أضافية محلولة

مثال / جد أحداثيا المركز والبؤرتين والرأســـين و الأختلاف المركزي و طول المحورين للقطع الزائد الذي معادلته $4x^2-16x-9y^2-54y=101$

الحل/

$$4x^2-16x-9y^2-54y=101 \quad \Rightarrow \quad 4(x^2-4x)-9(y^2+6y)=101$$

بإضافة (-65) الى طرفي معادلة القطع الزائد حتى تكون حدود(x) وحدود (y) بشكل مربع كامل

$$4(x^2-4x+4)-9(y^2+6y+9)=101-65 \quad \Rightarrow 4(x^2-2)^2-9(y+3)^2=36 \quad (\div 36)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{(x^2-2)^2}{9}-\frac{(y^2+3)^2}{4}=1 \quad \text{معادلة القطع الزائد}}$$

بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع الزائد $\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}$ نحصل على :

$\boxed{h=2}$, $\boxed{k=-3}$ $\Rightarrow (h,k)=(2,-3)$ مركز القطع الزائد

$a^2=9 \Rightarrow \boxed{a=3}$, $b^2=4 \Rightarrow \boxed{b=2} \Rightarrow c^2=a^2+b^2 \quad \Rightarrow c^2=9+4=13 \Rightarrow \boxed{c=\sqrt{13}}$

$\overline{F}(h\pm c,k)=\overline{F}(2\pm\sqrt{13},-3) \quad \Rightarrow \overline{F_1}(2+\sqrt{13},-3)$, $\overline{F_2}(2-\sqrt{13},-3)$ البؤرتان

$\overline{V}(h\pm a,k)=\overline{V}(2\pm 3,-3) \quad \Rightarrow \overline{V_1}(5,-3)$, $\overline{V_2}(-1,-3)$ الرأسان

$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{3}$ = الاختلاف المركزي

مثال / جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصـــل والبؤرتـان على محور الصـــادات وطول المحور الحقيقي له $=16$ والنسبة بين المسافة بين بؤرتيه وطول محوره الحقيقي $=\frac{5}{4}$

الحل/

$\because 2a=16 \quad \Rightarrow a=8 \quad \Rightarrow \boxed{a^2=64}$

$\because \frac{2c}{2a}=\frac{5}{4} \quad \Rightarrow \frac{c}{8}=\frac{5}{4} \quad \Rightarrow c=10 \quad \Rightarrow \boxed{c^2=100}$

$\Rightarrow c^2=a^2+b^2 \quad \Rightarrow b^2=100-64 \quad \Rightarrow \boxed{b^2=36} \quad \Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{64}-\frac{x^2}{36}=1 \quad \text{معادلة القطع الزائد}}$

مثال / جد معادلة القطع الزائد الذي أحدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $x^2 = 20y$ وطول محوره المرافق يساوي البعد بين بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

الحل/ **من القطع المكافئ :**

$x^2 = 20y$ (بالمقارنة مع) $x^2 = 4py$

$\Rightarrow 4p = 20 \Rightarrow \boxed{p = 5} \Rightarrow (0, 5)$ البؤرة

من القطع الناقص :

$\boxed{a^2 = 16}$, $\boxed{b^2 = 9}$ $\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow \boxed{c^2 = 7} \Rightarrow c = \sqrt{7} \Rightarrow$ البعد البؤري $\boxed{2c = 2\sqrt{7}}$

من القطع الزائد :

$\because 2b = 2\sqrt{7}$ طول المحور المرافق $\Rightarrow b = \sqrt{7} \Rightarrow \boxed{b^2 = 7}$

بؤرتا القطع الزائد $(0, 5)\ (0, -5) \Rightarrow \boxed{c = 5} \Rightarrow$ القانون $\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$

$\Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = 25 - 7 \Rightarrow \boxed{a^2 = 18} \Rightarrow$ معادلة القطع الزائد $\boxed{\frac{y^2}{18} - \frac{x^2}{7} = 1}$

مثال / جد معادلة القطع الزائد الذي يمر بالنقطتين $(3, -6), (0, 3\sqrt{2})$

الحل/

$\because$ القطـــع الزائـــد يمـــر بالنقطـــة $(0, 3\sqrt{2})$ لـــذا فالنقطـــة تمثـــل رأس القطـــع الزائـــد وقيمـــة $(a = 3\sqrt{2})$ والقانون هو $\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$

$\therefore$ النقطة $(3, -6)$ تنتمي للقطع الزائد لذا فهي تحقق معادلته

$$\frac{(-6)^2}{(3\sqrt{2})^2} - \frac{(3)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{36}{18} - \frac{9}{b^2} = 1 \Rightarrow 2 - \frac{9}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{9}{b^2} = 1 \Rightarrow \boxed{b^2 = 9}$$

$\Rightarrow \boxed{\frac{y^2}{18} - \frac{x^2}{9} = 1}$ (معادلة القطع الزائد)

مثال /جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه رأســـا القطع الناقص $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$ وطول محـــوره الحقيقي (12) وحدة

الحل / **من القطع الناقص :**

راسا القطع الناقص $(-10\,,0)\ (10\,,\ 0) \Leftarrow \boxed{a=\pm 10} \Leftarrow \boxed{b^2=64}\ ,\ \boxed{a^2=100}$

من القطع الزائد :

بؤرتا القطع الزائد $(-10\,,0)\ (10\,,\ 0) \Leftarrow \boxed{c=10} \Leftarrow$ القانون $\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1}$

$\because\ 2a=12 \Rightarrow a=6 \Rightarrow \boxed{a^2=36}$

$\because\ c^2=a^2+b^2 \Rightarrow b^2=100-36 \Rightarrow \boxed{b^2=64} \Rightarrow$ معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$

****

واجبات

س 1 : جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه في نقطة الاصل و بؤرتاه تنتمي لمحور الصادات وطول محوره المرافق يساوي البعد بين بؤرة القطع المكافئ $(y^2=12x)$ ودليله وطول محوره الحقيقي ثلاثة امثال طول محوره المرافق

س 2 : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه في نقطة الاصل و راساه هما بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته $(9y^2-16x^2=144)$ ومجموع طولي القطع الناقص (16) وحدة طول

س 3 : جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه وراساه هما بؤرة وراس القطع المكافئ $(x-1)^2=4(y-3)$

س 4 : قطعان مخروطيان احدهما ناقص والاخر زائد كل منهما يمر ببؤرة الاخر . فاذا كانت معادلة احدهما $(x^2-y^2=-3)$ فجد معادلة الاخر

س 5 : جد معادلة القطع الناقص الذي يمر بالنقطتين $(3,1)(3\,,-1)$ وطول محوره الكبير يساوي(25) وحدة

س 6: جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه في نقطة الاصل و أحدى بؤرتاه هي بؤرة القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{20}=1$ وأحد رأسيه هي بؤرة القطع المكافئ $y^2+8x=0$

س 7 : جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه في نقطة الاصل و بؤرتاه هي بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته $(8y^2 - x^2 = 32)$ ويمس دليل القطع المكافئ $(y^2 + 16x = 0)$

س 8 : لتكن $(y^2 - mx^2 = 3)$ معادلة قطع زائد أحد بؤرتيه هي راس القطع الناقص الذي يمر بالنقطة $(-1, 2)$ والذي احد بؤرتيه $(0 , \sqrt{6})$ فجد قيمة m

س 9 : لتكن $(5y^2 - 4x^2 = m)$ معادلة قطع زائد أحد بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $(4y - \sqrt{5}x^2 = 0)$ فجد قيمة m

س 10 : لتكن $(Mx^2 - Ny^2 = 90)$ معادلة قطع زائد بؤرتيه هي بؤرتا القطع الناقص الذي معادلته $(9x^2 + 16y^2 = 576)$ وطول محوره الحقيقي $= 6\sqrt{2}$ فجد قيمة M, N

س 12 : لتكن $(5y^2 - 4x^2 = N)$ معادلة قطع زائد احدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $(4y - 5x^2 = 0)$ فجد قيمة N

****

حلول التمارين العامة الخاصة بالفصل الثاني

وزاري 2014 / د3

س4 / قطع ناقص مركزه نقطة الأصل وقطع زائد نقطة تقاطع محوريه نقطة الأصل أحدهما يمر ببؤرة الأخر فأذا كانت $9x^2 + 25y^2 = 225$ معادلة القطع الناقص فجد :

(أ) مساحة القطع الناقص .	(ب) محيط القطع الناقص .

(ج) معادلة القطع الزائد ثم أرسمه .	(د) الأختلاف المركزي لكل منهما .

الحل / (أ)

$$9x^2 + 25y^2 = 225 \xRightarrow{(\div 225)} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$$\therefore \ a^2 = 25 \Rightarrow a = 5 \quad , \quad b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$$

$$\therefore \ A = ab\,\pi = (5)(3)\pi = 15\pi$$ وحدة مربعة

(ب)

$$\text{المحيط} = p = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{25 + 9}{2}} = 2\pi\sqrt{\frac{34}{2}} = 2\sqrt{17}\pi$$ وحدة

(ج) من القطع الناقص :

$a^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad a = 5 \quad , \quad b^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad b = 3$

$a^2 = b^2 + c^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = 25 - 9 \quad \Rightarrow \quad c^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad c = 4$

$\therefore \ (5,0), (-5,0)$ الرأسان , $(4,0), (-4,0)$ البؤرتان

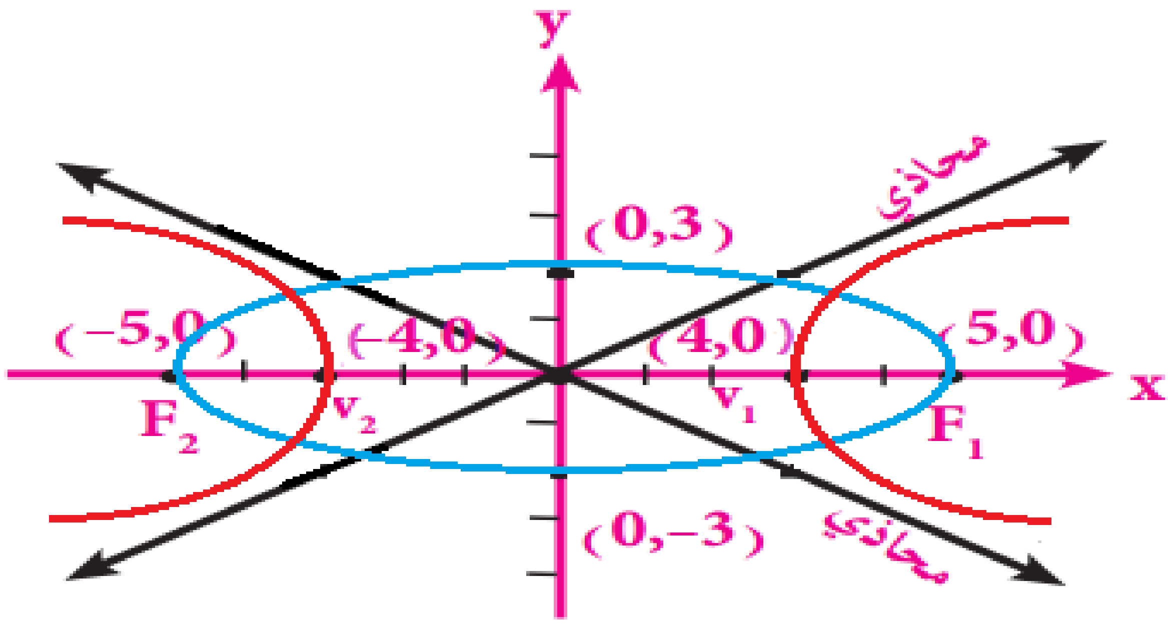
من القطع الزائد :

$\because$ القطع الزائد يمر ببؤرة القطع الناقص

$\therefore \ (4,0), (-4,0)$ الرأسان , $(5,0), (-5,0)$ البؤرتان

$\Rightarrow \quad b^2 = 25 - 16 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 9$

$\therefore \ \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الزائد



(د)

$e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} < 1$ الأختلاف المركزي للقطع الناقص

$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} > 1$ الأختلاف المركزي للقطع الزائد

وزاري 2011 / د2 وزاري 2015 / د3

س5 / جد معــــــادلة القطع النـاقص الذي بؤرتـاه تنتميـان لمحور الســـــينات ومركزه نقطة الأصل ومســـاحة منطقته 7π وحدة مربعة ومحيطه يساوي $10\,\pi$ وحدة .

الحل /

$$A = ab\,\pi \quad \Rightarrow \quad 7\pi = ab\pi \quad \Rightarrow \quad b = \frac{7}{a}$$ (معادلة ①)

$$p = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \Rightarrow 10\pi = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \xrightarrow{(\div 2\pi)} 5 = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$ (معادلة ②)

بتعويض المعادلة ① في المعادلة ② نحصل على :

$$5 = \sqrt{\frac{a^2+\left(\frac{7}{a}\right)^2}{2}} \Rightarrow 5 = \sqrt{\frac{a^2+\frac{49}{a^2}}{2}}$$ (تربيع الطرفين)

$$25 = \frac{a^2+\frac{49}{a^2}}{2} \Rightarrow 50 = a^2+\frac{49}{a^2} \xrightarrow{(\text{نضرب طرفي المعادلة ب } a^2)} 50a^2 = a^4+49$$

$$a^4 - 50a^2 + 49 = 0 \Rightarrow (a^2-49)(a^2-1) = 0$$

$$either \quad a^2 - 49 = 0 \Rightarrow a^2 = 49 \Rightarrow a = 7$$ (نعوض في معادلة ①)

$$b = \frac{7}{a} = \frac{7}{7} \Rightarrow b = 1 \Rightarrow b^2 = 1$$

$$\therefore \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{1} = 1$$ معادلة القطع الناقص

$$or \quad a^2 - 1 = 0 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1$$ (نعوض في معادلة ①)

$$b = \frac{7}{a} = \frac{7}{1} \Rightarrow b = 7$$ يهمل

لأن قيمة (a) يجب أن تكون أكبر من قيمة (b) في القطع الناقص .

حلول الأسئلة الوزارية الخاصة بالفصل الثاني

سؤال وزاري 98/د1

قطع زائد معادلته $hx^2 - ky^2 = 90$ وطول محوره الحقيقي $6\sqrt{2}$ وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $9x^2 + 16y^2 = 576$ جد قيمة k ، h.

الحل:

في القطع الناقص:

$$[9x^2 + 16y^2 = 576] \div 576$$

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1 \ , \ a^2 = 64 \quad , \quad b^2 = 36$$

$$a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow 64 - 36 = c^2$$

$$\therefore \ c^2 = 28 \ \Rightarrow \therefore c = 2\sqrt{7}$$

∴ البؤرتان $(2\sqrt{7},0),(-2\sqrt{7},0)$

في القطع الزائد : البؤرتان $(2\sqrt{7},0),(-2\sqrt{7},0)$

$$\therefore c = 2\sqrt{7} \ , \ 2a = 6\sqrt{2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2}$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 18 + b^2 = 28 \Rightarrow b^2 = 10$$

$$hx^2 - ky^2 = 90 \ ] \div 90 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{\frac{90}{h}} - \frac{y^2}{\frac{90}{k}} = 1$$

$$a^2 = \frac{90}{h} \Rightarrow 18 = \frac{90}{h} \Rightarrow 18h = 90 \Rightarrow h = 5$$

$$b^2 = \frac{90}{k} \Rightarrow 10 = \frac{90}{k} \Rightarrow 10k = 90 \Rightarrow k = 9$$

سؤال وزاري 99/د2

النقطة $\left(2\,,\frac{1}{3}\right)$ تنتمي إلى القطع المكافئ الذي رأسه في نقطة الأصل وبؤرته تنتمي إلى محور السينات والتي هي احدى بؤرتي القطع الناقص ، النسبة بين طولي محوريه $\frac{5}{4}$ ، جد معادلة كل من القطعين المكافئ والناقص.

الحل:

المكافئ: $y^2 = 4px \Rightarrow (2)^2 = 4p\left(\frac{1}{3}\right) \Rightarrow 4 = \frac{4}{3}p \Rightarrow p = 3 \Rightarrow$ البؤرة $(3,0)$

$y^2 = 4(3)x \Rightarrow y^2 = 12x$

الناقص : البؤرتان هما $(3,0)\,,(-3,0) \Rightarrow c = 3$

$$\frac{2a}{2b} = \frac{5}{4} \Rightarrow 4a = 5b \Rightarrow a = \frac{5b}{4}$$

$$a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow \frac{25\,b^2}{16} - b^2 = 9 \qquad] \quad (.16)$$

$$25b^2 - 16b^2 = 144 \Rightarrow 9b^2 = 144$$

$$\therefore\ b^2 = 16 \Rightarrow b = 4$$

$$a = \frac{5(4)}{4} \Rightarrow a = 5$$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الناقص

سؤال وزاري 2000/د2

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته $x^2 - 3y^2 = 12$ والنسبة بين طولي محورية $= \frac{5}{3}$

الحل:

في القطع الزائد: $x^2 - 3y^2 = 12 \xrightarrow{(\div 12)} \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1 \quad ,a^2 = 12 \quad ,b^2 = 4$

$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow c^2 = 12 + 4 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

البؤرتان $(-4,0),(4,0)$

في القطع الناقص: البؤرتان $(-4,0),(4,0) \Rightarrow \boxed{c = 4}$

$$\frac{2a}{2b} = \frac{5}{3} \Rightarrow 3a = 5b \Rightarrow a = \frac{5b}{3} \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow \frac{25b^2}{9} - b^2 = 16 \Rightarrow 25\,b^2 - 9b^2 = 144$$

$$16b^2 = 144 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow a = \frac{5(3)}{3} = 5$$

$\therefore\ \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الناقص

سؤال وزاري 2001/د1

جد معادلـة القطع الزائـد الذي بؤرتـاه تنطبقان على بـؤرتي القطع النـاقص الذي معادلتـه $3x^2 + 5y^2 = 120$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي والبعد بين بؤرتيه تساوي $\frac{1}{2}$

الحل:

في القطع الناقص: $3x^2 + 5y^2 = 120 \xrightarrow{(\div 120)} \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{24} = 1 \quad , a^2 = 40 \quad , \quad b^2 = 24$

$a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow c^2 = 40 - 24 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4$

البؤرتان $(-4,0), (4,0)$

في القطع الزائد: البؤرتان $(-4,0), (4,0)$ $\Leftarrow$ $\boxed{c = 4}$

$\frac{2a}{2c} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow \boxed{a = 2}$

$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 4 + b^2 = 16 \Rightarrow \boxed{b^2 = 12}$

$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} - 1$ معادلة القطع الزائد

سؤال وزاري 2001/د2

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطعين المكافئين: $y^2 = 20x \quad , \quad y^2 = -20x$ والفرق بين طولي محوريه الحقيقي والمرافق = 2 وحدة.

الحل:

في القطع المكافئ:

$y^2 = 20x$

$4p = 20 \Rightarrow p = 5$

$\therefore$ البؤرة $(5,0)$

$y^2 = -20x$

$-4p = -20 \Rightarrow p = 5$

$\therefore$ البؤرة $(-5,0)$

في القطع الزائد: البؤرتان (5,0) ، (-5,0) $\Leftarrow$ $\boxed{c = 5}$

$2a - 2b = 2 \xrightarrow{(\div 2)} a - b = 1 \Rightarrow a = 1 + b$

$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow (1 + b)^2 + b^2 = 25 \Rightarrow 1 + 2b + b^2 + b^2 = 25$

$\Rightarrow 2b^2 + 2b - 24 = 0 \xrightarrow{(\div 2)} b^2 + b - 12 = 0$

$\Rightarrow (b + 4)(b - 3) = 0$

$b + 4 = 0 \Rightarrow b = -4$ يهمل

$b - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{b = 3}$

$\therefore a = 1 + 3 \Rightarrow \boxed{a = 4}$

$$\therefore \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

سؤال وزاري 2002/د1

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين بؤرتيه تساوه (8) وحدات ومجموع طولي محوريه 16 وحدة.

الحل:

$2c = 8 \Rightarrow \boxed{c = 4}$

$2a + 2b = 16 \Rightarrow a + b = 8 \quad \Rightarrow a = 8 - b$

$a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow (8 - b)^2 - b^2 = 16 \Rightarrow 64 - 16b + b^2 - b^2 = 16$

$\Rightarrow 16b = 48 \Rightarrow \boxed{b = 3} \quad \Rightarrow a = 8 - 3 \quad \Rightarrow \boxed{a = 5}$

$\therefore \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الناقص

سؤال وزاري 2002/د2

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه راسا القطع الناقص $x^2 + 9y^2 = 36$ والنسبة بين طول محوره الحقيقي إلى البعد بين بؤرتيه $= \frac{1}{2}$

الحل:

في القطع الناقص

$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1 \quad , \quad a^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad a = 6$

$\therefore$ الرأسان $(6,0)\,,(-6,0)$

في القطع الزائد : البؤرتان $(6,0)\,,(-6,0) \Rightarrow \boxed{c = 6}$

$\frac{2a}{2c} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2a = 6 \Rightarrow \boxed{a = 3}$

$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 9 + b^2 = 36 \Rightarrow \boxed{b^2 = 27}$

$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{27} = 1$ معادلة القطع الزائد

سؤال وزاري 2003/د1

قطع ناقص معادلته $x^2 + 4y^2 = 4$ جد طول كل من محوريه وأحداثي كل من بؤرتيه ورأسيه.

الحل:

$x^2 + 4y^2 = 4 \overset{(\div 4)}{\Longrightarrow} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1 \quad , \quad a^2 = 4 \Rightarrow a = 2$

$b^2 = 1 \Rightarrow b = 1$

$2a = 2(2) = 4$ طول المحور الكبير

$2b = 2(1) = 2$ طول المحور الصغير

الرأسان $(-2,0), (2,0)$

$a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow 4 - 1 = c^2$

$\therefore c^2 = 3 \Rightarrow c = \sqrt{3}$

البؤرتان $(\sqrt{3}, 0) \quad , \quad (-\sqrt{3}, 0)$

سؤال وزاري 2004/ د1

جد معادلة القطع المخروطي الذي محوراه محوري الاحداثيات والذي احد رؤوسه (3,0) واحد بؤرتيه (-5,0)

الحل:

$a = 3 \quad , \quad c = 5$

$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 9 + b^2 = 25 \Rightarrow b^2 = 16 \quad \Rightarrow$ القطع الزائد (لأن $c > a$)

$\therefore \ \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الزائد

سؤال وزاري 2004/د2

قطع زائد وقطع ناقص احدهما يمر ببؤرتي الآخر. جد معادلة القطع الزائد إذا علمت أن معادلة القطع الناقص هي $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ علما أن محوريهما على محوري الاحداثيات.

الحل:

في القطع الناقص: $a^2 = 25 \Rightarrow \boxed{a = 5} \quad \Rightarrow \quad (-5,0),(5,0)$ الرأسان

$b^2 = 9, \ a^2 - b^2 = c^2$

$25 - 9 = c^2 \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = 4 \quad \Rightarrow \quad (-4,0),(4,0)$ البؤرتان

في القطع الزائد: الرأسان $(-4,0),(4,0) \Rightarrow \boxed{a = 4}$

البؤرتان $(-5,0),(5,0) \Rightarrow \boxed{c = 5}$

$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 16 + b^2 = 25 \Rightarrow b^2 = 9$

$\therefore \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الزائد

سؤال وزاري 2006/د1

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين (-3,6) ، (3,6) ثم جد معادلة دليله.

الحل:

$\because$ القطع متناظر حول محور الصادات $\quad \therefore$ القطع من النوع الصادي وفتحة القطع إلى الأعلى

$x^2 = 4py \Rightarrow (3)^2 = 4p(6) \Rightarrow 9 = 24p \Rightarrow p = \frac{3}{8}$

$\therefore \ x^2 = 4\left(\frac{3}{8}\right)y \Rightarrow x^2 = \frac{3}{2}y$ معادلة القطع المكافئ $\quad , y = \frac{-3}{8}$ معادلة الدليل

سؤال وزاري 2006/ د2

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين (1,-3) ، (1,3) ثم جد معادلة دليلة.

الحل:

$\because$ القطع متناظر حول محور السينات $\quad \therefore$ القطع من النوع السيني وفتحة القطع إلى اليمين.

$y^2 = 4px$

$\Rightarrow (3)^2 = 4p(1) \Rightarrow 9 = 4p \Rightarrow p = \frac{9}{4}$

$y^2 = 4\left(\frac{9}{4}\right)x \Rightarrow y^2 = 9x$ معادلة القطع المكافئ

$x = \frac{-9}{4}$ معادلة الدليل

سؤال وزاري 2007/د1

جد معادلـة القطـع النـاقص الـذي مركـزه نقطـة الأصـل والبعـد بـين بؤرتيـه (8) وحـدة ورأسـاه بؤرتـا القطـع الزائـد $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

الحل:

في القطع الزائد

$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1 \quad , a^2=16 \quad , \quad b^2=9$

$a^2+b^2=c^2 \Rightarrow 16+9=c^2 \Rightarrow c^2=25 \Rightarrow \boxed{c=5}$

∴ البؤرتان $(-5,0),(5,0)$

في القطع الناقص : $2c=8 \Rightarrow \boxed{c=4}$

الرأسان هما $(-5,0),(5,0) \Rightarrow \boxed{a=5}$

$a^2-b^2=c^2 \Rightarrow 25-b^2=16 \Rightarrow b^2=25-16 \Rightarrow \boxed{b^2=9}$

$\therefore \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ معادلة القطع الناقص

سؤال وزاري 2007/د1

لتكن $x^2-hy^2=3$ تمثل معادلة قطع زائد احدى بؤرتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2=8x$ جد قيمة h.

الحل:

في القطع المكافئ:

$4p=8 \Rightarrow p=2 \quad , \quad$ ∴ البؤرة $(2,0)$

في القطع الزائد : البؤرتان $(-2,0)\ ,(2,0) \Rightarrow \boxed{c=2}$

$x^2-hy^2=3 \overset{\div 3}{\Rightarrow} \frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{\frac{3}{h}}=1 \quad , a^2=3 \quad , b^2=\frac{3}{h}$

$a^2+b^2=c^2 \Rightarrow 3+\frac{3}{h}=4 \Rightarrow \frac{3}{h}=1 \Rightarrow \boxed{h=3}$

سؤال وزاري 2007/د2

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الناقص $\frac{x^2}{41}+\frac{y^2}{16}=1$ وطول محوره المرافق (8) وحدات.

الحل:

في القطع الناقص:

$a^2=41 \ , \ b^2=16 \ , \ a^2-b^2=c^2 \Rightarrow c^2=41-16$

$\Rightarrow c^2=25 \Rightarrow \boxed{c=5}$

∴ البؤرتان $(-5,0)\ ,(5,0)$

في القطع الزائد : البؤرتان $(-5,0)\ ,(5,0) \Rightarrow \boxed{c=5}$

$2b=8 \Rightarrow b=4 \quad , \quad a^2+b^2=c^2 \Rightarrow a^2+16=25$

$\therefore a^2=9$

$\therefore \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ معادلة القطع الزائد

سؤال وزاري 2008/د1

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين $y^2 = 20x$ ، $y^2 = -20x$ وطول محوره المرافق = 8 وحدات.

الحل: المكافئ:

$y^2 = 20x$

$4p = 20 \Rightarrow p = 5$

$\therefore$ البؤرة $(5,0)$

$y^2 = -20x$

$-4p = -20 \Rightarrow p = 5$

$\therefore$ البؤرة $(-5,0)$

الزائد :البؤرتان $(-5,0), (5,0)$ $\Leftarrow$ $\boxed{c = 5}$

$2b = 8 \Rightarrow \boxed{b = 4}$

$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow a^2 + 16 = 25 \Rightarrow a^2 = 9$

$\therefore \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الزائد

سؤال وزاري 2008/د 1

قطع ناقص معادلته $4x^2 + 2y^2 = L$ والبعد بين بؤرتيه = $2\sqrt{3}$ وحدة. جد قيمة L.

الحل:

$2c = 2\sqrt{3} \Rightarrow c = \sqrt{3}$

$4x^2 + 2y^2 = L \quad] \div L \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{\frac{L}{4}} + \frac{y^2}{\frac{L}{2}} = 1$

$a^2 = \frac{L}{2} \ , \ b^2 = \frac{L}{4} \quad Since \quad a^2 > b^2$

$a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow \frac{L}{2} - \frac{L}{4} = 3 \Rightarrow \frac{L}{4} = 3 \Rightarrow L = 12$

سؤال وزاري 2009/د1

جد معادلة القطع الناقص الذي يمر ببؤرتي القطع الزائد $9y^2 - 16x^2 = 144$ ويقطع من محور السينات جزءاً طوله (12) وحدة.

الحل:

في القطع الزائد:

$9y^2 - 16x^2 = 144 \xrightarrow{(\div 144)} \frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1 \ , \ a^2 = 16 \, , b^2 = 9$

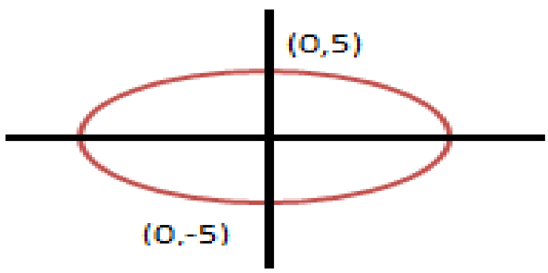
$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 16 + 9 = c^2 \Rightarrow c^2 = 25 \Rightarrow \boxed{c = 5}$

$\therefore$ البؤرتان $(0,-5), (0,5)$

في القطع الناقص:

$b = 5 \ , \ 2a = 12 \Rightarrow a = 6 \quad Since \quad a > b$

$\therefore \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{25} = 1$ معادلة القطع الناقص



سؤال وزاري 2010/د1

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الأصل ومحوراه على المحورين الاحداثيين ويمر ببؤرة القطع المكافئ $y^2 = 16x$ ومساحة منطقة القطع الناقص 20π وحدة مربعة.

الحل:

في القطع المكافئ: $y^2 = 16x \Rightarrow 4p = 16 \Rightarrow \boxed{p = 4}$

$\therefore$ البؤرة $(4,0)$

في القطع الناقص: $A = ab\pi \Rightarrow 20\pi = ab\pi \Rightarrow ab = 20 \Rightarrow b = \frac{20}{a} \ldots\ldots (1)$

$\because$ **القطع الناقص يمر بالنقطة (4,0)** $\therefore$ **النقطة (4,0) أما تمثل رأس أو قطب**

$if \;\; a = 4 \Rightarrow b = \frac{20}{4} = 5 \qquad b > a$ وهذا غير ممكن

$\therefore \mathrm{b} = 4 \Rightarrow 4 = \frac{20}{a} \Rightarrow 4a = 20 \Rightarrow \quad a = 5$

والقطع من النوع الصادي

$\therefore \frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1$ معادلة القطع الناقص

سؤال وزاري 2010/د2

$hy^2 + 3x^2 = L$ قطع ناقص يمر بنقطة تقاطع المستقيم $2x + y = \sqrt{3}$ مع محور الصادات علماً أن مساحة منطقته تساوي $2\sqrt{3}\,\pi$ وحدة مساحة. جد قيمة $h, L \in R$ حيث بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومركزه نقطة الاصل.

الحل: المستقيم: $2x + y = \sqrt{3}$

عندما $x = 0 \Rightarrow 2(0) + y = \sqrt{3} \Rightarrow y = \sqrt{3}$

$\therefore$ نقطة التقاطع $(0, \sqrt{3})$

في القطع الناقص: بما أن القطع من النوع السيني $\Rightarrow \boxed{\mathrm{b} = \sqrt{3}}$

$hy^2 + 3x^2 = L \Rightarrow \frac{hy^2}{L} + \frac{3x^2}{L} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{\frac{L}{h}} + \frac{x^2}{\frac{L}{3}} = 1$

$\therefore a^2 = \frac{L}{3} \quad , \quad b^2 = \frac{L}{h}$ (لأن القطع من النوع السيني)

$A = ab\pi \Rightarrow 2\sqrt{3}\pi = ab\pi \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{3}}{b} \Rightarrow a = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow \boxed{a = 2}$

$\therefore 4 = \frac{L}{3} \Rightarrow \boxed{L = 12} \quad , \quad 3 = \frac{12}{h} \Rightarrow 3h = 12 \Rightarrow \boxed{h = 4}$

وزاري 2012/ د1

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات ومجموع طولي محوريه = 16 وحدة طول وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته $x^2 - 2y^2 = 6$

الحل:

في القطع الزائد: $x^2 - 2y^2 = 6 \overset{\div 6}{\Rightarrow} \frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$

$a^2 = 6 \quad , b^2 = 3$

$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 6 + 3 = c^2 \Rightarrow c^2 = 9 \Rightarrow c = 3$

$\therefore$ البؤرتان $(3,0)\, , (-3,0)$

في القطع الناقص: البؤرتان $(3,0) \;,\; (-3,0) \Rightarrow \boxed{c = 3}$

$2a + 2b = 16 \overset{\div 2}{\Rightarrow} a + b = 8 \Rightarrow a = 8 - b$

$a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow (8-b)^2 - b^2 = 9 \Rightarrow 64 - 16b + b^2 - b^2 = 9$

$16b = 64 - 9 \Rightarrow 16b = 55 \Rightarrow b = \frac{55}{16}$

$a = 8 - \frac{55}{16} \Rightarrow a = \frac{128-55}{16} \Rightarrow a = \frac{73}{16}$

$\therefore \frac{x^2}{\left(\frac{73}{16}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{55}{16}\right)^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{5329}{256}} + \frac{y^2}{\frac{3025}{256}} = 1$ معادلة القطع الناقص

وزاري 2012/د2

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ويقطع من محور السينات جزءاً طوله 8 وحدات ومساحة منطقته 24π وحدة مساحة.

الحل: $A = ab\pi \Rightarrow 24\,\pi = ab\pi \Rightarrow 24 = ab \Rightarrow b = \frac{24}{a}$

بما أن القطع الناقص يقطع من محور السينات جزءاً طوله (8) وحدات فأن هذا الجزء أما يمثل طول المحور الكبير أو طول المحور الصغير. فأذا كان هذا الجزء يمثل طول المحور الكبير فيكون:

$2a = 8 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow b = \frac{24}{4} = 6$

وهذا غير ممكن لأن $a > b$ دائماً في القطع الناقص. لذا فأن الجزء المقطوع يمثل طول المحور الصغير:

$2b = 8 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a = 6$

والقطع من النوع الصادي:

$\therefore \frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{16} = 1$ معادلة القطع الناقص

وزاري 2013/د1

قطع مخروطي بؤرتاه $F_2(-4,0)$, $F_1(4,0)$ واختلافه المركزي = 2، جد معادلته.

الحل:

$\because\ e = 2$ ⇐ القطع زائد لان $e < 1$ ⇐ $c = 4$

$e = \frac{c}{a} \Rightarrow 2 = \frac{4}{a} \Rightarrow 2a = 4 \Rightarrow \boxed{a = 2}$

$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow 4 + b^2 = 16 \Rightarrow b^2 = 16 - 4 \Rightarrow b^2 = 12$

$\therefore\ \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ معادلة القطع الزائد

وزاري 2014/د3

جد بؤرة ودليل القطع المكافئ ، معادلة المحور ورأس القطع المكافئ $8y + 7 = x^2 + 2x$ مع الرسم

الحل/ نرتب المعادلة بحيث تكون حدود (y) في طرف وحدود (x) في الطرف الأخر $(x^2 + 2x = 8y + 7)$

نضيف (1) الى طرفي معادلة القطع المكافئ حتى تكون حدود(x) بشكل مربع كامل

$x^2 + 2x + 1 = 8y + 8 \quad \Rightarrow \quad (x+1)^2 = 8(y+1)$ معادلة القطع المكافئ

بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع المكافئ $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ نحصل على

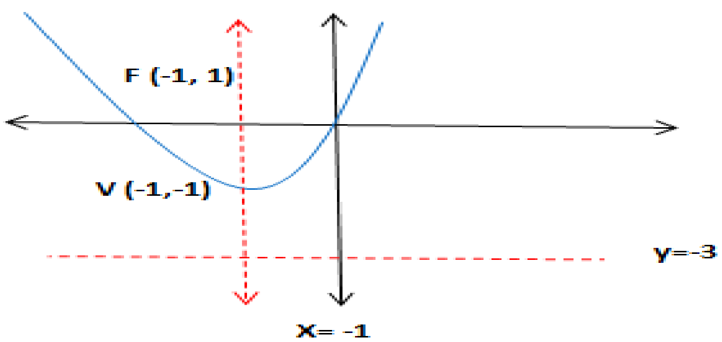
$h = -1\ , \quad k = -1 \ \rightarrow\ v(h, k) = (-1, -1)$ الرأس

$4p = 8 \ \rightarrow\ p = 2$

$F(h, k+p) = (-1, 1)$ البؤرة

$y = -p + k \ \rightarrow\ y = -3$ معادلة الدليل

$x = h \ \rightarrow\ x = -1$ معادلة المحور



وزاري 2015/د2

لتكن $5y^2 - 4x^2 = h$ معادلة قطع زائد أحدى بؤرتيـــه هي بؤرة القطع المكافئ $4y - \sqrt{5}\,x^2 = 0$
جد قيمة h .

الحل:

في القطع المكافئ :

$$4y - \sqrt{5}\,x^2 = 0 \Rightarrow 4y = \sqrt{5}\,x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{4}{\sqrt{5}}\,y$$

$$x^2 = 4Py \Rightarrow 4P = \frac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow P = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$ البؤرة

في القطع الزائد : البؤرتان $\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \Rightarrow c = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$$5y^2 - 4x^2 = h \xrightarrow{(\div h)} \frac{y^2}{\frac{h}{5}} - \frac{x^2}{\frac{h}{4}} = 1 \Rightarrow a^2 = \frac{h}{5}, \quad b^2 = \frac{h}{4}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow \left[\frac{1}{5} = \frac{h}{5} + \frac{h}{4}\right] \xrightarrow{(\times 20)} 4 = 4h + 5h \Rightarrow 9h = 4 \Rightarrow h = \frac{9}{4}$$

وزاري 2015/د2

جـد معادلـة القطـع النـاقص الـذي بؤرتـاه تنتميـان لمحـور الصـادات ، مسـاحته 32π وحـدة مسـاحة والنسبة بين طولي محوريه $= \frac{1}{2}$

الحل:

$$\frac{2b}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 2b$$

$$a\,b\,\pi = 32\,\pi \Rightarrow 2b \times b = 32 \Rightarrow b^2 = 16 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a = 8$$

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{y^2}{64} + \frac{x^2}{16} = 1$$ معادلة القطع الناقص

سؤال وزاري 2015/د3

جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطعين المكافئين $y^2 = 20x$ ، $y^2 = -20x$ وطول محوره المرافق = 8 وحدات.

الحل: المكافئ:

$y^2 = 20x$

$4p = 20 \Rightarrow p = 5$

$\therefore$ البؤرة $(5,0)$

$y^2 = -20x$

$-4p = -20 \Rightarrow p = 5$

$\therefore$ البؤرة $(-5,0)$

الزائد :البؤرتان $(5,0), (-5,0)$ $\Rightarrow$ $\boxed{c = 5}$

$2b = 8 \Rightarrow \boxed{b = 4}$

$a^2 + b^2 = c^2 \Rightarrow a^2 + 16 = 25 \Rightarrow a^2 = 9$

$\therefore \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ معادلة القطع الزائد

سؤال وزاري 2016/د1

جد معادلة القطع النــاقص الـذي مركـزه نقطـة الأصـل وبعـده البـؤري مسـاوياً لبعـد بـؤرة القطـع المكـافئ عن دليله $y^2 + 24x = 0$ ، أذا علمت أن مساحة القطع الناقص $80\,\pi\, cm^2$

الحل:

في القطع المكافئ :

$y^2 + 24x = 0 \Rightarrow y^2 = -24x$ (بالمقارنة مع) $y^2 = -4px$

$-24x = -4px \xrightarrow{(\div -4)} p = 6 \Rightarrow 2p = 12$ (البعد بين بؤرة القطع المكافئ ودليه)

في القطع النـاقص :

$2c = 12 \Rightarrow c = 6 \Rightarrow c^2 = 36$

$a^2 = c^2 + b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 36 \quad \ldots\ldots\ldots (1)$

$ab\pi = 80\pi \Rightarrow b = \frac{80}{a} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$

نعوض المعادلة (2) في المعدلة (1) فينتج :

$a^2 - \frac{6400}{a^2} = 36 \xrightarrow{(\times a^2)} a^4 - 6400 = 36a^2 \Rightarrow a^4 - 36a^2 - 6400 = 0$

$\Rightarrow (a^2 - 100)(a^2 + 64) = 0$

أما $a^2 = 100 \Rightarrow b^2 = \frac{6400}{a^2} = \frac{6400}{100} \Rightarrow b^2 = 64$

أو $a^2 = -64$ يهمل

$\therefore$ هناك معادلتان للقطع النـاقص لأن موقع البؤرتين غير محدد وهما :

$\therefore \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1 \quad or \quad \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1$

سؤال وزاري 2016/د1

جـد معادلـة القطـع الزائـد والنـاقص أذا كـان كـل يمـر ببـؤرتي الأخـر وكلاهمـا يقعـان علـى محـور السـينات وطول المحور الكبير يساوي $6\sqrt{2}$ وحدة طول وطول المحور الحقيقي يساوي 6 وحدة طول .

الحل:

∵ كل من القطعين يمر ببؤرة الأخر

∴ رأسا القطع الناقص يمثلان بؤرتا القطع الزائد وبؤرتا القطع الناقص تمثلان رأسا القطع الزائد

في القطع الناقص :

$2a = 6\sqrt{2} \Rightarrow a = 3\sqrt{2} \Rightarrow a^2 = 18$

$c^2 = 9$

$\because \quad a^2 = b^2 + c^2$

$\therefore \quad b^2 = 18 - 9 \Rightarrow b^2 = 9$

$\therefore \frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الناقص

في القطع الزائد :

$2a = 6 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a^2 = 9$

$c^2 = 18$

$\because \quad c^2 = a^2 + b^2$

$\therefore \quad b^2 = 18 - 9 \Rightarrow b^2 = 9$

$\therefore \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1$ معادلة القطع الزائد

الفصل الثالث / تطبيقات التفاضل

القواعد الأساسية للمشتقة (مراجعة)

القاعدة الأولى: مشتقة الدالة الثابتة تساوي صفر

(1) $f(x) = 3 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = 0$

(2) $f(x) = \sqrt{4} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = 0$

(3) $f(x) = \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = 0$

القاعدة الثانية: أذا كان $f(x) = x^n$ فأن $\bar{f}(x) = nx^{(n-1)}$

(1) $f(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = 3x^2$

(2) $f(x) = \sqrt{x} = x^{\left(\frac{1}{2}\right)} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = \frac{1}{2}\, x^{\left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

(3) $f(x) = x^{-7} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = -7x^{-8} = \frac{-7}{x^8}$

القاعدة الثالثة: أذا كان $f(x) = ax^n$ فأن $\bar{f}(x) = (an)x^{(n-1)}$ حيث $x \in R$

(1) $f(x) = 6x^4 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = 24x^3$

(2) $f(x) = 7\sqrt{x} = 7x^{\left(\frac{1}{2}\right)} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = 7\left(\frac{1}{2}\right) x^{\left(\frac{-1}{2}\right)} = \frac{7}{2\sqrt{x}}$

(3) $f(x) = -5x^{-3} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = 15x^{-4} = \frac{15}{x^4}$

(4) $f(x) = 9x \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = 9$

القاعدة الرابعة: مشتقة مجموعة دوال = مجوع مشتقاتها

(1) $f(x) = x^3 + 7x \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = 3x^2 + 7$

(2) $f(x) = 6x^4 + \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = 24x^3 - \frac{1}{x^2}$

(3) $f(x) = 7\sqrt{x} + \frac{2}{x} + 5x \quad \Rightarrow \quad f(x) = 7x^{\left(\frac{1}{2}\right)} + 2x^{-1} + 5x$

$\Rightarrow \quad \bar{f}(x) = 7\left(\frac{1}{2}\right) x^{\left(\frac{-1}{2}\right)} - 2x^{-2} + 5$

$\Rightarrow \quad \bar{f}(x) = \frac{7}{2\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2} + 5$

القاعدة الخامسة: [مشتقة حاصل ضرب دالتين = الدالة الأولى × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الدالة الأولى]

$$f(x) = (4x^3+7x)(2x) \Rightarrow \bar{f}(x) = (4x^3+7x)(2) + (2x)(12x^2+7) = 8x^3+14x+24x^3+14x$$

القاعدة السادسة: مشتقة قسمة دالتين = $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$

$$f(x) = \frac{2x^3+1}{x^4+1} \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{(x^4+1)(6x)-(2x^3+1)(4x^3)}{(x^4+1)^2} = \frac{6x^5+6x-8x^6-4x^3}{(x^4+1)^2}$$

القاعدة السابعة: مشتقة مجموعة دوال مرفوعة لأس معين $f(x) = [g(x)]^n$ فأن $\bar{f}(x) = n[g(x)]^{(n-1)}.\bar{g}(x)$

(1) $f(x) = (4x^3+7x)^5 \Rightarrow \bar{f}(x) = 5(4x^3+7x)^4.(12x^2+7) = (60x^2+35)(4x^3+7x)^4$

(2) $f(x) = (x+1)^2.(2x+2)^3 \Rightarrow \bar{f}(x) = (x+1)^2.[3(2x+2)^2(2)] + (2x+2)^3.[2(x+1)(1)]$

$$\Rightarrow \bar{f}(x) = 6(x+1)^2(2x+2)^2 + 2(2x+2)^3(x+1)$$

(3) $f(x) = x^2\sqrt{4x^3+2x} \Rightarrow f(x) = x^2.(4x^3+2x)^{\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow \bar{f}(x) = x^2.\left[\left(\frac{1}{2}\right)(4x^3+2x)^{\frac{-1}{2}}(12x^2+2)\right] + (4x^3+2x)^{\frac{1}{2}}.[2x] = \frac{x^2.(12x^2+2)}{2(4x^3+2x)^{\frac{1}{2}}} + 2x(4x^3+2x)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{x^2.(12x^2+2)+4x(4x^3+2x)}{2(4x^3+2x)^{\frac{1}{2}}} = \frac{12x^4+2x^2+16x^4+8x^2}{2\sqrt{4x^3+2x}}$$

القواعد الأساسية لأشتقاق الدوال الدائرية

(1) $f(x) = \sin y \Rightarrow \bar{f}(x) = \cos(y).\frac{dy}{dx}$	(4) $f(x) = \cot y \Rightarrow \bar{f}(x) = -csc^2(y)\frac{dy}{dx}$
(2) $f(x) = \cos y \Rightarrow \bar{f}(x) = -\sin(y)\frac{dy}{dx}$	(5) $f(x) = \sec y \Rightarrow \bar{f}(x) = \sec y \tan y.\frac{dy}{dx}$
(3) $f(x) = \tan y \Rightarrow \bar{f}(x) = sec^2(y).\frac{dy}{dx}$	(6) $f(x) = \csc y \Rightarrow \bar{f}(x) = -\csc y \cot y.\frac{dy}{dx}$

بعض القوانين والعلاقات المهم

$sin^2x + cos^2x = 1$	$cos\,(2x) = cos^2x - sin^2x$ $= 1 - 2\,sin^2x$ $= 2\,cos^2x - 1$	$sin\,(2x) = 2sin\,x\,cos\,x$
$csc\,x = \frac{1}{sin\,x}$	$sec\,x = \frac{1}{cos\,x}$	$cot\,x = \frac{1}{tan\,x}$

$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$	$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$	$\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$
$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos(2x)}{2}$	$\cos^2 x = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$	$\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \pm \tan A \tan B}$
$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$		
$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$ (تعكس الأشارة)		

مثال / جد مشتقة كلاً مما يأتي :

(1) $f(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

(2) $f(x) = \dfrac{x}{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = \dfrac{1}{2}$

(3) $f(x) = \dfrac{a}{x^b} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = a\,x^{-b} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = -ab\ x^{(-b-1)} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = \dfrac{-ab}{x^{b+1}}$

(4) $f(x) = \sin ax \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = a\cos ax$

(5) $f(x) = \sin\sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cos\sqrt{x}$

(6) $f(x) = \sqrt{\sin x} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin x}}\cos x$

(7) $f(x) = \sin^2 x = (\sin x)^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = 2\sin x\,.\cos x$

(8) $f(x) = \cos^2 x = (\cos x)^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = -2\cos x.\sin x$

(9) $f(x) = \sin x \cos x$

$\Rightarrow \quad \bar{f}(x) = \sin x\,(-\sin x) + \cos x\,(\cos x)$

$\Rightarrow \quad \bar{f}(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\Rightarrow \quad \bar{f}(x) = \cos(2x)$

(9) $f(x) = \tan x - x$

$\Rightarrow \quad \bar{f}(x) = \sec^2 x - 1$

$\Rightarrow \quad \bar{f}(x) = (\tan^2 x + 1) - 1$

$\Rightarrow \quad \bar{f}(x) = \tan^2 x$

المشتقات ذات الرتب العليا

أذا كانت $\mathbf{y = f(x)}$ دالة تتوافر فيها شروط الأشتقاق فأن مشتقتها الأولى هي $\left[\bar{y} = \frac{dy}{dx} = \bar{f}(x)\right]$ وهي تمثل دالة جديدة ، والدالة الجديدة أذا كانت قابلة للأشتقاق فأن مشتقتها الثانية تكون أيضا دالة جديدة ويرمز لها بالرمز $\bar{\bar{y}}$ حيث $\left[\bar{\bar{y}} = \frac{d^2y}{dx^2} = \bar{\bar{f}}(x)\right]$ ، والدالة الجديدة أذا كانت قابلة للأشتقاق فأن مشتقتها الثالثة تكون أيضا دالة جديدة ويرمز لها بالرمز $\bar{\bar{\bar{y}}}$ حيث $\left[\bar{\bar{\bar{y}}} = \frac{d^3y}{dx^3} = \bar{\bar{\bar{f}}}(x)\right]$ وهكذا فأذا كان (n) عدد صحيح موجب فأن المشتقة من الرتبة (n) تكون كالتالي $\left[y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^n(x)\right]$

ملاحظات عامة

أذا كانت $[s = f(x)]$ حيث (s) تمثل أزاحة الجسم عند أي زمن (t) لذا فأن :

① $\frac{ds}{dt} = \bar{f}(t)$ (المشتقة الأولى) وهي تمثل السرعة اللحظية للجسم ويرمز لها بالرمز (v)

② $\frac{d^2s}{dt^2} = \bar{\bar{f}}(t)$ (المشتقة الثانية) وهي تمثل التعجيل للجسم (معدل تغيير السرعة) ويرمز لها بالرمز (a)

③ $\frac{d^3s}{dt^3} = \bar{\bar{\bar{f}}}(t)$ (المشتقة الثالثة) وهي تمثل (معدل التغيير الزمني للتعجيل)

④ بعض الدوال قابلة للأشتقاق أكثر من مرة ، لذا فأن مشتقة ناتج الأشتقاق الأول تسمى بالمشتقة الثانية ، ومشتقة ناتج الأشتقاق الثاني تسمى بالمشتقة الثالثة

المشتقـــــــة الضمنية

أذا كانت $y = f(x)$ دالة بدلالة (x) فعند أشتقاق معادلة تحتوي على (x) و (y) بالنسبة لـ (x) نضيف $(\bar{y})$ بعد كل مشتقة لل (y) (وتستخدم المشتقة الضمنية عندما يكون قيمة أس (y) أكبر من واحد) كما في المثال التالي :

مثال / أوجد $(\bar{y})$ لكلاً مما يأتي :

① $x^2 + y^2 = 4x$

$$2x + 2y.\bar{y} = 4 \overset{(\div 2)}{\Longrightarrow} x + y.\bar{y} = 2 \Rightarrow y.\bar{y} = 2 - x \Rightarrow \bar{y} = \frac{2-x}{y}$$

② $xy^2 + 2x = 3$

$$x.(2y.\bar{y}) + y^2(1) + 2 = 0 \Rightarrow 2xy.\bar{y} = -y^2 - 2 \Rightarrow \bar{y} = \frac{-y^2-2}{2xy}$$

مثال (1)/ أذا كان $y = \cos 2x$ فجد $\frac{d^4y}{dx^4}$

الحل /

$$y = \cos 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = (-sin2x)(2) = -2sin2x \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = (-2cos2x)(2) = -4cos2x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = (4sin2x)(2) = 8sin2x \Rightarrow \frac{d^4y}{dx^4} = (8cos2x)(2) = 16cos2x$$

مثال (2)/ أذا علمت بأن $y^2 + x^2 = 1$ فبرهن على أن : $y\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

الحل /

$$y^2 + x^2 = 1$$

$$2y.\left(\frac{dy}{dx}\right) + 2x = 0 \quad (\div 2)$$

$$y.\left(\frac{dy}{dx}\right) + x = 0$$ (والان نشتق الطرفين بالنسبة للمتغير x)

$$y.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right).\left(\frac{dy}{dx}\right) + 1 = 0$$

$$y.\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$$ (والان نشتق الطرفين بالنسبة للمتغير x مرة أخرى)

$$y.\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right).\frac{dy}{dx} + 2\frac{dy}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) + 0 = 0 \Rightarrow y.\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) + 3\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right).\frac{dy}{dx} = 0$$

$$y\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$ (وهو المطلوب)

مثال / لتكن $xy - 13 = 0$ حيث $y \neq 0$, $x \neq 0$ فجد المشتقة الثانية

الحل /

$$x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx} - 0 = 0$$

$$x\frac{dy}{dx} + y = 0$$ المشتقة الأولى

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dx} + \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow x\,\bar{\bar{y}} + \bar{y}(1) + \bar{y} = 0$$

$$x\,\bar{\bar{y}} + 2\bar{y} = 0 \Rightarrow \bar{\bar{y}} = \frac{-2\bar{y}}{x}$$ المشتقة الثانية

مثال/ أذا كانت $f(x) = ax^2 + bx + c$ وكان $f(1) = 5$ وكان $\bar{f}(1) = 3$ وكان $\bar{\bar{f}}(1) = -4$ فجد $a, b, c \in R$

الحل /

$f(1) = a(1)^2 + b(1) + c = 5 \Rightarrow a + b + c = 5$ معادلة ①

$\bar{f}(x) = 2ax + b \Rightarrow \bar{f}(1) = 2a(1) + b = 3 \Rightarrow 2a + b = 3$ معادلة ②

$\bar{\bar{f}}(x) = 2a \Rightarrow \bar{\bar{f}}(1) = 2a = -4 \Rightarrow \boxed{a = -2}$ نعوض في ②

$2a + b = 3 \Rightarrow 2(-2) + b = 3 \Rightarrow b = 3 + 4 \Rightarrow \boxed{b = 7}$ نعوض في ①

$(-2) + (7) + c = 5 \Rightarrow c = 5 + 2 - 7 \Rightarrow \boxed{c = 0}$

مثال/ أذا كانت $y = x\sin x$ فبرهن أن $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 2\cos x$

الحل /

$y = x\sin x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x.\cos x + \sin x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = x(-\sin x) + \cos x + \cos x = -x\sin x + 2\cos x$

$\frac{d^2y}{dx^2} = -y + 2\cos x \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + y = 2\cos x$

تمارين $(1 - 3)$

س1 / جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يأتي :

$(a)\quad y = \sqrt{2 - x} \quad , \forall x < 2$

الحل /

$y = (2 - x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(2 - x)^{\frac{-1}{2}}(-1) = \frac{-1}{2}(2 - x)^{\frac{-1}{2}}$

$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{-1}{2}\right)\left(\frac{-1}{2}\right)(2 - x)^{\frac{-3}{2}}(-1) = \frac{-1}{4(2 - x)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{4\sqrt{(2 - x)^3}}$

$(b)\quad y=\dfrac{2-x}{2+x}\quad , \quad x\neq -2$

الحل /

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(2+x)(-1)-(2-x)(1)}{(2+x)^2}=\frac{-2-x-2+x}{(2+x)^2}=\frac{-4}{(2+x)^2}=-4(2+x)^{-2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(-4)(-2)(2+x)^{-3}(1)=\frac{8}{(2+x)^3}$$

$(c)\quad 2xy-4y+5=0 \quad x\neq 2\ ,\ y\neq 0$

الحل /

$$2\left[x\ \frac{dy}{dx}+y\ \frac{dx}{dx}\right]-4\frac{dy}{dx}+0=0$$

$$2x\frac{dy}{dx}+2y-4\frac{dy}{dx}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}(2x-4)=-2y \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{-2y}{(2x-4)}}$$

$$2\left[x\ \frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}\ \frac{dx}{dx}\right]+2\frac{dy}{dx}-4\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

$$2x\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+2\frac{dy}{dx}-4\frac{d^2y}{dx^2}=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{d^2y}{dx^2}\ (2x-4)=-4\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\ (2x-4)=(-4)\frac{-2y}{(2x-4)} \quad\Rightarrow\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{8y}{(2x-4)^2}=\frac{8y}{4(x-2)^2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{2y}{(x-2)^2}}$$

طريقة أخرى لحل السؤال

$$2xy-4y=-5$$

$$y(2x-4)=-5 \quad\Rightarrow\quad y=\frac{-5}{(2x-4)}=\frac{-5}{2(x-2)} \quad\Rightarrow\quad y=\frac{-5}{2}(x-2)^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-5}{2}(-1)(x-2)^{-2}(1) \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{5}{2}(x-2)^{-2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{5}{2}(-2)(x-2)^{-3}(1)=-5(x-2)^{-3} \quad\Rightarrow\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{-5}{(x-2)^3}$$

س2 / جد $\overline{\overline{\overline{f}}}(1)$ لكل مما يأ تي :

$(a)\ f(x) = 4\sqrt{6-2x} \quad , \quad \forall x < 3$

الحل /

$$f(x) = 4(6-2x)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \overline{f}(x) = 4\left(\frac{1}{2}\right)(6-2x)^{\frac{-1}{2}}(-2) = -4(6-2x)^{\frac{-1}{2}}$$

$$\Rightarrow \overline{\overline{f}}(x) = -4\left(\frac{-1}{2}\right)(6-2x)^{\frac{-3}{2}}(-2) = -4(6-2x)^{\frac{-3}{2}}$$

$$\Rightarrow \overline{\overline{\overline{f}}}(x) = -4\left(\frac{-3}{2}\right)(6-2x)^{\frac{-5}{2}}(-2) = -12(6-2x)^{\frac{-5}{2}} = \frac{-12}{(6-2x)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\Rightarrow \overline{\overline{\overline{f}}}(1) = \frac{-12}{(6-2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-12}{(4)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-12}{(2^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{-12}{(2)^5} = \frac{-12}{32} = \frac{-3}{8}$$

$(b)\ f(x) = \sin \pi x$

الحل /

$$\overline{f}(x) = \cos \pi x\,.(\pi) = \pi\ \cos \pi x$$

$$\overline{\overline{f}}(x) = -\pi \sin\ \pi x(\pi) = -\pi^2 \sin\ \pi x$$

$$\overline{\overline{\overline{f}}}(x) = -\pi^2 \cos\ \pi x\ (\pi) = -\pi^3 \cos \pi x$$

$$\overline{\overline{\overline{f}}}(1) = -\pi^3 \cos \pi(1) = -\pi^3(-1) = \pi^3$$

$(c)\ f(x) = \frac{3}{2-x} \quad , x \neq 2$

الحل /

$$f(x) = 3(2-x)^{-1} \Rightarrow \overline{f}(x) = -3(2-x)^{-2}.(-1) = 3(2-x)^{-2}$$

$$\Rightarrow \overline{\overline{f}}(x) = 3(-2)(2-x)^{-3}.(-1) = 6(2-x)^{-3}$$

$$\Rightarrow \overline{\overline{\overline{f}}}(x) = 6(-3)(2-x)^{-4}.(-1) = 18(2-x)^{-4} = \frac{18}{(2-x)^4}$$

$$\Rightarrow \overline{\overline{\overline{f}}}(1) = \frac{18}{(1)^4} = 18$$

س3 / أذا كانت $y = \tan x$ فبرهن أن $\frac{d^2y}{dx^2} = 2y(1+y^2)$ حيث $x \neq \frac{(2n+1)\pi}{2}$, $\forall\ n \in Z$

الحل /

$$\frac{dy}{dx} = sec^2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2\sec x \,.\, \sec x \tan x = 2sec^2x.\tan x$$

$$\because\ 1 + tan^2x = sec^2x$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = 2\tan x\,(1 + tan^2x) = 2y(1+y^2)$$

س4 / أذا كانت $y = x\sin x$ فبرهن أن : $y^{(4)} - y + 4\cos x = 0$

الحل /

$$\because\ y = x\sin x \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\,.\cos x + \sin x\,.(1) \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\,.\cos x + \sin x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = x.(-\sin x) + \cos x\,.(1) + \cos x = -x\sin x + 2\cos x \quad \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = -y + 2\cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 2\cos x \quad \Rightarrow \frac{d^3y}{dx^3} + \bar{y} = -2\sin x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \bar{\bar{y}} = -2\cos x \quad \Rightarrow \frac{d^4y}{dx^4} - y + 2\cos x = -2\cos x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} - y + 2\cos x + 2\cos x = 0 \quad \Rightarrow y^{(4)} - y + 4\cos x = 0$$ (و . هـ.م)

المعدلات المرتبطة

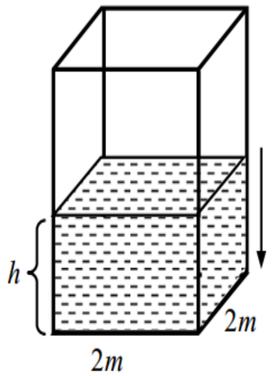
لحل مسائل المعدلات المرتبطة بالزمن وهي أحدى تطبيقات المشتقة الضمنية نتبع الخطوات التالية :

1. نرسم مخطط للمسألة (أن أحتجت الى ذلك) ونحدد المتغيرات والثوابت ونضع لها الرموز ونحدد العلاقة الرئيسية لحل السؤال
2. نحاول أيجاد علاقة أخرى بين المتغيرات لكي يقل عدد المتغيرات الداخلة في الحل
3. نشتق الطرفين بالنسبة للمتغير t (الزمن)
4. نعوض معطيات السؤال من المتغيرات بعد الأشتقاق فينتج المطلوب

مثال (1)/ خزان مملوء بالماء على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة طول ضلعها $2m$ يتسرب منه الماء بمعدل $0.4\ m^3/s$ جد معدل تغير أنخفاض الماء في الخزان عند أي زمن t

وزاري 2011 / د1 **وزاري 2013 / د2**

الحل /



نفرض ارتفاع الماء في الخزان $= h$
مساحة القاعدة $= A$ في أي زمن t
نفرض حجم الماء في الخزان $= v$

العلاقة هي قانون حجم الخزان (v) = [مساحة القاعدة × الأرتفاع]

$\therefore\ v = A.h \Rightarrow v = (2)^2.h \Rightarrow v = 4h$

الأن نشتق بالنسبة للزمن

$$\frac{dv}{dt} = 4\frac{dh}{dt}$$

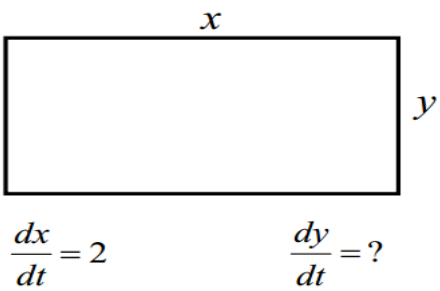
$$-0.4 = 4\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{-0.4}{4} = -0.1\ (m/h)$$

∴ **معدل تغير أنخفاض الماء في الخزان = $(0.1\ m/h)$**

مثال (2)/ صفيحة مستطيلة من المعدن مساحتها تساوي $96\ cm^2$ يتمدد طولها بمعدل $2\ cm/s$ بحيث تبقى مساحتها ثابتة ، جد معدل النقصان في عرضها عندما يكون عرضها $8\ cm$

وزاري 2014 / د3 **وزاري 2011 / د2**

الحل /



$\frac{dx}{dt} = 2$ $\frac{dy}{dt} = ?$

نفرض طول المستطيل $= x$
نفرض عرض المستطيل $= y$ في اي زمن t

العلاقة هي مساحة المستطيل (A) = $[x.y]$

$96 = xy \rightarrow$ معادلة (1) (نحسب قيمة x)

$$96 = x(8) \Rightarrow x = \frac{96}{8} \Rightarrow x = 12\ cm$$

الأن نشتق معادلة (1) بالنسبة للزمن

$$0 = x.\frac{dy}{dt} + y.\frac{dx}{dt} \Rightarrow (12).\frac{dy}{dt} + (8)(2) = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{-16}{12} = \frac{-4}{3}\ (cm/s)$$

∴ **معدل التناقص في عرض المستطيل = $\left(\frac{-4}{3}\ cm/s\right)$**

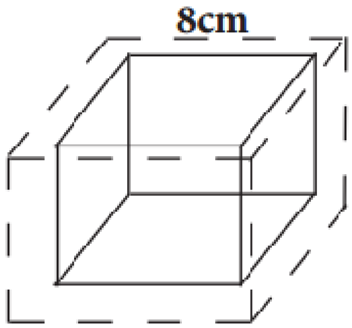
مثال (3)/ مكعب صلد طول حرفه $8\ cm$ مغطى بطبقة من الجليد بحيث شكله يبقى مكعب ، فأذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل $6\ cm^3/s$ فجد معدل النقصان بسمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها هذا السمك = $1\ cm$

وزاري 2015 / د1

الحل /

نفرض سمك الجليد $= x$ ، نفرض حجم الجليد $= v$ في أي زمن t

المطلوب حساب $\left(\frac{dx}{dt}\right)$ عندما $(x = 1)$ حيث $\left(\frac{dv}{dt} = -6\ cm^3/s\right)$



حجم الجليد = حجم المكعب مغطى بالجليد – حجم المكعب الأصلي

$v = (8 + 2x)^3 - (8)^3$ (نشتق بالنسبة للزمن)

$$\frac{dv}{dt} = 3(8 + 2x)^2(2)\frac{dx}{dt} - 0$$

$$-6 = 6(8 + 2(1))^2 \frac{dx}{dt}$$

$$-1 = (10)^2 \frac{dx}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{dx}{dt} = \frac{-1}{100}\ cm/s}$$

لذا فأن معدل النقصان في سمك الجليد = $0.01\ cm/s$

مثال (4)/ سلم طوله $10m$ يستند طرفه الاسفل على أرض أفقية وطرفه العلوي على حائط رأسـي ، فاذا انزلق الطرف الأسفل مبتعد مبتعدا عن الحائط بمعدل $2\ m/s$ عندما يكون الطرف الأسفل على بعد $8m$ عن الحائط فجد :

① معدل أنزلاق الطرف العلوي ② سرعة تغير الزاوية بين السلم والأرض

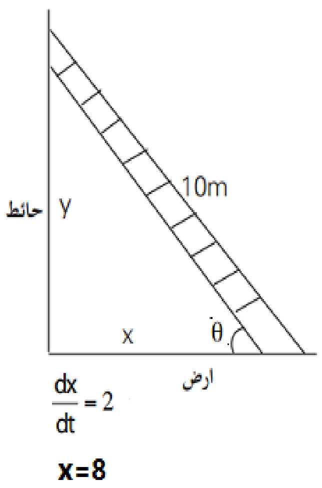
وزاري 2014 / د2   وزاري 2012 / د1

الحل / ①

نفرض بعد الطرف الأسفل عن الحائط في أي لحظة $= x$

نفرض بعد الطرف الأعلى عن الأرض في أي لحظة $= y$

نفرض قـياس الزاويـة بيـن السـلم والأرض $= \theta$



$x^2 + y^2 = 100$ (فيثاغورس)

$64 + y^2 = 100 \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow \boxed{y = 6}$

$x^2 + y^2 = 100$ (نشتق الطرفين)

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$2(8)(2) + 2(6)\frac{dy}{dt} = 0$$

$$32 + 12\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 12\frac{dy}{dt} = -32$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-8}{3}\ (m/s)$$

∴ معدل انزلاق الطرف العلوي = $\frac{8}{3}\ m/s$

الحل / ②

$\sin\theta = \frac{y}{10}$ (نشتق الطرفين) , $\cos\theta = \frac{x}{10}$

$\frac{d\sin\theta}{dt} = \frac{1}{10}\frac{dy}{dt}$

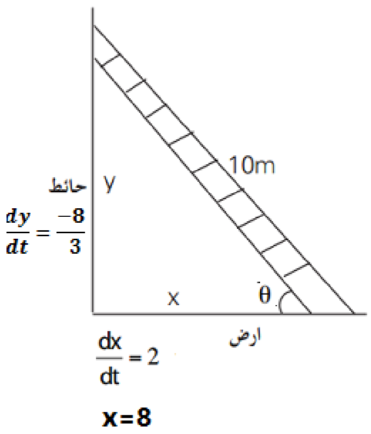
$\cos\theta . \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\frac{dy}{dt}$ (نعوض قيمة $\cos\theta$)

$\frac{x}{10} . \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\frac{dy}{dt}$ (نضرب الطرفين ب 10)

$x\frac{d\theta}{dt} = \frac{dy}{dt}$

$8\frac{d\theta}{dt} = \frac{-8}{3}$ (نقسم الطرفين على 8)

$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{3}\ (rad/s)$ سرعة تغيير الزاوية بين السلم والارض

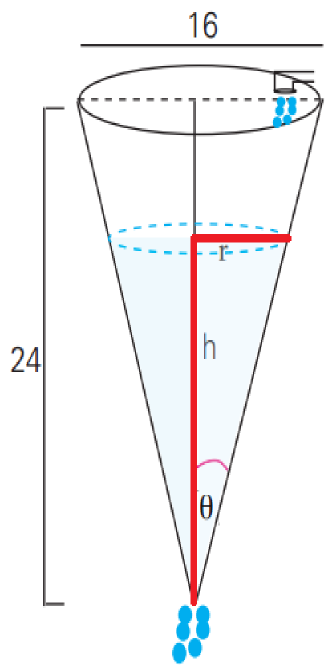


مثال (5)/ مرشح مخروطي قاعدته أفقية ورأسه الى الاسفل ارتفاعه يساوي $24\ cm$ وطول قطر قاعدته $16\ cm$ يصب فيه سائل بمعدل $5\ cm^3/s$ بينما يتسرب منه السائل بمعدل $1\ cm^3/s$ جد معدل تغير عمق السائل في اللحظة التي يكون فيها عمق السائل $12\ cm$

الحل /

نفرض أرتفاع السائل $= h$
نفرض نصف قطر القاعدة $= r$ في أي زمن t
نفرض حجم السائل $= v$

ملاحظة: معدل تغير حجم السائل=معدل الصب−معدل التسرب
$\frac{dv}{dt} = 5 - 1 = 4\ (cm^3/s)$



العلاقة هي حجم السائل في المرشح المخروطي

$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ → معادلة ①

$\tan\theta = \frac{r}{h} = \frac{8}{24} \Rightarrow \boxed{r = \frac{h}{3}}$ نعوض في معادلة ①

$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{3}\right)^2 h = \frac{1}{27}\pi h^3$

$v = \frac{\pi}{27}h^3$ (نشتق بالنسبة للزمن)

$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{27} . 3h^2\frac{dh}{dt}$

$\frac{dv}{dt} = \frac{\pi}{9}h^2\frac{dh}{dt} \Rightarrow 4 = \frac{\pi}{9}(12)^2\frac{dh}{dt}$

$\frac{dh}{dt} = \frac{(4)(9)}{144\pi} = \frac{1}{4\pi}\ (cm/s)$ معدل أزدياد أرتفاع السائل

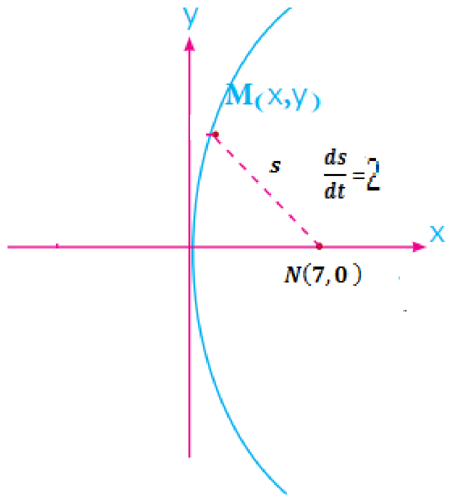
مثال (6)/ لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافئ $y^2 = 4x$ بحيث يكون معدل أبتعادها عن النقطة $(7,0)$ يساوي $0.2\ unit/s$ جد المعدل الزمني لتغير الأحداثي السيني للنقطة M عندما يكون $x = 4$

الحل /

لتكن النقطة $M(x,y) \in$ للقطع المكافئ

لتكن النقطة $N(7,0)$

S المسافة بين N , M



$$s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$s = \sqrt{(x-7)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + y^2}$$

$$s = \sqrt{x^2 - 14x + 49 + 4x} \qquad (y^2 = 4x)$$

$$s = \sqrt{x^2 - 10x + 49} = (x^2 - 10x + 49)^{\frac{1}{2}}$$ (نشتق بالنسبة للزمن)

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}(x^2 - 10x + 49)^{\frac{-1}{2}}(2x - 10)\ \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{2x - 10}{2\sqrt{x^2 - 10x + 49}}\ \frac{dx}{dt}$$

$$0.2 = \frac{2(4) - 10}{2\sqrt{(4)^2 - 10(4) + 49}}\ \frac{dx}{dt}$$

$$0.2 = \frac{-2}{2\sqrt{25}}\ \frac{dx}{dt} \Rightarrow 0.2 = \frac{-2}{10}\ \frac{dx}{dt}$$

$$0.2 = -0.2\ \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -1\ (unit/s)$$

تمارين$(2-3)$

س1 / سلم يستند طرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه الأعلى على حائط رأسي فأذا أنزلق الطرف الأسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل $2\ m/s$ فجد معدل أنزلاق الطرف العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والأرض تساوي $\frac{\pi}{3}$

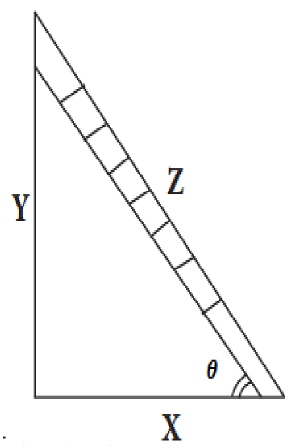
الحل /

الطريقة①

في أي زمن t
- نفرض طول السلم $Z=$
- نفرض بعد قاعدة السلم عن الجدار $x=$
- نفرض بعد رأس السلم عن الأرض $y=$
- نفرض الزاوية بين السلم و الأرض $\theta=$

العلاقة هي فيثاغورس

$$x^2+y^2=Z^2 \quad \rightarrow \text{معادلة} ①$$



$$\sin\theta=\frac{y}{Z} \quad \Rightarrow \sin\frac{\pi}{3}=\frac{y}{Z} \quad \Rightarrow \boxed{y=\frac{\sqrt{3}}{2}Z}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{Z} \quad \Rightarrow \cos\frac{\pi}{3}=\frac{x}{Z} \quad \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}Z}$$

الأن نشتق المعادلة ① بالنسبة للزمن

$$2x.\frac{dx}{dt}+2y.\frac{dy}{dt}=0 \quad \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}Z\right)(2)+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}Z\right)\frac{dy}{dt}=0$$

$$2\,Z+\sqrt{3}\,Z\frac{dy}{dt}=0 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{-2\,Z}{\sqrt{3}\,Z}=\frac{-2}{\sqrt{3}}(m/s)$$

معدل الانزلاق الطرف العلوي للسلم $= \frac{-2}{\sqrt{3}}$ m/s

الطريقة②/

$$\tan\theta=\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \tan\frac{\pi}{3}=\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \sqrt{3}=\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \boxed{y=\sqrt{3}\,x}$$

الأن نشتق المعادلة ① بالنسبة للزمن

$$2x.\frac{dx}{dt}+2y.\frac{dy}{dt}=0 \quad \Rightarrow 2(\,x)(2)+2(\sqrt{3}\,x)\frac{dy}{dt}=0$$

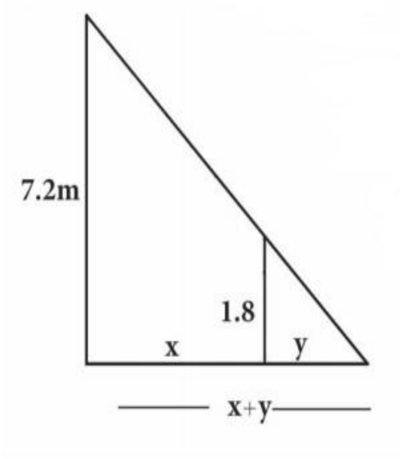
$$4x+2\sqrt{3}\,x\frac{dy}{dt}=0 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{-4x}{2\sqrt{3}\,x}=\frac{-2}{\sqrt{3}}(m/s)$$

س2 / عمود طوله $7.2\,m$ في نهايته مصباح يتحرك رجل طوله $1.8m$ مبتعدا عن العمود وبسرعة $30\ m/min$ جد معدل تغيير طول ظل الرجل
وزاري 2013 / د1

الحل /

نفرض بعد الرجل عن قاعدة المصباح $x =$
نفرض طول ظل الرجل $y =$ في أي زمن t حيث $\frac{dx}{dt} = 30$

العلاقة هي تشابه مثلثات او أستعمال (tan)



في المثلث الكبير $\tan\theta = \frac{7.2}{x+y}$

في المثلث الصغير $\tan\theta = \frac{1.8}{y}$

$$\frac{7.2}{x+y} = \frac{1.8}{y} \Rightarrow \frac{4}{x+y} = \frac{1}{y}$$

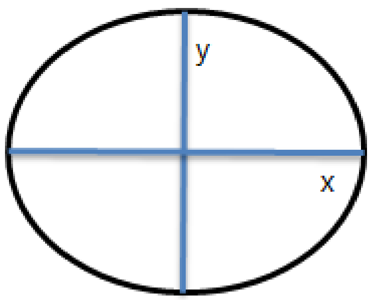
$$4y = x + y \Rightarrow 3y = x$$ (نشتق بدلالة t)

$$3\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)}{3} = \frac{30}{3} = 10\ (m/min)$$

معدل تغيير طول ظل الرجل = $10\ (m/min)$

س3 / جد النقط التي تنتمي للدائرة $x^2 + y^2 + 4x - 8y = 108$ والتي عندها يكون المعدل الزمني لتغيير (x) يساوي المعدل الزمني لتغيير (y) بالنسبة للزمن t
وزاري 2012 / د3

الحل /



العلاقة معطاة وهي $(x^2 + y^2 + 4x - 8y = 108)$ حيث $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt}$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} + 4\frac{dx}{dt} - 8\frac{dy}{dt} = 0$$ (نعوض بدل كل $\frac{dy}{dt}$ ب $\frac{dx}{dt}$)

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dx}{dt} + 4\frac{dx}{dt} - 8\frac{dx}{dt} = 0$$ (نقسم المعادلة على $2\frac{dx}{dt}$)

$$x + y + 2 - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 - y$$ (نعوضها في العلاقة المعطاة)

$$(2-y)^2 + y^2 + 4(2-y) - 8y = 108$$

$$4 - 4y + y^2 + y^2 + 8 - 4y - 8y = 108$$

$$2y^2 - 16y = 108 - 12 \Rightarrow 2y^2 - 16y = 96$$

$$y^2 - 8y = 48 \Rightarrow y^2 - 8y - 48 = 0 \Rightarrow (y-12)(y+4) = 0$$

$$either\ \ y = 12 \Rightarrow x = 2 - 12 = -10$$

$$or\ \ y = -4 \Rightarrow x = 2 - (-4) = 6$$

∴ النقطتان $(-10, 12)(6, -4)$

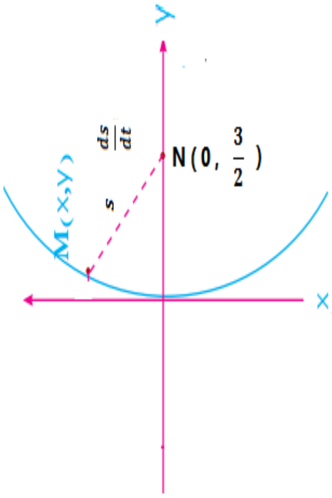
س4 / لتكن M نقطة تتحرك على القطع المكافئ $y = x^2$ جد أحداثي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لأبتعادها عن النقطة $\left(0,\frac{3}{2}\right)$ يساوي ثلثي المعدل الزمني لتغيير الأحداثي الصا دي للنقطة M **وزاري 2012 / د2**

الحل /

لتكن النقطة $M(x,y)$ ∋ للقطع المكافئ $\boxed{\frac{ds}{dt} = \frac{2}{3}\frac{dy}{dt}}$

لتكن النقطة $N\left(0,\frac{3}{2}\right)$

S المسافة بين N , M



$$\overline{MN} = s = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

$$s = \sqrt{(x-0)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{y+\left(y^2-3y+\frac{9}{4}\right)}$$

$$s = \left(y^2-2y+\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$ (نشتق بالنسبة للزمن)

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\left(y^2-2y+\frac{9}{4}\right)^{\frac{-1}{2}}.\left(2y\frac{dy}{dt}-2\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{(2y-2)\frac{dy}{dt}}{2\left(y^2-2y+\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{2}{3}\frac{dy}{dt} = \frac{(2y-2)\frac{dy}{dt}}{2\left(y^2-2y+\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2(y-1)}{2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}}} \Rightarrow 2\sqrt{y^2-2y+\frac{9}{4}} = 3(y-1)$$ (تربيع الطرفين)

$$4\left(y^2-2y+\frac{9}{4}\right) = 9(y^2-2y+1)$$

$$4y^2-8y+9 = 9y^2-18y+9$$

$$5y^2-10y = 0 \Rightarrow y^2-2y = 0 \Rightarrow y(y-2) = 0$$

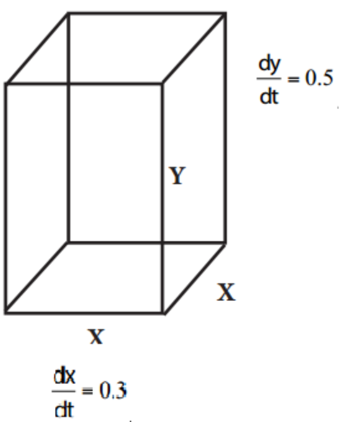
$either\ \ y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow (0,0)$ تهمل

$or\ \ y = 2 \Rightarrow x = \mp\sqrt{2} \Rightarrow (\mp\sqrt{2},2)$

$\therefore M = (\mp\sqrt{2},2)$

س5 / متوازي سطوح مستطيلة ابعاده تتغير بحيث تبقى قاعدته مربعة الشكل . يزداد طول ضلع القاعدة بمعدل $(0.3\ cm/s)$ وأرتفاعه يتناقص بمعدل $(0.5\ cm/s)$ جد معدل تغيير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة $(4\ cm)$ والارتفاع $(3\ cm)$

الحل /



نفرض طول ضلع القاعدة $= x$
نفرض ارتفاعه $= y$ في أي زمن t
حجمه $= v$

العلاقة هي قانون الحجم حيث $\boxed{v = \text{الطول} \times \text{العرض} \times \text{الارتفاع}}$

$v = x.x.y \Rightarrow v = x^2.y$ (نشتق بالنسبة للزمن)

$$\frac{dv}{dt} = x^2.\frac{dy}{dt} + y.(2x)\frac{dx}{dt}$$ (نعوض المجاهيل)

$$\frac{dv}{dt} = (4)^2.(-0.5)+(3).(2\times 4)(0.3)$$

$$\frac{dv}{dt} = (16)(-0.5)+(0.9)(8) = -8+7.2 = -0.8\ (cm^3/s)$$

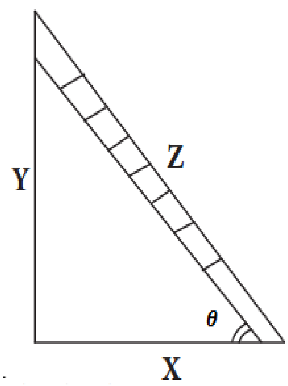
أمثلة أضافية محلولة

مثال / سلم يستند طرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه الأعلى على حائط رأسي فأذا أنزلق الطرف الأسفل مبتعدا عن الحائط بمعدل $(2\ m/s)$ فجد معدل أنزلاق الطرف العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والأرض تساوي $\frac{\pi}{4}$

الحل /

الطريقة (1)

في أي زمن t:
- نفرض طول السلم $=Z$
- نفرض بعد قاعدة السلم عن الجدار $=x$
- نفرض بعد رأس السلم عن الأرض $=y$
- نفرض الزاوية بين السلم و الأرض $=\theta$



العلاقة هي فيثاغورس

$$x^2+y^2=Z^2 \quad \rightarrow \text{معادلة (1)}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{Z} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{4}=\frac{y}{Z} \Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{\sqrt{2}}Z}$$

$$\cos\theta=\frac{x}{Z} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{4}=\frac{x}{Z} \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{\sqrt{2}}Z}$$

الأن نشتق المعادلة (1) بالنسبة للزمن

$$2x.\frac{dx}{dt}+2y.\frac{dy}{dt}=0 \Rightarrow 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Z\right)(2)+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Z\right)\frac{dy}{dt}=0$$

$$2\sqrt{2}\,Z+\sqrt{2}\,Z\frac{dy}{dt}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{-2\sqrt{2}\,Z}{\sqrt{2}\,Z}=-2(m/s)$$

$\therefore$ معدل الانزلاق = $2\ (m/s)$

الطريقة (2)

$$\tan\theta=\frac{y}{x} \Rightarrow \tan\frac{\pi}{4}=\frac{y}{x} \Rightarrow 1=\frac{y}{x} \Rightarrow \boxed{x=y}$$

الأن نشتق المعادلة (1) بالنسبة للزمن

$$2x.\frac{dx}{dt}+2y.\frac{dy}{dt}=0 \Rightarrow 2(x)(2)+2(x)\frac{dy}{dt}=0$$

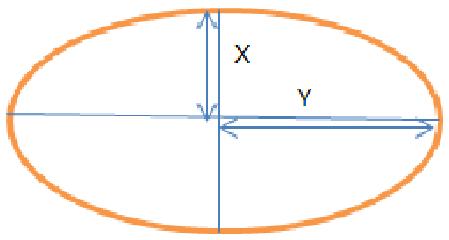
$$4x+2x\frac{dy}{dt}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{-4x}{2x}=-2(m/s)$$

مثال / قطعة معدنية على شكل قطع ناقص بمساحة ثابتة تساوي $(60\,\pi)$ وحدة مربعة فأذا أزداد طول محوره الأصغر بمعدل (0.2) وحدة طول/دقيقة فجد معدل النقصان في طول محوره الاكبر عندما يكون طول محوره الاصغر (12) وحدة طول

الحل /

نفرض طول المحور الاكبر $= y$
نفرض طول المحور الاصغر $= x$
في اي زمن t

العلاقة هي قانون المساحة حيث



$$A = 60\pi = ab\,\pi$$

$$60\pi = \left(\frac{y}{2}\right)\left(\frac{x}{2}\right)\pi$$ (نضرب الطرفين ب $\frac{4}{\pi}$)

$$x.y = 240 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{240}{x}$$

$$y = 240\,x^{-1}$$ (نشتق بالنسبة للزمن)

$$\frac{dy}{dt} = -240\,x^{-2}\,\frac{dx}{dt} \qquad \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \left(\frac{-240}{x^2}\right)\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = \left(\frac{-240}{(12)^2}\right)(0.2) = \frac{-48}{144} = \frac{-1}{3}$$

∴ معدل النقصان في طول محوره الاكبر $= \frac{1}{3}$ (وحدة طول/ دقيقة)

****

واجبات

س 1 : كرة مملوءة بالغاز يتسرب منها الغاز بمعدل $(3cm^3/s)$ جد معدل النقصان في طول نصف قطرها عنـدمـــا يكون حجمها $\left(\frac{32\pi}{3}\,cm\right)$

س 2 : نقطة مادية تتحرك على المنحني الذي معادلته $y = \sqrt{x^2 - 7}$ فأذا كان معدل تغيــر الأحداثي السيني للنقطة = $(3\ cm/s)$ عندما x=4 ، جد معدل تغير بعد النقطة عن نقطة الأصل (0,0)

س 3 : رجل طوله (175 cm) يقف أمام مصباح يرتفع عن سطح الأرض (7 m) فاذا أخذ الرجل بالابتعاد عن قاعدة المصباح بمعدل (6 m/s) فجد معدل ازدياد طول ظل الرجل

مبرهنتا رول والقيمة المتوسطة

أذا كانت f دالة معرفة على الفترة المغلقة $[a,b]$ فأن :

① f تأخذ قيمة عظمى عند C حيث $C \in [a,b]$ أذا وفقط أذا : $f(C) \geq f(x)$ لكل $x \in [a,b]$

② f تأخذ قيمة صغرى عند C حيث $C \in [a,b]$ أذا وفقط أذا : $f(C) \leq f(x)$ لكل $x \in [a,b]$

مبرهنة $(3-1)$ أذا كانت f دالة معرفة على الفترة المغلقة $[a,b]$ وكان للدالة f قيمة عظمى أو قيمة صغرى عند C حيث $c \in (a,b)$ وأن $\bar{f}(c)$ موجودة فأن $\bar{f}(c) = 0$

مبرهنة $(3-2)$ لتكن الدالة f معرفة عند العدد c يقال عن العدد c بأنه عدد حرج (critical number) أذا كان $\bar{f}(c) = 0$ أو ان الدالة غير قابلة للاشتقاق في c وتسمى $(c, f(c))$ بالنقطة الحرجة

مثال (1)/ لتكن $f(x) = |x|$, $f: [-1,1] \to R$ ، بين هل الدالة f تمتلك قيمة عظمى او صغرى

الحل /

الدالة f تمتلك أعظم قيمة عند كل من $x = -1$, $x = 1$ وتمتلك أصغر قيمة عند $x = 0$

الدالة f غير قابلة للأشتقاق عند $x = 0$ أي أن $\bar{f}(0)$ غير موجودة وهذا لا يشترط أن يكون $\bar{f}(C) = 0$

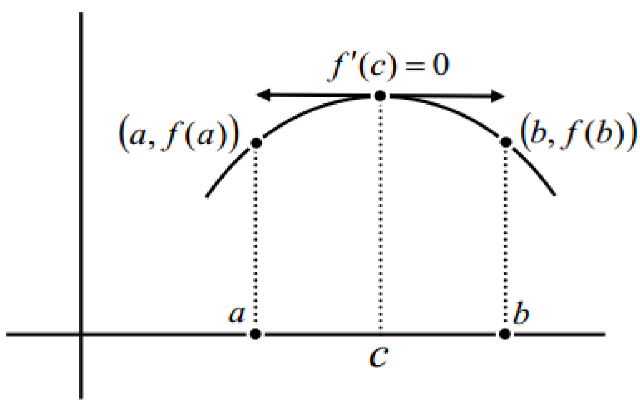
(ويلاحظ أن الدالة معرفة عند الصفر وأن $\bar{f}(0)$ غير موجودة لذا يقال أن العدد " صفر " هو العدد الحرج للدالة f وأن النقطة $(0, f(0))$ هي النقطة الحرجة).

مبرهنة رول (ROLLE'S THEOREM)

اذا كانت الدالة f

① مستمرة في الفترة المغلقة $[a,b]$ ② قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a,b) ③ $f(a) = f(b)$

فأنه يوجد على الأقل قيمة واحدة C تنتمي الى الفترة (a,b) بحيث $\bar{f}(c) = 0$ كما مبين أدناه



ملاحظات

1. هذه النظرية تعني هندسيا وجود نقطة واحدة على الأقل تنتمي للمنحني وتكون موازية لمحور السينات $x-axis$
2. عند عدم توفر أحد الشروط الثلاثة فأن مبرهنة رول لا تنطبق

مثال (2)/ بين هل أن مبرهنة رول تتحقق لكل من الدوال التالية ؟ ثم جد قيمة C الممكنة :

$(a)\ \ f(x)=(2-x)^2 \quad , \quad x\in[0,4]$

الحل /

① الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[0,4]$ لانها كثيرة حدود
② الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0,4)$ لانها كثيرة حدود
③ نوجد $f(4),f(0)$

$f(0)=(2-0)^2=(2)^2=4$

$f(4)=(2-4)^2=(-2)^2=4$

$\Rightarrow f(0)=f(4)$

$\therefore$ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول لذا نفرض $(x=c)$ ونفرض $\bar{f}(C)=0$

$f(x)=(2-x)^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x)=-2(2-x)$

$\bar{f}(c)=-2(2-c) \quad \Rightarrow \quad -2(2-c)=0$

$\therefore\ c=2\in(0,4)$

$(b)\ \ f(x)=9x+3x^2-x^3 \quad , \quad x\in[-1,1]$

الحل /

① الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-1,1]$ لانها كثيرة حدود
② الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1,1)$ لانها كثيرة حدود
③ نوجد $f(-1),f(1)$

$f(1)=9(1)+3(1)^2-(1)^3=9+3-1=11$

$f(-1)=9(-1)+3(-1)^2-(-1)^3=-9+3+1=-5$

$\Rightarrow f(-1)\neq f(1)$

$\therefore$ الدالة لا تحقق مبرهنة رول لأن الشرط الثالث لم يتحقق

$(c)\quad f(x)=\begin{cases} x^2+1 & , \quad x\in[-1,2] \\ -1 & , \quad x\in[-4,-1] \end{cases}$

الحل /

مجال الدالة $= [-4,2]$

① الشرط الأول

$$\lim_{x\to(-1)^+}(x^2+1)=2=L_1$$
$$\lim_{x\to(-1)^-}(-1)=-1=L_2$$

∴ الدالة غير مستمرة لأن $L_1\neq L_2$ في الفترة $[-4,2]$

∴ الدالة لا تحقق مبرهنة رول

$(d)\quad f(x)=K \quad , \quad x\in[a,b]$

الحل /

① الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[a,b]$ لانها دالة ثابتة

② الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a,b)

③ نوجد $f(a),f(b)$

$f(a)=k$
$f(b)=k$
$\Rightarrow f(a)=f(b)$

∴ الدالة تحقق مبرهنة رول وأن قيمة C يمكن أن تكون أي قيمة ضمن الفترة (a,b)

****

أمثلة أضافية محلولة

مثال / بين هل أن مبرهنة رول تتحقق لكل من الدوال التالية ؟ ثم جد قيمة C عند تحقق المبرهنة

$(1)\quad f(x)=x^4-8x^2 \quad , \quad [-2,2]$

الحل /

① الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-2,2]$ لانها كثيرة حدود

② الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-2,2)$

③ نوجد $f(2),f(-2)$

$f(2)=(2)^4-8(2)^2=16-32=-16$

$f(-2)=(-2)^4-8(-2)^2=16-32=-16$

$\Rightarrow f(a)=f(b)$

∴ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول لذا نفرض $(x=c)$ ونفرض $\bar{f}(C)=0$

$f(x)=x^4-8x^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x)=4x^3-16x$

$\bar{f}(c)=4(c^3)-16(c) \quad \Rightarrow \quad 4c(c^2-4)=0$

$either\quad 4c=0 \Rightarrow c=0\in(-2,2) \quad , \quad or\quad c^2=4\Rightarrow c=\pm2\notin(-2,2)$

$(2) \quad f(x) = \sin x \quad , \quad [0, 2\pi]$

الحل /

① الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[0, 2\pi]$ لأنها دالة دائرية
② الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0, 2\pi)$
③ نوجد $f(0), f(2\pi)$

$f(0) = \sin(0) = 0$
$f(2\pi) = \sin(2\pi) = 0$
$\Rightarrow f(0) = f(2\pi)$

∴ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول لذا نفرض $(x = c)$ ونفرض $\bar{f}(C) = 0$

$f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = \cos x$
$\bar{f}(c) = \cos(c) \quad \Rightarrow \quad 0 = \cos(c)$

$either \;\; c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{c = \frac{\pi}{2} \in (0, 2\pi)} \quad , \quad or \quad c = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \boxed{c = \frac{3\pi}{2} \in (0, 2\pi)}$

$(3) \quad f(x) = 9 \quad , \quad [5, 9]$

الحل /

① الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[5, 9]$لانها دالة ثابتة
② الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(5, 9)$
③ نوجد $f(5), f(9)$

$f(5) = 9$
$f(9) = 9$
$\Rightarrow f(5) = f(9)$

∴ الدالة تحقق مبرهنة رول وأن قيمة C يمكن أن تكون أي قيمة ضمن الفترة $(5, 9)$

$(4) \quad f(x) = \sqrt{16 - x^2} \quad , \quad [-2, 2]$

الحل /

$\because 16 - x^2 = 0 \quad \Rightarrow x^2 = 16 \quad \Rightarrow x = \pm 4 \quad \Rightarrow [-4, 4]$ أوسع مجال للدالة

① الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-4, 4]$ لانها مستمرة على المجموعات الجزئية
② الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-4, 4)$ لاحظ

$\bar{f}(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}} = \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}}$

③ نوجد $f(2), f(-2)$

$f(2) = \sqrt{16 - (2)^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$
$f(-2) = \sqrt{16 - (-2)^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$
$\Rightarrow f(2) = f(-2)$

∴ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول لذا نفرض $(x = c)$ ونفرض $\bar{f}(C) = 0$

$\bar{f}(x) = \frac{-x}{\sqrt{16 - x^2}} \quad \Rightarrow \bar{f}(c) = \frac{-c}{\sqrt{16 - c^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0 \quad \Rightarrow \quad C \in (-4, 4)$

$(5)\quad f(x)=\sqrt[3]{x^2}\quad , \quad [-1,1]$

الحل /

① الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-1,1]$ لانها مستمرة على المجموعة الحقيقية R

② غير قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1,1)$ لأنها غير معرفة عند الصفر لاحظ

$$\bar{f}(x)=\frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}=\frac{2}{3\left(x^{\frac{1}{3}}\right)}=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

∴ لا تتحقق مبرهنة رول ولا يمكن تطبيقها لأن الشرط الثاني غير متحقق

****

واجبات

بين هل أن مبرهنة رول تتحقق لكل من الدوال التالية ؟ وجد قيمة C الممكنة

$(1)f(x)=3x^2-12x+11$ الفترة$[-4,4]$	$(2)f(x)=x^4+4x^2+1$ الفترة$[-5,5]$
$(3)f(x)=(2-x)^2$ الفترة$[-4,4]$	$(4)f(x)=9x+3x^2-x^3$ الفترة$[-1,0]$
$(5)f(x)=m$ الفترة$[a,b]$	$(6)f(x)=\begin{cases}x^2+1 & ,x\in[-1,3]\\ -1 & ,x\in[-5,-1]\end{cases}$
$(7)f(x)=3x^2-9x$ الفترة$[-5,3]$	$(8)f(x)=(x^2-3)^2$ الفترة$[-1,4]$
$(9)f(x)=(x-1)^4$ الفترة$[-3,3]$	$(10)g(x)=x^2-3x$ $[-1,1]$
$(11)f(x)=\cos 2x+\cos x$ الفترة$[-2\pi,2\pi]$	$(12)f(x)=\lvert 2x-3\rvert$ الفترة$[-5,3]$

مبرهنة القيمة المتوسطة (THE MEAN VALUE THEOREM)

اذا كانت f دالة مستمرة في الفترة المغلقة $[a, b]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (a, b) فأنه يوجد على الأقل قيمة واحدة C تنتمي الى (a, b) وتحقق $\boxed{\bar{f}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$ او يكتب $\boxed{f(b) - f(a) = (b - a)\bar{f}(c)}$

المخطط التالي يبين التفسير الهندسي لمبرهنة القيمة المتوسطة

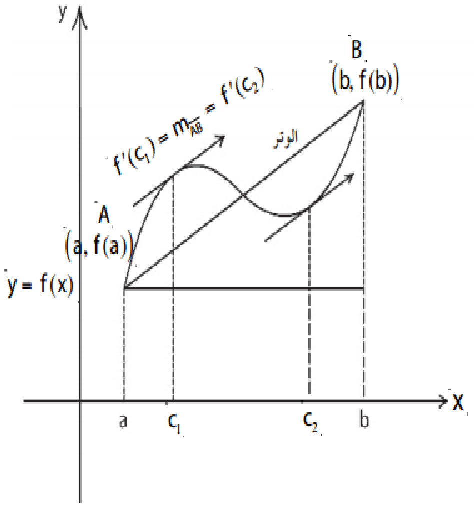
① المماس يوازي الوتر $\overline{AB}$

② ميل الوتر المار بالنقطتين A , B يساوي $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

③ ميل المماس للمنحني عند C = المشتقة الأولى للدالة f عند C أي $\left(\bar{f}\ (C)\right)$

④ المماس والوتـــــر متوازيـــــــــــان لذا يتساوى ميلهما ، أي أن

$$\bar{f}\ (C) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



ملاحظات

1 مبرهنة رول تعتبر حالة خاصة من مبرهنة القيمة المتوسطة

السبب/ لأن الشرط $f(a) = f(b)$ غير موجود في مبرهنة القيمة المتوسطة

2 في مبرهنة رول : الممـــــاس والوتـــــر كلاهـــــما يـــــوازي المحـــــور الســـــــــــيني أي أن $\bar{f}(c) = 0$

اي فرق الصادات $= 0$ لذا يصبح الميل $= 0$

3 لأيجاد قيمة C التي تحقق $\bar{f}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ يجب توافر الشرطين التاليين :

① أن تكون f دالة مستمرة في الفترة المغلقة $[a, b]$

② أن تكون f قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a, b)

مثال (3)/ برهن أن الدوال الآتية تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة و أوجد قيمة C :

$(a)\ f(x) = x^2 - 6x + 4 \quad , \quad x \in [-1, 7]$ وزاري 2012 / د 3

الحل /

① الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-1, 7]$ لانها كثيرة حدود

② الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 7)$ لانها كثيرة حدود

الشروط متحققة ⟸ مبرهنة القيمة المتوسطة متحققة

∴ نبحث عن النقطة C التي تحقق المبرهنة

$\bar{f}(x) = 2x - 6 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(c) = 2c - 6$ (ميل المماس)

$\bar{f}(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{f(7) - f(-1)}{7 - (-1)} = \dfrac{11 - 11}{18} = 0$ (ميل الوتر)

∵ ميل المماس = ميل الوتر

$\Rightarrow 2c - 6 = 0 \quad \Rightarrow 2c = 6$

$\Rightarrow c = 3 \ \in \ (-1, 7)$

$(b)\ f(x) = \sqrt{25 - x^2} \quad , \quad x \in [-4, 0]$

الحل /

$\because 25 - x^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad 25 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm 5 \quad \Rightarrow \quad x \in [-5, 5]$ (أوسع مجال للدالة)

① نبحث أستمرارية الدالة في الفترة المفتوحة $(-4, 0)$

$\lim_{x \to (-4)^+} f(x) = \lim_{x \to (-4)^+} \left(\sqrt{25 - x^2}\right) = \sqrt{25 - 16} = \sqrt{9} = 3$

$\lim_{x \to (0)^-} f(x) = \lim_{x \to (0)^-} \left(\sqrt{25 - x^2}\right) = \sqrt{25 - 0} = \sqrt{25} = 5$

∴ الدالة f مستمرة في الفترة المغلقة $[-4, 0]$

② الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-4, 0)$

الشروط متحققة ⟸ مبرهنة القيمة المتوسطة متحققة

∴ نبحث عن النقطة C التي تحقق المبرهنة

$\bar{f}(x) = \dfrac{-2x}{2\sqrt{25 - x^2}} = \dfrac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} \quad \Rightarrow \bar{f}(C) = \dfrac{-C}{\sqrt{25 - C^2}}$ (ميل المماس)

$\bar{f}(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{f(0) - f(-4)}{0 - (-4)} = \dfrac{5 - 3}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$ (ميل الوتر)

∵ ميل المماس = ميل الوتر

$\Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{-C}{\sqrt{25 - C^2}} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{25 - C^2} = -2C$ (تربيع الطرفين)

$\Rightarrow 25 - C^2 = 4C^2 \quad \Rightarrow \quad 5C^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad C^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad c = \pm\sqrt{5}$

either $\quad c = \sqrt{5} \ \notin \ (-4, 0) \qquad$ **or** $\qquad c = -\sqrt{5} \ \in \ (-4, 0)$

مثال (4)/ أذا كانت $f(x) = x^3 - 4x^2$, $f: [0, b] \to R$

وكانت f تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c = \frac{2}{3}$ فجد قيمة b

الحل /

$$\bar{f}(x) = 3x^2 - 8x \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(C) = 3C^2 - 8C$$

$$\bar{f}\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{4}{9}\right) - \frac{16}{3} = \frac{4}{3} - \frac{16}{3} = \frac{-12}{3} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(C) = -4 \quad \text{(ميل المماس)}$$

$$\bar{f}(C) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(b) - f(0)}{b - 0} = \frac{b^3 - 4b^2 - 0}{b} = b^2 - 4b \quad \text{(ميل الوتر)}$$

∵ ميل المماس = ميل الوتر

$$\Rightarrow -4 = b^2 - 4b \quad \Rightarrow \quad b^2 - 4b + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (b-2)(b-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 2$$

****

أمثلة أضافية محلولة

مثال/ اثبت في كل مما يأتي تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة (a, b) المعطاة ثم أوجد قيمة C

(1) $f(x) = x^2 + 2x - 1$, $x \in [0, 1]$

الحل /

① الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[0, 1]$ لانها كثيرة حدود

② الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0, 1)$

الشروط متحققة ⟸ مبرهنة القيمة المتوسطة متحققة

∴ نبحث عن النقطة C التي تحقق المبرهنة

$$\bar{f}(x) = 2x + 2 \quad \Rightarrow \bar{f}(C) = 2C + 2 \quad \text{(ميل المماس)}$$

$$\bar{f}(C) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{2 - (-1)}{1} = 3 \quad \text{(ميل الوتر)}$$

∵ ميل المماس = ميل الوتر

$$\Rightarrow 2C + 2 = 3 \quad \Rightarrow \quad 2C = 1 \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2} \in (0, 1)$$

(2) $f(x) = \sqrt{4-x}$, $x \in [0,4]$

الحل /

$\because 4 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$ (أوسع مجال للدالة)

① الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[0,4]$ لانها مستمرة على المجموعات الجزئية

② الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0,4)$

الشروط متحققة ⟸ مبرهنة القيمة المتوسطة متحققة

∴ نبحث عن النقطة C التي تحقق المبرهنة

$$\bar{f}(x) = \frac{-1}{2\sqrt{4-x}} \quad \Rightarrow \bar{f}(C) = \frac{-1}{2\sqrt{4-C}}$$ (ميل المماس)

$$\bar{f}(C) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(4)-f(0)}{4-0} = \frac{0-(2)}{4} = \frac{-1}{2}$$ (ميل الوتر)

∵ ميـــل المماســـاس = مـــيل الوتـــر

$$\Rightarrow \frac{-1}{2\sqrt{4-C}} = \frac{-1}{2} \quad \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4-C}} = 1$$ (تربيع الطرفين)

$$\Rightarrow \frac{1}{4-C} = 1 \quad \Rightarrow 4 - C = 1 \quad \Rightarrow C = 3 \in (0,4)$$

(3) $f(x) = 2x + \sin x$, $x \in [0,\pi]$

الحل /

① الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[0,\pi]$ لأنها دالة دائرية

② الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0,\pi)$

الشروط متحققة ⟸ مبرهنة القيمة المتوسطة متحققة

∴ نبحث عن النقطة C التي تحقق المبرهنة

$$f(x) = 2x + \sin x \quad \Rightarrow \bar{f}(x) = 2 + \cos x \quad \Rightarrow \bar{f}(c) = 2 + \cos(c)$$ (ميل المماس)

$$\bar{f}(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{(2\pi + \sin\pi) - 0}{\pi - 0} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$ (ميل الوتر)

∵ مـــيل المماســـاس = مـــيل الوتـــر

$$\Rightarrow 2 + \cos(c) = 2 \quad \Rightarrow \cos(c) = 0 \quad \Rightarrow c = \frac{\pi}{2} \in (0,\pi)$$

****

واجبات

اثبت في كل مما يأتي تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة (a,b) المعطاة ثم أوجد قيمة C

(1) $f(x) = x^2 + 1$ $x \in [-2,4]$	(2) $f(x) = x + 4x^{-1}$ $x \in [1,4]$
(3) $f(x) = (x^2-3)^2$ $x \in [-1,1]$	

التقريب بأستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة (نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة)

أذا كانت f دالة مستمرة ومعرفة على $[a,b]$ وقابلة للأشـــتقاق في (a,b) ولـــو أعتبرنا $(h=b-a)$ فأن $(b=a+h)$ حيث $h\in R$, $h\neq 0$ فأنه بموجب مبرهنة القيمة المتوسطة نحصل على :-

$$\bar{f}(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad\Rightarrow\quad \bar{f}(c)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad\Rightarrow h.\bar{f}(c)=f(a+h)-f(a)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(a+h)\cong f(a)+h.\bar{f}(c)}$$ (قانون التغيير التقريبي للدالة)

وعندما يكون أقتراب (b) من (a) قرباً كافياً تكون في هذه الحالة (h) صغيرة ويصبح الوتر صغيراً ونهايتيه قريبتان من (a) ، أي أن المماس عند (c) سيكون مماساً للمنحني عند نقطة قريبة جدا من النقطة حيث $(x=a)$ ويصبح :

$\boxed{f(a+h)\cong f(a)+h.\bar{f}(a)}$ ويقال للمقدار $h\bar{f}(a)$ التغيير التقريبي للدالة

هناك ثلاث أنواع لمسائل التقريب

النوع الأول :عندما تكون الدالة غير موجودة في السؤال لاحظ مثال (5)

مثال (5)/ جد بأستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة تقريبا مناسباً للعدد $\sqrt{26}$

الحل /

نفرض $(a=25)$ أقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه

نفرض $(b=26)$ معطى

$$h=b-a=26-25=1$$

$$f(x)=\sqrt{x} \quad\Rightarrow f(x)=x^{\left(\frac{1}{2}\right)} \quad\Rightarrow \bar{f}(x)=\frac{1}{2}x^{\left(\frac{-1}{2}\right)}=\frac{1}{2x^{\left(\frac{1}{2}\right)}} \quad\Rightarrow \bar{f}(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f(a)=\sqrt{a} \quad\Rightarrow f(25)=\sqrt{25} \quad\Rightarrow \quad f(25)=5$$

$$\bar{f}(a)=\frac{1}{2\sqrt{a}} \quad\Rightarrow \bar{f}(25)=\frac{1}{2\sqrt{25}} \quad\Rightarrow \bar{f}(25)=\frac{1}{(2)(5)}=\frac{1}{10} \quad\Rightarrow \quad \bar{f}(25)=0.1$$

$$f(a+h)\cong f(a)+h.\bar{f}(a)$$

$$f(25+1)\cong f(25)+(1).\bar{f}(25) \qquad\Rightarrow f(26)\cong 5+(1)(0.1)=5.1$$

$$\therefore\quad \sqrt{26}=5.1$$

النوع الثاني: عندما تكون الدالة موجودة في السؤال لاحظ مثال (6)

مثال (6)/ أذا كانت $f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ فجد بصورة تقريبية $f(1.001)$

الحل /

نفرض $(a = 1)$ أقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه

نفرض $(b = 1.001)$ معطى

$h = b - a = 1.001 - 1 = 0.001$

$f(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 5 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = 3x^2 + 6x + 4$

$f(a) = a^3 + 3a^2 + 4a + 5 \quad \Rightarrow f(1) = (1)^3 + 3(1)^2 + 4(1) + 5 \quad \Rightarrow \quad f(1) = 13$

$\bar{f}(a) = 3a^2 + 6a + 4 \quad \Rightarrow \bar{f}(1) = 3(1)^2 + 6(1) + 4 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(1) = 13$

$f(a + h) \cong f(a) + h.\bar{f}(a)$

$f(1 + 0.001) \cong f(1) + (0.001).\bar{f}(1) \quad \Rightarrow \quad f(1.001) \cong 13 + (0.001)(13)$

$f(1.001) = 13 + 0.013 \quad \Rightarrow \quad f(1.001) = 13.013$

النوع الثالث: عندما تكون الدالة في السؤال عبارة عن قانون مساحة او حجم او ما شابه ذلك لاحظ مثال (7)

مثال (7)/ مكعب طول حرفه $(9.98\ cm)$ جد حجمه بصورة تقريبية بأستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

الحل /

ليكن V حجم المكعب الذي طول حرفه (x)

نفرض $(a = 10)$ أقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه

نفرض $(b = 9.98)$ معطى

$h = b - a = 9.98 - 10 = -0.02$

$V(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad \bar{V}(x) = 3x^2$

$V(a) = a^3 \quad \Rightarrow \quad V(10) = (10)^3 \quad \Rightarrow \quad V(10) = 1000$

$\bar{V}(a) = 3a^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{V}(10) = 3(10)^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{V}(10) = 300$

$V(a + h) \cong V(a) + h.\bar{V}(a)$

$V(10 + (-0.02)) \cong V(10) + (-0.02).\bar{V}(10)$

$V(9.98) \cong 1000 + (-0.02)(300) = 1000 - 6 \quad \Rightarrow \quad V(9.98) = 994\ cm^3$

مثال (8)/ لتكن $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ فاذا تغيرت x من 8 الى 8.06 فما مقدار التغيير التقريبي للدالة ؟

الحل /

نفرض $(a=8)$ معطى

نفرض $(b=8.06)$ معطى

$$h=b-a=8.06-8=0.06$$

$$f(x)=\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow f(x)=(x)^{\left(\frac{2}{3}\right)} \Rightarrow \bar{f}(x)=\frac{2}{3}(x)^{\left(\frac{-1}{3}\right)} \Rightarrow \bar{f}(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$\bar{f}(a)=\frac{2}{3\sqrt[3]{a}} \Rightarrow \bar{f}(8)=\frac{2}{3\sqrt[3]{8}} \Rightarrow \bar{f}(8)=\frac{2}{6} \Rightarrow \bar{f}(8)=\frac{1}{3}$$

$$h.\bar{f}(a)\cong h.\bar{f}(8)\cong(0.06)\left(\frac{1}{3}\right)=0.02$$ مقدار التغيير التقريبي

مثال (9)/ يراد طلاء مكعب طول حرفه $(10\ cm)$ فأذا كان سمك الطلاء $(0.15\ cm)$ أوجد حجم الطلاء بصورة تقريبية وبأستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

الحل /

ليكن V حجم المكعب الذي طول حرفه (x)

نفرض $(a=10)$ أقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه

نفرض $(b=10.3)$

$$h=b-a=10.3-10=0.3$$

$$V(x)=x^3 \Rightarrow \bar{V}(x)=3x^2$$

$$\bar{V}(a)=3a^2 \Rightarrow \bar{V}(10)=3(10)^2 \Rightarrow \bar{V}(10)=300$$

$$h.\bar{V}(a)\cong h.\bar{V}(10)\cong(0.3)(300)=90\ cm^3$$ حجم الطلاء بصورة تقريبية

مثال (10)/ بأســـــتخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوســـــطة جد وبصورة تقريبيـــــة ومقرباً لثلاث مراتب عشرية على الأقل كلاً من :

$(a)\ \sqrt[5]{(0.98)^3} + (0.98)^4 + 3$ $\qquad (b)\ \sqrt[3]{7.8}$

$(c)\ \sqrt{17} + \sqrt[4]{17}$ $\qquad (d)\ \sqrt[3]{0.12}$

$(a)\ \sqrt[5]{(0.98)^3} + (0.98)^4 + 3$

الحل /

نفرض $(a = 1)$ أقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه

نفرض $(b = 0.98)$ معطى

$h = b - a = 0.98 - 1 = -0.02$

$f(x) = \sqrt[5]{x^3} + x^4 + 3 \quad \Rightarrow \quad f(x) = (x)^{\left(\frac{3}{5}\right)} + x^4 + 3$

$\bar{f}(x) = \frac{3}{5}(x)^{\left(\frac{-2}{5}\right)} + x^4 + 3 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = \frac{3}{5\ \sqrt[5]{x^2}} + 4x^3$

$f(a) = (a)^{\left(\frac{3}{5}\right)} + a^4 + 3 \quad \Rightarrow \quad f(1) = (1)^{\left(\frac{3}{5}\right)} + 1^4 + 3 \quad \Rightarrow \quad f(1) = 5$

$\bar{f}(a) = \frac{3}{5\ \sqrt[5]{a^2}} + 4a^3 \quad \Rightarrow \bar{f}(1) = \frac{3}{5\ \sqrt[5]{1^2}} + 4(1)^3 = \frac{3}{5} + 4 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(1) = 4.6$

$f(a+h) \cong f(a) + h.\bar{f}(a)$

$f\big(1 + (-0.02)\big) \cong f(1) + (-0.02).\bar{f}(1) \quad \Rightarrow \quad f(0.98) \cong 5 + (-0.02)(4.6)$

$f(0.98) = 5 - 0.092 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[5]{(0.98)^3} + (0.98)^4 + 3 \cong 4.908$

$(b)\ \sqrt[3]{7.8}$ وزاري 2011 / د1

الحل /

نفرض $(a = 8)$ أقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه

نفرض $(b = 7.8)$ معطى

$h = b - a = 7.8 - 8 = -0.2$

$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \Rightarrow f(x) = x^{\left(\frac{1}{3}\right)}$

$\bar{f}(x) = \frac{1}{3}x^{\left(\frac{-2}{3}\right)} \quad \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{1}{3x^{\left(\frac{2}{3}\right)}} \quad \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{1}{3\ \sqrt[3]{x^2}}$

$f(a) = \sqrt[3]{a} \quad \Rightarrow f(8) = \sqrt[3]{8} \quad \Rightarrow \quad f(8) = 2$

$\bar{f}(a) = \frac{1}{3\ \sqrt[3]{a^2}} \quad \Rightarrow \bar{f}(8) = \frac{1}{3\ \sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{(3)\sqrt[3]{64}} = \frac{1}{(3)(4)} = \frac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(8) = 0.083$

$f(a+h) \cong f(a) + h.\bar{f}(a)$

$f\big(8 + (-0.2)\big) \cong f(8) + (-0.2).\bar{f}(8) \quad \Rightarrow \quad f(7.8) = 2 + (-0.2)(0.083)$

$f(7.8) = 2 - 0.0166 \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{7.8} = 1.9834$

$(c)\ \sqrt{17} + \sqrt[4]{17}$

الحل /

نفرض $(a = 16)$ أقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه
نفرض $(b = 17)$ معطى

$h = b - a = 17 - 16 = 1$

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x} \Rightarrow f(x) = x^{\left(\frac{1}{2}\right)} + x^{\left(\frac{1}{4}\right)}$

$\bar{f}(x) = \frac{1}{2}x^{\left(\frac{-1}{2}\right)} + \frac{1}{4}x^{\left(\frac{-3}{4}\right)} \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{1}{2x^{\left(\frac{1}{2}\right)}} + \frac{1}{4x^{\left(\frac{3}{4}\right)}} \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$

$f(a) = \sqrt{a} + \sqrt[4]{a} \Rightarrow f(16) = \sqrt{16} + \sqrt[4]{16} = 4 + 2 \Rightarrow f(16) = 6$

$\bar{f}(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{a^3}} \Rightarrow \bar{f}(16) = \frac{1}{2\sqrt{16}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{(16)^3}} = \frac{1}{(2)(4)} + \frac{1}{(4)(8)}$

$\bar{f}(16) = \frac{1}{8} + \frac{1}{32} = \frac{4+1}{32} = \frac{5}{32} \Rightarrow \bar{f}(16) = 0.156$

$f(a+h) \cong f(a) + h.\bar{f}(a)$

$f(16+1) \cong f(16) + (1).\bar{f}(16) \Rightarrow f(17) = 6 + (1)(0.156)$

$f(17) = 6 + 0.156 \Rightarrow \sqrt{17} + \sqrt[4]{17} \cong 6.156$

$(d)\ \sqrt[3]{0.12}$

الحل /

نفرض $(a = 0.125)$ أقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه
نفرض $(b = 0.12)$ معطى

$h = b - a = 0.12 - 0.125 = -0.005$

$f(x) = \sqrt[3]{x} \Rightarrow f(x) = x^{\left(\frac{1}{3}\right)}$

$\bar{f}(x) = \frac{1}{3}x^{\left(\frac{-2}{3}\right)} \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{1}{3x^{\left(\frac{2}{3}\right)}}$

$f(a) = \sqrt[3]{a} \Rightarrow f(0.125) = \sqrt[3]{0.125} \Rightarrow f(0.125) = 0.5$

$\bar{f}(a) = \frac{1}{3a^{\left(\frac{2}{3}\right)}} \Rightarrow \bar{f}(0.125) = \frac{1}{(3)(0.125)^{\left(\frac{2}{3}\right)}} = \frac{1}{(3)((0.5)^3)^{\left(\frac{2}{3}\right)}} = \frac{1}{(3)(0.25)}$

$\bar{f}(0.125) = \frac{1}{0.75} = \frac{100}{75} = \frac{4}{3} \Rightarrow \bar{f}(0.125) = 1.333$

$f(a+h) \cong f(a) + h.\bar{f}(a)$

$f\big(0.125 + (-0.005)\big) \cong f(0.125) + (-0.005).\bar{f}(0.125)$

$f(0.12) = 0.5 + (-0.005)(1.333)$

$f(0.12) = 0.5 - 0.006665 \Rightarrow \sqrt[3]{0.12} = 0.493335$

تمارين(3 − 3)

س1 / أوجد قيمة C التي تعينها مبرهنة رول في كل مما يأتي :

$(a) \quad f(x) = x^3 - 9x \qquad , \quad x \in [-3, 3]$

الحل /

① الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-3, 3]$ لانها كثيرة حدود
② الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-3, 3)$ لانها كثيرة حدود
③ نوجد $f(3), f(-3)$

$$f(3) = (3)^3 - 9(3) = 27 - 27 = 0$$
$$f(-3) = (-3)^3 - 9(-3) = -27 + 27 = 0$$
$$\Rightarrow f(3) = f(-3)$$

∴ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول لذا نفرض $(x = c)$ ونفرض $\bar{f}(C) = 0$

$$f(x) = x^3 - 9x \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = 3x^2 - 9$$
$$\bar{f}(C) = 3C^2 - 9 \quad \Rightarrow \quad 3C^2 - 9 = 0 \quad \Rightarrow 3C^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad C^2 = 3$$
$$\therefore \; C = \mp\sqrt{3} \in (-3, 3)$$

$(b) \quad f(x) = 2x + \frac{2}{x} \qquad , \quad x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$

الحل /

① الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$ لان $0 \notin \left[\frac{1}{2}, 2\right]$
② الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ لان $0 \notin \left[\frac{1}{2}, 2\right]$
③ نوجد $f\left(\frac{1}{2}\right), f(2)$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)} = 1 + 4 = 5 \qquad , \qquad f(2) = 2(2) + \frac{2}{(2)} = 4 + 1 = 5$$
$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2)$$

∴ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول لذا نفرض $(x = c)$ ونفرض $\bar{f}(C) = 0$

$$f(x) = 2x + \frac{2}{x} \quad \Rightarrow f(x) = 2x + 2x^{-1} \quad \Rightarrow \bar{f}(x) = 2 - 2x^{-2} \quad \Rightarrow \bar{f}(x) = 2 - \frac{2}{x^2}$$
$$\bar{f}(c) = 2 - \frac{2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad 0 = 2 - \frac{2}{c^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2c^2 - 2}{c^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2c^2 - 2 = 0$$
$$c^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad c = 1 \in \left(\frac{1}{2}, 2\right)$$ نهمل السالب

$(c) \quad f(x) = (x^2 - 3)^2 \quad , \quad x \in [-1, 1]$

الحل /

① الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-1, 1]$ لانها كثيرة حدود
② الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 1)$ لانها كثيرة حدود
③ نوجد $f(1), f(-1)$

$f(1) = (1^2 - 3)^2 = (1 - 3)^2 = (-2)^2 = 4$
$f(-1) = ((-1)^2 - 3)^2 = (1 - 3)^2 = (-2)^2 = 4$
$\Rightarrow f(1) = f(-1)$

∴ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول لذا نفرض $(x = c)$ ونفرض $\bar{f}(C) = 0$

$f(x) = (x^2 - 3)^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = 2(x^2 - 3)(2x) = 4x(x^2 - 3)$

$\bar{f}(C) = 4C(C^2 - 3) \quad \Rightarrow \quad 4C(C^2 - 3) = 0$

either $4C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0 \in (-1, 1)$

or $C^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad C^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad C = \mp\sqrt{3} \notin (-1, 1)$

س2 / جد تقريباً لكل مما يأتي بأستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة :

$(a)\sqrt{63} + \sqrt[3]{63}$

الحل /

نفرض $a = 64$ أقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه

نفرض $b = 63$ معطى

$h = b - a = 63 - 64 = -1$

$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} \quad \Rightarrow f(x) = \sqrt{x} + (x)^{\left(\frac{1}{3}\right)} \quad \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3}(x)^{\left(\frac{-2}{3}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$f(a) = \sqrt{a} + \sqrt[3]{a} \quad \Rightarrow f(64) = \sqrt{64} + \sqrt[3]{64} \quad \Rightarrow f(64) = 8 + 4 \quad \Rightarrow \quad f(64) = 12$

$\bar{f}(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{a^2}} \quad \Rightarrow \bar{f}(64) = \frac{1}{2\sqrt{64}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{(64)^2}} \quad \Rightarrow \bar{f}(64) = \frac{1}{(2)(8)} + \frac{1}{(3)(16)}$

$\bar{f}(64) = \frac{1}{16} + \frac{1}{48} = \frac{3+1}{48} = \frac{4}{48} = \frac{1}{12} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(64) = 0.083$

$f(a + h) \cong f(a) + h.\bar{f}(a)$

$f\big(64 + (-1)\big) \cong f(64) + (-1).\bar{f}(64)$

$f(63) \cong 12 + (-1).(0.083) = 12 - 0.083 \quad \Rightarrow \quad f\big(\sqrt{63} + \sqrt[3]{63}\big) = 11.917$

$(b)\quad (1.04)^3+3(1.04)^4$

الحل /

نفرض $a=1$ أقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه

نفرض $b=1.04$ معطى

$h=b-a=1.04-1=0.04$

$f(x)=x^3+3x^4 \qquad \Rightarrow \bar{f}(x)=3x^2+12x^3$

$f(a)=a^3+3a^4 \quad \Rightarrow f(1)=(1)^3+3(1)^4 \quad \Rightarrow \quad f(1)=4$

$\bar{f}(a)=3a^2+12a^3 \quad \Rightarrow \bar{f}(1)=3(1)^2+12(1)^3 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(1)=15$

$f(a+h)\cong f(a)+h.\bar{f}(a)$

$f(1+0.04)\cong f(1)+(0.04).\bar{f}(1)$

$f(1.04)\cong 4+(0.04).(15)=4+0.6 \qquad \Rightarrow \quad f(1.04)=4.6$

$(c)\quad \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

الحل /

نفرض $a=8$ أقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه

نفرض $b=9$ معطى

$h=b-a=9-8=1$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\frac{1}{x^{\left(\frac{1}{3}\right)}}=x^{\left(\frac{-1}{3}\right)} \qquad \Rightarrow \bar{f}(x)=\frac{-1}{3}(x)^{\left(\frac{-4}{3}\right)}$

$f(a)=a^{\left(\frac{-1}{3}\right)} \quad \Rightarrow f(8)=(8)^{\left(\frac{-1}{3}\right)} \Rightarrow f(8)=(2^3)^{\left(\frac{-1}{3}\right)}=(2)^{-1}=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad f(8)=\frac{1}{2}$

$\bar{f}(a)=\frac{-1}{3}(a)^{\left(\frac{-4}{3}\right)} \quad \Rightarrow \bar{f}(8)=\frac{-1}{3}(8)^{\left(\frac{-4}{3}\right)} \quad \Rightarrow \bar{f}(8)=\frac{-1}{3}\left(2^3\right)^{\left(\frac{-4}{3}\right)} \Rightarrow \bar{f}(8)=\frac{-1}{(3)\left(2^4\right)}$

$\bar{f}(8)=\frac{-1}{(3)(16)}=\frac{-1}{48} \qquad \Rightarrow \quad \bar{f}(8)=\frac{-1}{48}$

$f(a+h)\cong f(a)+h.\bar{f}(a)$

$f(8+1)\cong f(8)+(1).\bar{f}(8)$

$f(9)\cong \frac{1}{2}+(1).\left(\frac{-1}{48}\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{48}=\frac{24-1}{48}=\frac{23}{48} \qquad \Rightarrow \quad f(9)\cong 0.479$

$(d)\ \frac{1}{101}$

الحل /

نفرض $a = 100$ أقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه
نفرض $b = 101$ معطى

$h = b - a = 101 - 100 = 1$

$f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1} \quad \Rightarrow \bar{f}(x) = -1\,(x)^{-2}$

$f(a) = a^{-1} \quad \Rightarrow \quad f(100) = (100)^{-1} = \frac{1}{100} \quad \Rightarrow \quad f(100) = 0.01$

$\bar{f}(a) = -1\,(a)^{-2} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(100) = -1\,(100)^{-2} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(100) = \frac{-1}{(100)^2}$

$\Rightarrow \quad \bar{f}(100) = \frac{-1}{10000} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(100) = -0.0001$

$f(a+h) \cong f(a) + h.\bar{f}(a)$

$f(100+1) \cong f(100) + (1).\bar{f}(100)$

$f(101) \cong 0.01 + (1).(-0.0001) = 0.01 - 0.0001 \quad \Rightarrow \quad f(101) = 0.0099$

$(e)\ \sqrt{\frac{1}{2}}$ وزاري 2012 / د 2 وزاري 2014 / د 2

الحل /

نفرض $a = 0.49$ أقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه

نفرض $b = 0.50$ معطى

$h = b - a = 0.50 - 0.49 = 0.01$

$f(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(a) = \sqrt{a} \quad \Rightarrow f(0.49) = \sqrt{0.49} \quad \Rightarrow \quad f(0.49) = 0.7$

$\bar{f}(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}} \quad \Rightarrow \bar{f}(0.49) = \frac{1}{2\sqrt{0.49}} = \frac{1}{(2)(0.7)} = \frac{1}{1.4} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(0.49) = 0.714$

$f(a+h) \cong f(a) + h.\bar{f}(a)$

$f(0.49+0.01) \cong f(0.49) + (0.01).\bar{f}(0.49)$

$f(0.5) \cong 0.7 + (0.01).(0.714) = 0.7 + 0.00714 \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 0.70714$

س3 / كرة نصف قطرها $(6\ cm)$ طليت بطلاء سمكه $(0.1\ cm)$ جد كمية الطلاء بصورة تقريبية بأستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة. وزاري 2014 / د1

الحل / حجم كمية الطلاء = حجم الكرة مع الطلاء – حجم الكرة

نفرض $a = 6$ أقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه

ونفرض $b = 6.1$ ويمثل نصف القطر للكرة مضافاً له كمية الطلاء .

$h = b - a = 6.1 - 6 = 0.1$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow \bar{V} = \frac{4}{3}\pi (3r^2) = 4\pi r^2$

$\bar{V}(a) = 4\pi a^2 \quad \Rightarrow \bar{V}(6) = 4\pi(6)^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{V}(6) = 144\pi$

$h.\bar{V}(a) = h.\bar{V}(6) = (0.1)\,(144\,\pi) = 14.4\pi\ \ cm^3$ (كمية الطلاء بصورة تقريبية)

س4 / كرة حجمها $(84\,\pi\ cm^3)$ جد نصف قطرها بصورة تقريبية بأستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة .

الحل /

نفرض الحجم $= V$

نفرض نصف القطر $= r$

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$84\,\pi = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \Rightarrow r^3 = \frac{(3)(84\,)}{4} = (3)(21) = 63 \quad \Rightarrow r = \sqrt[3]{63}$

نفرض $a = 64$ أقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه

نفرض $b = 63$ معطى

$h = b - a = 63 - 64 = -1$

$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\left(\frac{1}{3}\right)} \quad \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{1}{3}\,(x)^{\left(\frac{-2}{3}\right)}$

$f(a) = a^{\left(\frac{1}{3}\right)} \quad \Rightarrow f(64) = (64)^{\left(\frac{1}{3}\right)} = (4^3)^{\left(\frac{1}{3}\right)} \quad \Rightarrow \quad f(64) = 4$

$\bar{f}(a) = \frac{1}{3}\,(a)^{\left(\frac{-2}{3}\right)} \quad \Rightarrow \bar{f}(64) = \frac{1}{3}\,(64)^{\left(\frac{-2}{3}\right)} \quad \Rightarrow \bar{f}(64) = \frac{1}{3}\,(4^3)^{\left(\frac{-2}{3}\right)} = \frac{1}{3}\,(4)^{(-2)}$

$\Rightarrow \bar{f}(64) = \frac{1}{(3)(4^2)} = \frac{1}{(3)(16)} = \frac{1}{48} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(64) = 0.02$

$f(a+h) \cong f(a) + h.\bar{f}(a)$

$f\big(64 + (-1)\big) \cong f(64) + (-1).\bar{f}(64)$

$f(63) \cong 4 + (-1).(0.02) = 4 - 0.02 \quad \Rightarrow \quad f(63) = 3.98\ \ cm$

س5 / مخروط دائري قائم أرتفاعه يساوي طول قطر القاعدة فأذا كان ارتفاعه يساوي $(2.98\ cm)$ فجد حجمه بصورة تقريبية بأستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة أو نتيجتها .

الحل /

نفرض الأرتفاع $= h$

نفرض نصف القطر $= r$

$$V = \frac{\pi}{3} h r^2 \qquad \left(h = 2r \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{2}h\right)$$

$$V = \frac{\pi}{3} h.\left(\frac{h}{2}\right)^2 \qquad \Rightarrow \quad V = \frac{\pi}{12} h^3$$

نفرض $a = 3$ أقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه

نفرض $b = 2.98$ معطى

$$h = b - a = 2.98 - 3 = -0.02$$

$$V = \frac{\pi}{12} h^3 \qquad \Rightarrow \bar{V} = \frac{\pi}{12}(3h^2) = \frac{\pi}{4} h^2$$

$$V(a) = \frac{\pi}{12} a^3 \qquad \Rightarrow V(3) = \frac{\pi}{12}(3)^3 = \frac{27\,\pi}{12} = \frac{9\,\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad V(3) = 2.25\ \pi$$

$$\bar{V}(a) = \frac{1}{4}\pi a^2 \quad \Rightarrow \bar{V}(3) = \frac{1}{4}\pi(3)^2 \quad \Rightarrow \bar{V}(3) = \frac{9\,\pi}{4} \Rightarrow \quad \bar{V}(3) = 2.25\ \pi$$

$$f(a+h) \cong f(a) + h.\bar{f}(a)$$

$$f\big(3 + (-0.02)\big) \cong f(3) + (-0.02).\bar{f}(3)$$

$$f(2.98) = 2.25\ \pi + (-0.02).(2.25\ \pi) = 2.25\,\pi - 0.045\,\pi \quad \Rightarrow f(2.98) \cong 2.205\,\pi \quad cm^3$$

س6 / بين أن كل دالة من الدوال التالية تحقق مبرهنة رول على الفترة المعطاة ازاء كل منها ثم جد قيمة C

$(a)\ \ f(x) = (x-1)^4 \qquad , [-1, 3]$ وزاري 2011 / د2

الحل /

① الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-1, 3]$ لانها كثيرة حدود

② الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 3)$ لانها كثيرة حدود

③ نوجد $f(3), f(-1)$

$$f(-1) = (-1-1)^4 = (-2)^4 = 16$$

$$f(3) = (3-1)^4 = (2)^4 = 16$$

$$\Rightarrow f(-1) = f(3)$$

∴ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول لذا نفرض $(x = c)$ ونفرض $\bar{f}(C) = 0$

$$f(x) = (x-1)^4 \qquad \Rightarrow \qquad \bar{f}(x) = 4(x-1)^3$$

$$\bar{f}(c) = 4(c-1)^3 \qquad \Rightarrow \qquad 4(c-1)^3 = 0$$

$$(c-1)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad c - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 1 \in (-1, 3)$$

$(b)\ \ f(x) = x^3 - x \quad , [-1, 1]$ وزاري 2014 / د 2

الحل /

① الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-1, 1]$ لانها كثيرة الحدود

② الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 1)$ لانها كثيرة الحدود

③ نوجد $f(-1), f(1)$

$$f(-1) = (-1)^3 - (-1) = -1 + 1 = 0$$

$$f(1) = (1)^3 - (1) = 1 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow f(-1) = f(1)$$

∴ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول لذا نفرض $(x = c)$ ونفرض $\bar{f}(C) = 0$

$$f(x) = x^3 - x \qquad \Rightarrow \bar{f}(x) = 3x^2 - 1$$

$$\bar{f}(c) = 3c^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad 3c^2 - 1 = 0$$

$$3c^2 = 1 \qquad \Rightarrow c^2 = \frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \boxed{c = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \in (-1, 1)}$$

$(c)\ \ g(x) = x^2 - 3x \qquad x \in [-1, 4]$

الحل /

① الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-1, 4]$ لانها كثيرة الحدود

② الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 4)$ لانها كثيرة الحدود

③ نوجد $g(-1), g(4)$

$$g(-1) = (-1)^2 - 3(-1) = 1 + 3 = 4$$

$$g(4) = (4)^2 - 3(4) = 16 - 12 = 4$$

$$\Rightarrow g(-1) = g(4)$$

∴ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول لذا نفرض $(x = c)$ ونفرض $\bar{g}(C) = 0$

$$g(x) = x^2 - 3x \qquad \Rightarrow \bar{g}(x) = 2x - 3$$

$$\bar{g}(c) = 2c - 3 \;\Rightarrow\; 2c - 3 = 0 \;\Rightarrow\; 2c = 3 \;\Rightarrow \boxed{c = \frac{3}{2} \in (-1, 4)}$$

$(d)\ \ f(x) = \cos(2x) + 2\cos(x) \qquad ,[0, 2\pi]$

الحل /

① الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[0, 2\pi]$
② الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(0, 2\pi)$
③ نوجد $f(0), f(2\pi)$

$f(0) = \cos(0) + 2\cos(0) = 1 + 2(1) = 3$
$f(2\pi) = \cos(4\pi) + 2\cos(2\pi) = 1 + 2(1) = 3$
$\Rightarrow f(0) = f(2\pi)$

∴ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول لذا نفرض $(x = c)$ ونفرض $\bar{f}(C) = 0$

$f(x) = \cos(2x) + 2\cos(x) \qquad \Rightarrow \bar{f}(x) = -2\sin(2x) - 2\sin(x)$
$\bar{f}(c) = -2\sin(2c) - 2\sin(c) \qquad \Rightarrow \qquad -2\sin(2c) - 2\sin(c) = 0$
$\sin(2c) + \sin(c) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2\sin(c)\cos(c) + \sin(c) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \sin(c)[2\cos(c) + 1] = 0$

either $\sin(c) = 0 \qquad \Rightarrow c = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots \qquad \Rightarrow \boxed{c = \pi \in (0, 2\pi)}$

or $2\cos(c) + 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \cos(c) = \frac{-1}{2}$ (السالب يقع في الربع الثاني و الثالث)

$c = \pi - \frac{\pi}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{c = \frac{2\pi}{3} \in (0, 2\pi)}$ في الربع الثاني

$c = \pi + \frac{\pi}{3} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{c = \frac{4\pi}{3} \in (0, 2\pi)}$ في الربع الثالث

س7 / أختبر أمكانية تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة للدوال الأتية على الفترة المعطاة ازاءها مع ذكر السبب. وأن تحققت المبرهنة جد قيم C الممكنة

$(a)\ \ f(x) = x^3 - x - 1 \qquad ,[-1, 2]$

الحل /

① الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-1, 2]$ لانها كثيرة حدود
② الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 2)$ لانها كثيرة حدود

الشروط متحققة ⟸ مبرهنة القيمة المتوسطة متحققة

∴ نبحث عن النقطة C التي تحقق المبرهنة

$\bar{f}(x) = 3x^2 - 1 \qquad \Rightarrow \bar{f}(C) = 3C^2 - 1$ (ميل المماس)

$\bar{f}(C) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{5 - (-1)}{3} = \frac{6}{3} = 2$ (ميل الوتر)

∵ ميل المماس = ميل الوتر

$\Rightarrow 3C^2 - 1 = 2 \qquad \Rightarrow \qquad 3C^2 = 3 \qquad \Rightarrow \qquad C^2 = 1 \qquad \Rightarrow C = \pm 1$
$\Rightarrow \quad 1 \in (-1, 2) \quad , \quad -1 \notin (-1, 2)$

$(b)\quad h(x) = x^2 - 4x + 5 \qquad , [-1, 5]$

الحل /

① الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-1, 5]$ لانها كثيرة حدود

② الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 5)$ لانها كثيرة حدود

الشروط متحققة ⟸ مبرهنة القيمة المتوسطة متحققة

∴ نبحث عن النقطة c التي تحقق المبرهنة

$\bar{h}(x) = 2x - 4 \qquad \Rightarrow \bar{h}(c) = 2c - 4$ (ميل المماس)

$\bar{h}(c) = \frac{h(b) - h(a)}{b - a} = \frac{h(5) - h(-1)}{5 - (-1)} = \frac{10 - 10}{5 + 1} = \frac{0}{6} = 0$ (ميل الوتر)

∵ ميل المماس = ميل الوتر

$\Rightarrow\ 2c - 4 = 0 \qquad \Rightarrow 2c = 4 \quad \Rightarrow \quad c = 2 \in (-1, 5)$

$(c)\quad g(x) = \frac{4}{x + 2} \qquad , [-1, 2]$

الحل /

① الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-1, 2]$ لأن $-2 \notin [-1, 2]$

② الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 2)$ لأن $-2 \notin (-1, 2)$

الشروط متحققة ⟸ مبرهنة القيمة المتوسطة متحققة

∴ نبحث عن النقطة c التي تحقق المبرهنة

$\bar{g}(x) = \frac{-4}{(x + 2)^2} \qquad \Rightarrow \bar{g}(c) = \frac{-4}{(c + 2)^2}$ (ميل المماس)

$\bar{g}(c) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = \frac{g(2) - g(-1)}{2 - (-1)} = \frac{1 - 4}{3} = \frac{-3}{3} = -1$ (ميل الوتر)

∵ ميل المماس = ميل الوتر

$\Rightarrow \frac{-4}{(c + 2)^2} = -1 \qquad \Rightarrow \quad (c + 2)^2 = 4$ (جذر الطرفين)

$c + 2 = \pm 2$

$either\ \ c + 2 = 2 \quad \Rightarrow \quad c = 0 \ \in (-1, 2)$

$or \quad c + 2 = -2 \quad \Rightarrow \quad c = -4 \notin (-1, 2)$

$(d)\ \ B(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} \quad , [-2, 7]$

الحل /

① الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-2, 7]$

② الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $(x = -1)$ لأن $-1 \in (-2, 7)$

∴ لا يمكن تطبيق نظرية القيمة المتوسطة لأن الدالة غير قابلة للاشتقاق عند $(x = -1)$

****

أمثلة أضافية محلولة

مثال / أختبر أمكانية تطبيق مبرهنة القيمة المتوسطة للدالة الأتية على الفترة المعطاة ازاءها مع ذكر السبب. وأن تحققت المبرهنة جد قيم C الممكنة

$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1 \qquad x \in [-1, 3]$

الحل /

① الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-1, 3]$ لانها كثيرة حدود

② الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1, 3)$ لانها كثيرة حدود

الشروط متحققة ⇐ مبرهنة القيمة المتوسطة متحققة

∴ نبحث عن النقطة c التي تحقق المبرهنة

$\bar{f}(x) = 3x^2 - 2x - 1 \quad \Rightarrow \bar{f}(c) = 3c^2 - 2c - 1$ (ميل المماس)

$\bar{f}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} = \frac{16 - 0}{4} = \frac{16}{4} = 4$ (ميل الوتر)

∵ ميل المماس = ميل الوتر

$\Rightarrow 3c^2 - 2c - 1 = 4 \quad \Rightarrow \quad 3c^2 - 2c - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad (3c - 5)(c + 1) = 0$

أما $\quad 3c - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3c = 5 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{5}{3} \in (-1, 2)$

أو $\quad c + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -1 \notin (-1, 2)$

مثال / جد تقريباً لكل مما يأتي بأستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة أو نتيجتها :

(1) $\sqrt[4]{82}$

الحل /

نفرض $(a = 81)$ أقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه
نفرض $(b = 82)$ معطى

$h = b - a = 82 - 81 = 1$

$f(x) = \sqrt[4]{x} \quad \Rightarrow f(x) = x^{\left(\frac{1}{4}\right)} \quad \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{1}{4}x^{\left(\frac{-3}{4}\right)}$

$f(a) = \sqrt[4]{a} \quad \Rightarrow f(81) = \sqrt[4]{81} \quad \Rightarrow f(81) = 3$

$\bar{f}(a) = \frac{1}{4}a^{\left(\frac{-3}{4}\right)} \quad \Rightarrow \bar{f}(81) = \frac{1}{4}(81)^{\left(\frac{-3}{4}\right)} \quad \Rightarrow \bar{f}(81) = \frac{1}{4}(3^4)^{\left(\frac{-3}{4}\right)}$

$\Rightarrow \bar{f}(81) = \frac{1}{4}(3)^{(-3)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(3)^3} = \frac{1}{108} \quad \Rightarrow \bar{f}(81) = 0.009$

$f(a+h) \cong f(a) + h.\bar{f}(a)$

$f(82) \cong 3 + (1).(0.009) = 3 + 0.009 \quad \Rightarrow \quad f(82) = 3.009$

(2) $\sqrt[3]{0.126}$

الحل /

نفرض $(a = 0.125)$ أقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه
نفرض $(b = 0.126)$ معطى

$h = b - a = 0126 - 0.125 = 0.001$

$f(x) = \sqrt[3]{x} \quad \Rightarrow f(x) = x^{\left(\frac{1}{3}\right)} \quad \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{1}{3}x^{\left(\frac{-2}{3}\right)}$

$f(a) = \sqrt[3]{a} \quad \Rightarrow f(0.125) = \sqrt[3]{0.125} \quad \Rightarrow f(0.125) = 0.5$

$\bar{f}(a) = \frac{1}{3}a^{\left(\frac{-2}{3}\right)} \quad \Rightarrow \bar{f}(0.125) = \frac{1}{3}(0.125)^{\left(\frac{-2}{3}\right)} \quad \Rightarrow \bar{f}(0.125) = \frac{1}{3}((0.5)^3)^{\left(\frac{-2}{3}\right)}$

$\Rightarrow \bar{f}(0.125) = \frac{1}{3}(0.5)^{(-2)} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(0.5)^2} = \frac{1}{0.75} \quad \Rightarrow \bar{f}(0.125) = 1.3333$

$f(a+h) \cong f(a) + h.\bar{f}(a)$

$f(0.126) \cong 0.5 + (0.001).(1.3333) = 0.5 + 0.00133 \quad \Rightarrow \quad f(0.126) = 0.50133$

(3) $\sqrt[5]{-31}$

الحل /

نفرض $(a = -32)$ أقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه
نفرض $(b = -31)$ معطى

$h = b - a = -31 - (-32) = 1$

$f(x) = \sqrt[5]{x} \quad \Rightarrow f(x) = x^{\left(\frac{1}{5}\right)} \quad \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{1}{5}x^{\left(\frac{-4}{5}\right)}$

$f(a) = \sqrt[5]{a} \quad \Rightarrow f(-32) = \sqrt[5]{-32} \quad \Rightarrow f(-32) = -2$

$\bar{f}(a) = \frac{1}{5}a^{\left(\frac{-4}{5}\right)} \quad \Rightarrow \bar{f}(-32) = \frac{1}{5}(-32)^{\left(\frac{-4}{5}\right)} \quad \Rightarrow \bar{f}(-32) = \frac{1}{5}((-2)^5)^{\left(\frac{-4}{5}\right)}$

$\Rightarrow \bar{f}(-32) = \frac{1}{5}(-2)^{(-4)} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{(2)^4} = \frac{1}{80} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(-32) = 0.0125$

$f(a+h) \cong f(a) + h.\bar{f}(a)$

$f(-31) \cong -2 + (1).(0.0125) \cong -2 + 0.0125 \quad \Rightarrow \quad f(-31) = -1.9875$

مثال / أذا كانت $f(x) = x^3 + 3x^2$ جد بصورة تقريبية $f(1.001)$ ولثلاث مراتب عشرية

الحل /

نفرض $(a = 1)$ أقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه
نفرض $(b = 0.001)$ معطى

$h = 1.001 - 1 = 0.001$

$f(x) = x^3 + 3x^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = 3x^2 + 6x$

$f(a) = a^3 + 3a^2 \quad \Rightarrow \quad f(1) = (1)^3 + 3(1)^2 \quad \Rightarrow \quad f(1) = 4$

$\bar{f}(a) = 3a^2 + 6a \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(1) = 3(1)^2 + 6(1) \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(1) = 9$

$f(a+h) \cong f(a) + h.\bar{f}(a)$

$f(1.001) \cong 4 + (0.001).(9) = 4 + 0.009 \quad \Rightarrow \quad f(1.001) = 4.009$

مثال / أذا كانت $f(x) = \sqrt{3x+1}$ جد بصورة تقريبية $f(0.99)$

الحل /

نفرض $(a = 1)$ أقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه
نفرض $(b = 0.99)$ معطى

$h = b - a = 0.99 - 1 = -0.01$

$f(x) = \sqrt{3x+1} \quad \Rightarrow f(x) = (3x+1)^{\left(\frac{1}{2}\right)} \quad \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$

$f(a) = \sqrt{3a+1} \quad \Rightarrow f(1) = \sqrt{3(1)+1} \quad \Rightarrow \quad f(1) = 2$

$\bar{f}(a) = \frac{3}{2\sqrt{3a+1}} \quad \Rightarrow \bar{f}(1) = \frac{3}{2\sqrt{3(1)+1}} \quad \Rightarrow \bar{f}(1) = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(1) = 0.75$

$f(a+h) \cong f(a) + h.\bar{f}(a)$

$f(0.99) \cong 2 + (-0.01).(0.75) = 2 - 0.0075 \quad \Rightarrow \quad f(0.99) = 1.9925$

مثال / بأستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة جد بصورة تقريبية طول ضلع مربع مساحته $(50\ m^2)$

الحل /

∵ مساحة المربع = مربع طول الضلع

نفرض $(a = 49)$ أقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه
نفرض $(b = 50)$ معطى

$h = b - a = 50 - 49 = 1$

$A = x^2 \quad \Rightarrow \quad 50 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{50}$

$f(x) = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f(a) = \sqrt{a} \quad \Rightarrow f(49) = \sqrt{49} \quad \Rightarrow \quad f(49) = 7$

$\bar{f}(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}} \quad \Rightarrow \bar{f}(49) = \dfrac{1}{2\sqrt{49}} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(49) = \dfrac{1}{14} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(49) = 0.071$

$f(a+h) \cong f(a) + h.\bar{f}(a)$

$f(50) \cong 7 + (1).(0.071) = 7 + 0.071 \quad \Rightarrow \quad f(50) = 7.071$

****

واجبات

جد بصورة تقريبية بأستخدام مبرهنة القيمة المتوسطة كل مما يأتي :

$(a)\quad \sqrt{15,88}$

$(b)\quad \sqrt[3]{27.14}$

$(c)\quad \sqrt[4]{80}$

$(d)\quad \sqrt[5]{31.28}$

$(f)\quad \sqrt[3]{-9.12}$

$(g)\quad (8.12)^{\frac{2}{3}} + (8.12)^{\frac{5}{3}}$

دراســـــــــــــــــــــــة الدالة

النقطة الحرجة : هي النقطة التي تنتمي لمنحني الدالة والتي يكون عندها $\bar{f}(x) = 0$ أو تكون غير معرفة .

كيفية ايجاد النقط الحرجة

الحالة الأولى : نجد $\bar{f}(x)$ ثم نجعل $\bar{f}(x) = 0$ ثم نحل المعادلة المتكونة ونجد قيم (X) ولتكن ($X_1, X_2, X_3, \dots$) ثم نعوض قيم (X) في الدالة الأصلية ونجد قيم (Y) المقابلة لها فتكون $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),(X_3,Y_3),\dots$ هي النقط الحرجة

مثال توضيحي / جد النقط الحرجة للدوال التالية :

$(a)\ f(x) = 3x^2 - 6x$

$\bar{f}(x) = 6x - 6$ (نجعل $\bar{f}(x) = 0$)

$6x - 6 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$

$y = f(1) = 3(1)^2 - 6(1) = -3$

$\therefore$ النقطة الحرجة هي $(1, -3)$

$(b)\ f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$

$f(x) = x^2 + 2x^{-1}$

$\bar{f}(x) = 2x - 2x^{-2}$

$\bar{f}(x) = 2x - \frac{2}{x^2}$ $(\bar{f}(x) = 0)$

$2x - \frac{2}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x = \frac{2}{x^2}$

$2x^3 = 2 \Rightarrow x^3 - 1 = 0$

$x = 1 \Rightarrow y = f(1) = 1 + 2 = 3$

$\therefore$ النقطة الحرجة هي $(1, 3)$

$(c)\ f(x) = 2x + 3$

$\bar{f}(x) = 2$ (نجعل $\bar{f}(x) = 0$)

$2 = 0$ (غير ممكن) $\Rightarrow \bar{f}(x) \neq 0$

$\therefore$ لاتوجد نقطة حرجة

$(d)\ f(x) = \frac{3}{x}$

$f(x) = 3x^{-1}$

$\bar{f}(x) = -3x^{-2}$

$\bar{f}(x) = \frac{-3}{x^2}$ $(\bar{f}(x) = 0)$

$\frac{-3}{x^2} = 0 \Rightarrow -3 = 0$ (غير ممكن)

$\therefore$ لاتوجد نقطة حرجة

$(e)\ f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$

$\bar{f}(x) = 3x^2 - 6x - 9$

(نجعل $\bar{f}(x) = 0$)

$3x^2 - 6x - 9 = 0$ $(\div 3)$

$x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3}\ \boxed{x = -1}$

$y = f(3) = 27 - 27 - 27 + 5 = -22$

$y = f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$

$\therefore$ النقط الحرجة هي $(3, -22)\ (-1, 10)$

$(f)\ f(x) = (2x - 1)^3 - 6x$

$\bar{f}(x) = 3(2x - 1)^2(2) - 6$

$\bar{f}(x) = 6(2x - 1)^2 - 6$

$6(2x - 1)^2 - 6 = 0$ $(\div 6)$

$(2x - 1)^2 - 1 = 0$

$4x^2 - 4x + 1 - 1 = 0$

$4x^2 - 4x = 0$ $(\div 4)$

$x^2 - x = 0 \Rightarrow x(x - 1) = 0$

either $x = 0 \Rightarrow y = -1$

or $x = 1 \Rightarrow y = -5$

$\therefore$ النقط الحرجة هي $(0, -1)(1, -5)$

$(g)\ f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$

$\bar{f}(x) = 4x^3 - 4x$

(نجعل $\bar{f}(x) = 0$)

$4x^3 - 4x = 0$ $(\div 4)$

$x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0$

either $x = 0 \Rightarrow y = 1$

or $x = 1 \Rightarrow y = 0$

or $x = -1 \Rightarrow y = 0$

$\therefore$ النقط الحرجة هي $(-1, 0)(1, 0)\ (0, 1)$

$(h)\ f(x) = \frac{3x-1}{1-2x}$, $x \neq \frac{-1}{2}$

$\bar{f}(x) = \frac{(1-2x)(3)-(3x-1)(-2)}{(1-2x)^2}$

$\bar{f}(x) = \frac{3-6x+6x-2}{(1-2x)^2}$

$\bar{f}(x) = \frac{1}{(1-2x)^2}$ (نجعل $\bar{f}(x) = 0$)

$\frac{1}{(1 - 2x)^2} = 0 \Rightarrow 1 = 0$ (غير ممكن)

$\therefore$ لاتوجد نقطة حرجة

الحالة الثانية: اذا أعطيت نقطة حرجة يستفاد من ذلك في أيجاد الثوابت في الدالة المعطاة

مثال توضيحي ① / لتكن $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5$ وكانت للدالة نقطة حرجة هي $(-1, 10)$ فجد قيم الثوابت $a, b \in R$

الحل /

(-1,10) تحقق دالة المنحني $\longleftarrow$ $10 = -1 + a - b + 5$ $\longleftarrow$ $a - b = 6$ (معادلة ①)

$\bar{f}(x) = 3x^2 + 2ax + b$ $\longleftarrow$ $\bar{f}(-1) = 3(-1)^2 - 2a + b$ $\longleftarrow$ $3 - 2a + b = 0$ (معادلة ②)

وبحل المعادلتين أنياً نحصل على : $\boxed{b = -9}$ $\boxed{a = -3}$

مثال توضيحي ② / لتكن $f(x) = Ax^2 + \frac{B}{x}$ وكانت للدالة نقطة حرجة هي (1,3) فجد قيم الثوابت $A, B \in R$

الحل /

$(1, 3)$ تحقق دالة المنحني $\longleftarrow$ $3 = A + B$ (معادلة ①)

$f(x) = Ax^2 + Bx^{-1}$ $\longleftarrow$ $\bar{f}(x) = 2Ax - Bx^{-2}$ $\longleftarrow$ $\bar{f}(1) = 2A(1) - \frac{B}{(1)^2}$

$\longleftarrow$ $2A - B = 0$ (معادلة ②)

وبحل المعادلتين أنياً نحصل على : $\boxed{B = 2}$ $\boxed{A = 1}$

أختبار التزايد والتناقص للدالة بأستخدام المشتقة الأولى

لتكن f دالة مستمرة في الفترة المغلقة $[a, b]$ وقابلة للأشتقاق في الفترة المفتوحة (a, b) فأذا كانت :

① $x \in (a, b)$, $\bar{f}(x) > 0$ $\Rightarrow$ f متزايدة

② $x \in (a, b)$, $\bar{f}(x) < 0$ $\Rightarrow$ f متناقصة

طريقة أيجاد مناطق التزايد والتناقص

- نجد قيم (x) التي تجعل المشتقة الاولى مساوية للصفر أو غير موجودة كما تعلمنا سابقا .
- نختبر القيم على خط الأعداد فأذا كانت

(الدالة متزايدة $\leftarrow$ $\bar{f}(x) > 0$)

(الدالة متناقصة $\leftarrow$ $\bar{f}(x) < 0$)

مثال (1)/ لتكن $y = f(x) = x^2$. جد مناطق التزايد والتناقص

الحل /

$\bar{f}(x) = 2x \qquad (\bar{f}(x) = 0$ نجعل $)$

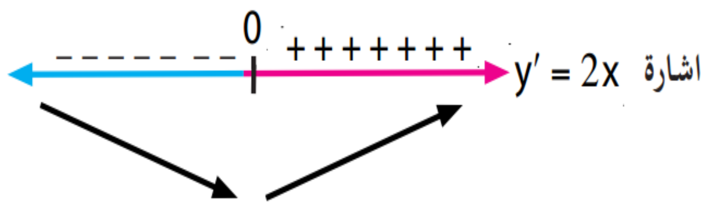
$2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

$\because\ \bar{f}(x) > 0 \ ,\forall\, x > 0$

$\therefore$ f متزايدة في $\{x: x > 0\}$

$\because\ \bar{f}(x) < 0 \ ,\forall\, x < 0$

$\therefore$ f متناقصة في $\{x: x < 0\}$



مثال (2)/ جد مناطق التزايد والتناقص لكل من الدالتين الأتيتين :

$(a) \quad f(x) = 9x + 3x^2 - x^3$

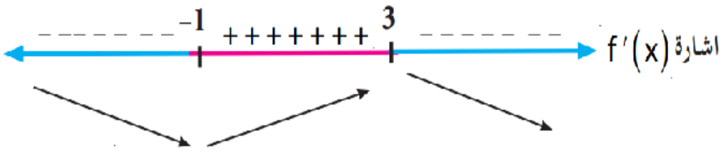
الحل /

$\bar{f}(x) = 9 + 6x - 3x^2 \qquad (\bar{f}(x) = 0$ نجعل $)$

$9 + 6x - 3x^2 = 0 \qquad (\div -3)$

$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3 \ , \quad x = -1$

نختبر على خط الأعداد إشارة المشتقة الأولى بالتعويض بقيم مجاورة للعددين $x = 3$, $x = -1$



f متناقصة : في $\{x: x < -1\}, \{x: x > 3\}$

f متزايدة : في الفترة المفتوحة $(-1, 3)$

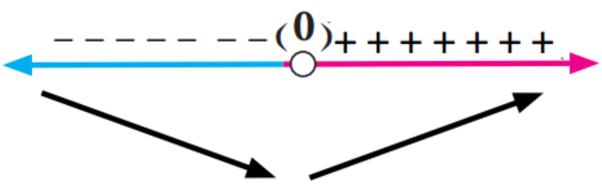
$(b)\ f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

الحل/

$f(x) = (x)^{\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = \frac{2}{3}\ (x)^{\frac{-1}{3}} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$\bar{f}(x)$ غير معرفة أذا كانت $(x = 0)$ أي ان $(x = 0)$ عدد حرج

نختبر على خط الأعداد إشارة المشتقة الأولى بالتعويض بقيم مجاورة للعدد $x = 0$



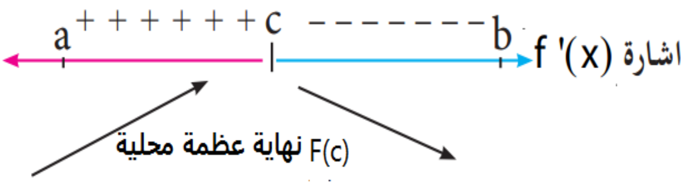
f متناقصة : في $\{x: x > 0\}$

f متزايدة : في $\{x: x < 0\}$

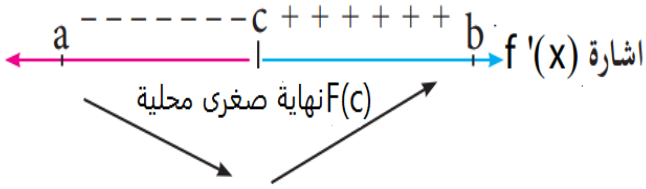
النهاية العظمى والنهاية الصغرى المحلية

لتكن f دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ وقابلة للأشتقاق عند $(x=c)$ التي تنتمي الى الفترة المفتوحة (a,b) فأذا كانت :

$$(1)\quad \left.\begin{array}{l}\bar{f}(x)<0 \;;\; \forall x\in(c,b)\\ \bar{f}(x)>0 \;;\; \forall x\in(a,c)\\ \bar{f}(c)=0\end{array}\right\} \longrightarrow$$



$$(1)\quad \left.\begin{array}{l}\bar{f}(x)>0 \;;\; \forall x\in(c,b)\\ \bar{f}(x)<0 \;;\; \forall x\in(a,c)\\ \bar{f}(c)=0\end{array}\right\} \longrightarrow$$



ملاحظة

اذا كانت النقطة $(-,+)\rightarrow$ نقطة نهاية صغرى | $(+,-)\rightarrow$ نقطة نهاية عظمى | $(+,+)or(-,-)\rightarrow$ حرجة فقط

مثال (3)/ جد نقط النهايات العظمى والصغرى المحلية للدالة f في حالة وجودها أذا علمت أن :

$(c)\ f(x)=x^3-9x^2+24x$ $\qquad (b)\ f(x)=1-(x-2)^2$ $\qquad (a)\ f(x)=1+(x-2)^2$

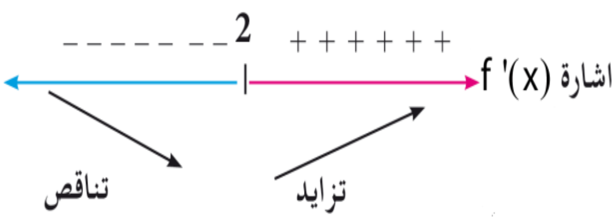
$(a)\ f(x)=1+(x-2)^2$

الحل/

$\bar{f}(x)=2(x-2)$ $\qquad \left(\bar{f}(x)=0 \text{ نجعل}\right)$

$2(x-2)=0 \quad\Rightarrow\quad x-2=0 \quad\Rightarrow\quad x=2$

$f(2)=1+(2-2)^2=1$



f متناقصة في $\{x: x<2\}$

f متزايدة في $\{x: x>2\}$

$\therefore$ النقطة $(2,f(2))=(2,1)$ تمثل نقطة نهاية صغرى محلية

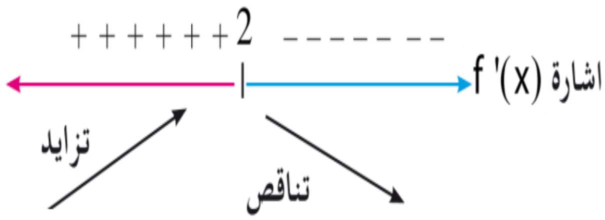
$(b)\ \ f(x) = 1 - (x-2)^2$

الحل/

$\bar{f}(x) = -2(x-2)$ $\qquad$ $\left(\bar{f}(x) = 0 \text{ نجعل}\right)$

$-2(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$

$f(2) = 1 - (2-2)^2 = 1$



f متناقصة في $\{x: x > 2\}$

f متزايدة في $\{x: x < 2\}$

$\therefore$ النقطة $(2, f(2)) = (2, 1)$ تمثل نقطة نهاية عظمى محلية

$(c)\ \ f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

الحل/

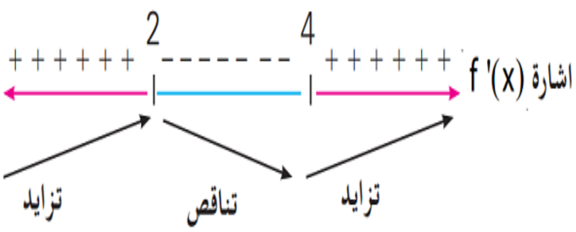
$\bar{f}(x) = 3x^2 - 18x + 24$ $\qquad$ $\left(\bar{f}(x) = 0 \text{ نجعل}\right)$

$3x^2 - 18x + 24 = 0 \quad \overset{(\div 3)}{\Longrightarrow} \quad x^2 - 6x + 8 = 0$

$(x-4)(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 4} \quad , \quad \boxed{x = 2}$

$f(2) = (2)^3 - 9(2)^2 + 24(2) = 8 - 36 + 48 = 20$

$f(4) = (4)^3 - 9(4)^2 + 24(4) = 64 - 144 + 96 = 16$



f متناقصة في الفترة المفتوحة $(2,4)$

f متزايدة في $\{x: x < 2\}$, $\{x: x > 4\}$

النقطة $(2, f(2)) = (2, 20)$ تمثل نقطة نهاية عظمى محلية

النقطة $(4, f(4)) = (4, 16)$تمثل نقطة نهاية صغرى محلية

تقعر وتحدب المنحنيات ونقط الأنقلاب

أذا كانت f دالـــــة قابلة للأشتقاق في الفترة المفتوحـــة (a, b) فيقال عن الدالـــــة f بأنها محدبـــة أذا كانت $\bar{f}$ متناقصة خلال تلك الفترة وتسمى مقعرة اذا كانت $\bar{f}$ متزايدة خلال تلك الفترة .

ملاحظة

أذا كـــانت f مـــعرفة فـــي $[a, b]$ ولها مشـــتقة أولى ومشـــتقة ثـــانية على (a, b) فأنهـا :

تكون **مقعرة** على (a, b) أذا حققت الشرط الأتي : $\quad \bar{\bar{f}}(x) > 0 \quad , \quad \forall\ x \in (a, b)$

تكون **محدبة** على (a, b) أذا حققت الشرط الأتي : $\quad \bar{\bar{f}}(x) < 0 \quad , \quad \forall\ x \in (a, b)$

مثال (1)/ أدرس تقعر وتحدب كل من الدالتين :

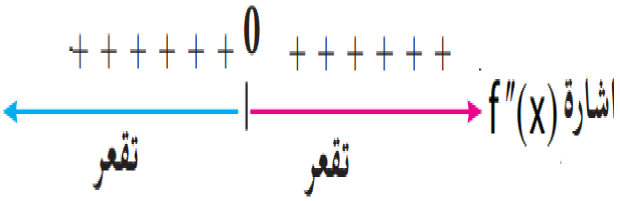
$(a)\ \ f(x) = x^2$ $\qquad\qquad$ $(b)\ \ f(x) = x^3$

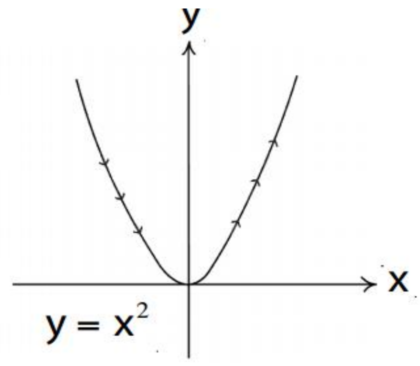
$(a)\ \ f(x) = x^2$

الحل/

$\bar{f}(x) = 2x \qquad \Rightarrow \qquad \bar{\bar{f}}(x) = 2$

$\because\ \bar{\bar{f}}(x) > 0\ ,\ \ \forall\ \ x \in R \qquad \Rightarrow$ (الدالة f مقعرة على R)





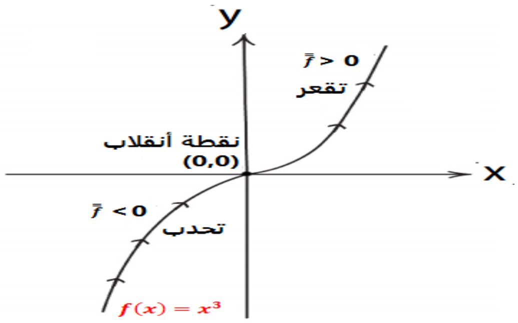
$(b)\ \ f(x) = x^3$

الحل/

$\bar{f}(x) = 3x^2 \qquad \Rightarrow \qquad \bar{\bar{f}}(x) = 6x$

نجعل $\bar{\bar{f}}(x) = 0$ لأيجاد مناطق التقعر والتحدب

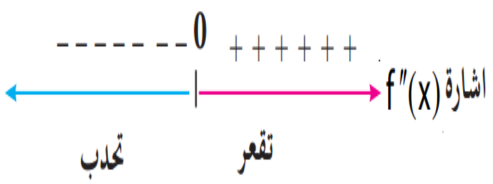
$6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0\ \ ,\ \ \ f(0) = 0$



f مقعرة في $\{x: x > 0\}$

f محدبة في $\{x: x < 0\}$

النقطة $(0, f(0)) = (0,0)$ تسمى نقطة أنقلاب



نقطة الأنقلاب :

هي النقطة التي تنتمي لمنحني الدالــة والتي عندها ينقلب المنحني من حالة التحدب الى حالة التقعر أو بالعكس **(أو بأسلوب أخر)** النقطة $p(x,y)$ هي نقطة أنقلاب أذا كانت النقطة $p(x,y)$ تنتمي لمنحني الدالة والمشتقة الثانية عندها تساوي صفر $\left(\bar{\bar{f}}(x) = 0\right)$

كيفية ايجاد نقط الأنقلاب

الحالة الأولى : نجد $\bar{f}(x)$ ومن ثم نجد $\bar{\bar{f}}(x)$ ثم نجعل $\bar{\bar{f}}(x) = 0$ ثم نحل المعادلة المتكونة ونجد قيم (X) ولتكن $(X_1 , X_2 , X_3 ,..)$ ثم نعوض قيم (X) في الدالة الأصلية ونجد قيم (Y) المقابلة لها فتكون $(X_1,Y_1),(X_2,Y_2),(X_3,Y_3),...$ هي نقط الانقلاب

ملاحظات حول طريقة أيجاد مناطق التقعر والتحدب :

- نجد قيم (x) التي تجعل المشتقة الثانية مساوية للصفر ومن ثم نجد قيم (y) المقابلة لها
- نختبر القيم على خط الأعداد فأذا كانت $\left(\bar{\bar{f}}(x) < 0 \leftarrow \text{الدالة محدبة}\right)$ أو $\left(\bar{\bar{f}}(x) > 0 \leftarrow \text{الدالة مقعرة}\right)$
- اذا لم تتغير إشارة $\bar{\bar{f}}(x)$ فأن النقطة هي ليست نقطة أنقلاب وأنما هي نقطة حرجة

مثال (2)/ جد نقطة الأنقلاب للمنحني : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$

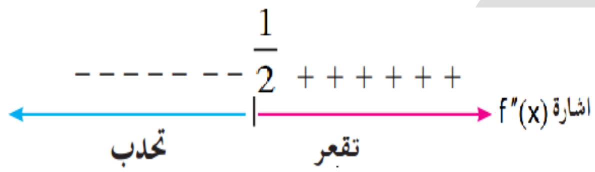
الحل/

$\bar{f}(x) = 6x^2 - 6x - 12 \quad \Rightarrow \quad \bar{\bar{f}}(x) = 12x - 6$

نجعل $\bar{\bar{f}}(x) = 0$ لأيجاد مناطق التقعر والتحدب

$12x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 12x = 6$

$x = \frac{1}{2} \quad , \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-11}{2}$



f مقعرة في $\left\{x : x > \frac{1}{2}\right\}$ لان $\bar{\bar{f}}(x)$ موجبة

f محدبة في $\left\{x : x < \frac{1}{2}\right\}$ لان $\bar{\bar{f}}(x)$ سالبة

النقطة $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{-11}{2}\right)$ هي نقطة أنقلاب

مثال (3)/ جد مناطق التحدب والتقعر ونقط الأنقلاب أن وجدت للدوال التالية :

$(a) \;\; f(x) = 4x^3 - x^4$

$(b) \;\; f(x) = x + \frac{1}{x} \quad , \quad x \neq 0$

$(c) \;\; f(x) = 4 - (x+2)^4$

$(d) \;\; f(x) = 3 - 2x - x^2$

$(e) \;\; f(x) = x^4 + 3x^2 - 3$

$(a)\ f(x) = 4x^3 - x^4$

الحل/

$f'(x) = 12x^2 - 4x^3 \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 24x - 12x^2$

نجعل $f''(x) = 0$ لأيجاد مناطق التقعر والتحدب

$24x - 12x^2 = 0 \xrightarrow{(\div 12)} 2x - x^2 = 0$

$x(2 - x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 2} \ , \ \boxed{x = 0}$

$\boxed{f(2) = 16} \ , \ \boxed{f(0) = 0}$



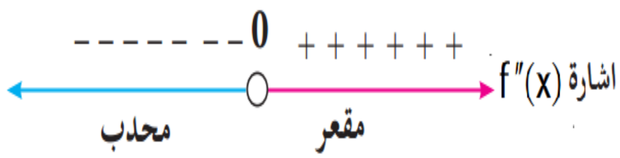
f محدبة في $\{x: x > 2\}$ و $\{x: x < 0\}$
f مقعرة في الفترة المفتوحة $(0,2)$
النقطتان $(2,16), (0,0)$ **هما نقطتا أنقلاب**

$(b)\ f(x) = x + \dfrac{1}{x} \ , \ x \neq 0$

الحل/

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$

$f''(0) = 0$ غير معرفة



f محدبة في $\{x: x < 0\}$
f مقعرة في $\{x: x > 0\}$
لا توجد نقطة أنقلاب لأن 0 **لا ينتمي لمجال الدالة**

$(c)\ h(x) = 4 - (x + 2)^4$

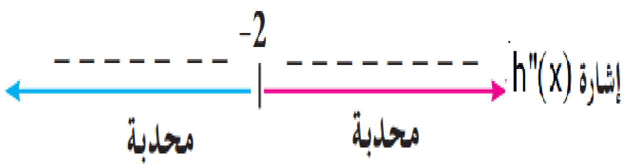
الحل/

$h'(x) = -4(x + 2)^3 \quad \Rightarrow \quad h''(x) = -12(x + 2)^2$

نجعل $h''(x) = 0$ لأيجاد مناطق التقعر والتحدب

$-12(x + 2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x + 2)^2 = 0$

$x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2$



الدالـــــة h محدبة في $\{x: x < -2\}$ و $\{x: x > -2\}$
$\therefore$ **لا توجد نقطة أنقلاب عند** $(x = -2)$ **لأن الدالة محدبة على جهتيها**

الحل/ $(d)\ f(x) = 3 - 2x - x^2$

$\bar{f}(x) = -2 - 2x \quad \Rightarrow \quad \bar{\bar{f}}(x) = -2 < 0$

لا يمكن جعل $\bar{\bar{f}}(x) = 0$

الدالـــــــة f محدبة في R

$\therefore$ لا توجد نقطة أنقلاب

الحل/ $(e)\ f(x) = x^4 + 3x^2 - 3$

$\bar{f}(x) = 4x^3 + 6x \quad \Rightarrow \quad \bar{\bar{f}}(x) = 12x^2 + 6 > 0 \ , \forall\ x \in R$

الدالـــــــة f مقعرة في R لذا لا توجد نقطة أنقلاب

أختبار المشتقة الثانية لنقط النهايات العظمى والصغرى المحلية

يستفاد من المشتقة الثانية في فحص ومعرفة نوعية النقط الحرجة دون دراستها على خط الاعداد وكما يلي : فبدلاً من ملاحظة كيفية تغيير إشارة $\bar{f}$ عند المرور بالنقطة الحرجة حيث $\bar{f}(x) = 0$ فأنه يمكننا أستخدام الأختبار التالي لنقرر فيما أذا كانت النقطة الحرجة تمثل نقطة نهاية عظمى أو صغرى محلية وذلك بأستخدام أختبار المشتقة الثانية وكما يأتي :

(1) أذا كانت $\bar{f}(c) = 0$ وأن $\bar{\bar{f}}(c) < 0$ فأن f تمتلك نهاية عظمى محلية عند $(x = c)$.

(2) أذا كانت $\bar{f}(c) = 0$ وأن $\bar{\bar{f}}(c) > 0$ فأن f تمتلك نهاية صغرى محلية عند $(x = c)$.

(3) أذا كانت $\bar{\bar{f}}(c) = 0$ أو $\bar{\bar{f}}(c)$ غير معرفة فلا يصح هذا الأختبار (ويعاد الأختبار بواسطة الطريقة السابقة عن طريق المشتقة الأولى) .

ملاحظة :

يستفاد من نقطة الانقلاب في أيجاد الثوابت كما هو الحال في النقطة الحرجة

مثال (1)/ بأستخدام أختبار المشتقة الثانية أن أمكن ، جد النهايات المحلية للدوال الأتية :

$(a)\ f(x) = 6x - 3x^2 - 1$

$(b)\ f(x) = x - \dfrac{4}{x^2} \quad , \quad x \neq 0$

$(c)\ f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

$(d)\ f(x) = 4 - (x+1)^4$

$(a)\ f(x) = 6x - 3x^2 - 1$ الحل/

$\bar{f}(x) = 6 - 6x \qquad (\bar{f}(x) = 0$ نجعل$)$

$6 - 6x = 0 \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow \boxed{x = 1}\ , \quad \boxed{\bar{f}(1) = 0}$

$\bar{\bar{f}}(x) = -6 \Rightarrow \bar{\bar{f}}(1) = -6 < 0$

$\because$ $\bar{f}(1) = 0$ و $\bar{\bar{f}}(1) = -6 < 0$

$\therefore$ توجد نهاية عظمى محلية عند $(x = 1)$

$\therefore$ النهاية العظمى المحلية هي : $f(1) = 6(1) - 3(1)^2 - 1 = 2$

$(b)\ f(x) = x - \frac{4}{x^2}\ , \quad x \neq 0$ الحل/

$\bar{f}(x) = 1 + \frac{8}{x^3} \qquad (\bar{f}(x) = 0$ نجعل$)$

$1 + \frac{8}{x^3} = 0 \Rightarrow x^3 + 8 = 0 \Rightarrow x^3 = -8 \Rightarrow \boxed{x = -2}\ , \quad \boxed{\bar{f}(-2) = 0}$

$\bar{\bar{f}}(x) = \frac{-24}{x^4} \Rightarrow \bar{\bar{f}}(-2) = \frac{-24}{16} < 0$

$\because$ $\bar{f}(-2) = 0$ و $\bar{\bar{f}}(-2) < 0$

$\therefore$ توجد نهاية عظمى محلية عند $(x = -2)$

$\therefore$ النهاية العظمى المحلية هي : $f(-2) = -2 - \frac{4}{4} = -2 - 1 = -3$

$(c)\ f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ الحل/

$\bar{f}(x) = 3x^2 - 6x - 9 \qquad (\bar{f}(x) = 0$ نجعل$)$

$3x^2 - 6x - 9 = 0 \xrightarrow{(\div 3)} x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow \boxed{x = 3}\ , \boxed{x = -1}$

$\bar{\bar{f}}(x) = 6x - 6$

عندما $x = -1$

فأن $\bar{f}(-1) = 0$ و $\bar{\bar{f}}(-1) = -12 < 0$

$\therefore$ توجد نهاية عظمى محلية عند $(x = -1)$

$\therefore$ النهاية العظمى المحلية هي : $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) = -1 - 3 + 9 = 5$

عندما $x = 3$

فأن $\bar{f}(3) = 0$ و $\bar{\bar{f}}(3) = 12 > 0$

$\therefore$ توجد نهاية صغرى محلية عند $(x = 3)$

$\therefore$ النهاية الصغرى المحلية هي : $f(3) = (3)^3 - 3(3)^2 - 9(3) = 27 - 27 - 27 = -27$

$(d)\ f(x) = 4 - (x+1)^4$

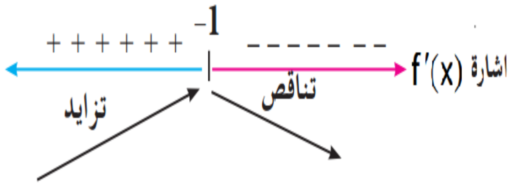
الحل/

$\bar{f}(x) = -4(x+1)^3$ ($\bar{f}(x) = 0$ نجعل)

$-4(x+1)^3 = 0 \Rightarrow (x+1)^3 = 0 \Rightarrow x+1 = 0 \Rightarrow \boxed{x=-1}\ , \quad \boxed{\bar{f}(-1) = 0}$

$\bar{\bar{f}}(x) = -12(x+1)^2 \Rightarrow \bar{\bar{f}}(-1) = 0$

$\because\ \bar{\bar{f}}(-1) = 0$ أذن هذه الطريقة لا تنفع لذا نعود الى ملاحظة تغيير إشارة $\bar{f}$ بجوار $(x=-1)$



f متزايدة في $\{x: x < -1\}$

f متناقصة في $\{x: x > -1\}$

$\therefore$ توجد نهاية عظمى محلية هي : $f(-1) = 4 - (-1+1)^4 = 4$

مثال (2)/ لتكن $a \in R\ , x \neq 0\ , f(x) = x^2 + \frac{a}{x}$

جد قيمة a علماً أن الدالة تمتلك نقطة أنقلاب عند $x = 1$ ، ثم بين أن الدالة f لا تمتلك نهاية عظمى محلية .

الحل/

$\bar{f}(x) = 2x - \frac{a}{x^2} \Rightarrow \bar{\bar{f}}(x) = 2 + \frac{2a}{x^3} \Rightarrow \bar{\bar{f}}(1) = 2 + \frac{2a}{(1)^3} = 2 + 2a$ ($\bar{\bar{f}}(x) = 0$ نجعل)

$2 + 2a = 0 \Rightarrow 2a = -2 \Rightarrow \boxed{a = -1}$

$\therefore f(x) = x^2 - \frac{1}{x} \Rightarrow \bar{f}(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ ($\bar{f}(x) = 0$ نجعل)

$2x + \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = \frac{-1}{2} \Rightarrow \boxed{x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}$

$\bar{\bar{f}}(x) = 2 - \frac{2}{x^3} \Rightarrow \bar{\bar{f}}(x) = 2 - \frac{2}{\left(\frac{-1}{2}\right)} = 2 + 4 \Rightarrow \bar{\bar{f}}(x) = 6 > 0$

$\therefore$ توجد نهاية صغرى محلية عند $\left(x = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)$

$\therefore$ الدالة f لا تمتلك نهاية عظمى محلية

وزاري 2012 / د1　　وزاري 2013 / د2　　وزاري 2013 / د3

مثال (3)/ عين قيمتي الثابتين $a\,,b$ لكي يكون لمنحني الدالة $y = x^3 + ax^2 + bx$ نهاية عظمى محلية عند $x = -1$ ونهاية عظمى محلية عند $x = 2$ ثم جد نقطة الأنقلاب .

الحل/

$$y = x^3 + ax^2 + bx \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = 3x^2 + 2ax + b$$

$\because$ للدالة نهاية عظمى محلية عند $\boxed{x = -1}$ $\Leftarrow$ $\bar{y} = 0$

$$0 = 3(-1)^2 + 2a(-1) + b \quad \Rightarrow \quad 3 - 2a + b = 0 \quad \rightarrow \quad (\text{معادلة } ①)$$

$\because$ للدالة نهاية صغرى محلية عند $\boxed{x = 2}$ $\Leftarrow$ $\bar{y} = 0$

$$0 = 3(2)^2 + 2a(2) + b \quad \Rightarrow \quad 12 + 4a + b = 0 \quad \rightarrow \quad (\text{معادلة } ②)$$

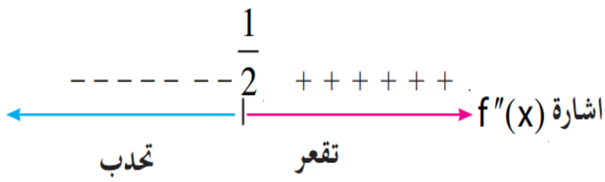
وبحل المعادلتين (1) و (2) أنيا نحصل على :

$$\boxed{a = \frac{-3}{2}} \quad , \quad \boxed{b = -6}$$

$$y = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = 3x^2 - 3x - 6 \quad \Rightarrow \quad \bar{\bar{y}} = 6x - 3 \quad (\text{نجعل } \bar{\bar{y}} = 0)$$

$$6x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 6x = 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{1}{2}}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{3}{8} - 3 = \frac{1 - 3 - 24}{8} = \frac{-26}{8} \quad \Rightarrow \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-13}{4}$$



الدالة f مقعرة في $\left\{x : x > \frac{1}{2}\right\}$

الدالة f محدبة في $\left\{x : x < \frac{1}{2}\right\}$

$\therefore$ $\left(\frac{1}{2}, \frac{-13}{4}\right)$ نقطة أنقلاب

مثال (4)/ أذا كان منحني الدالة $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ مقعـرا فــي $\{x : x < 1\}$ ومحدب في $\{x : x > 1\}$ ويمس المستقيم : $y + 9x = 28$ عند النقطة $(3, 1)$ فجد قيم الأعداد الحقيقية $c\,, b\,, a$

وزاري 2014 / د1

الحل/

$\because$ الدالة مستمرة لأنها كثيرة الحدود و مقعــرة فـــي $\{x : x < 1\}$ ومحــدبة في $\{x : x > 1\}$

$\therefore$ الدالة تمتلك نقطة أنقلاب عند $x = 1$

$$\bar{f}(x) = 3ax^2 + 2bx \quad \Rightarrow \quad \bar{\bar{f}}(x) = 6ax + 2b \quad \Rightarrow \quad \bar{\bar{f}}(1) = 6a + 2b \quad (\text{نجعل } \bar{\bar{f}}(1) = 0)$$

$$6a + 2b = 0 \quad \overset{(\div 2)}{\Longrightarrow} \quad 3a + b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -3a \quad \rightarrow \quad (\text{معادلة } ①)$$

$\because$ ميل المماس للمستقيم $y + 9x = 28$ هو $(\bar{y} = -9)$ عند $x = 3$

$\therefore$ $\bar{f}(3)$ هو ميل المماس لمنحني الدالة f عند $x = 3$

$$\bar{f}(3) = 27a + 6b \quad \Rightarrow \quad -9 = 27a + 6b \quad \overset{(\div 3)}{\Longrightarrow} \quad -3 = 9a + 2b \quad \rightarrow \quad (\text{معادلة } ②)$$

النقطة $(3, 1)$ تحقق معادلة منحني الدالة $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + c$

$$\therefore \; 1 = 27a + 9b + c \quad \rightarrow \quad (\text{معادلة } ③)$$

وبتعويض المعادلة (1) في (2) نحصل على :

$$-3 = 9a - 6a \quad \Rightarrow \quad -3 = 3a \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = -1} \quad , \quad \boxed{b = 3}$$

وبتعويض $(a = -1)$ و $(b = 3)$ في المعادلة (3) نحصل على :

$$1 = -27 + 27 + c \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = 1}$$

مثال (5)/ أذا كان للدالة $f(x) = ax^3 + 3x^2 + c$ نهاية عظمى محلية تساوي 8 ، و نقطة الأنقلاب عند $x = 1$ فجد قيمة $a , c \in R$

وزاري 2015 / د2

الحل/

$$y = ax^3 + 3x^2 + c \Rightarrow \bar{y} = 3ax^2 + 6x \Rightarrow \bar{\bar{y}} = 6ax + 6$$

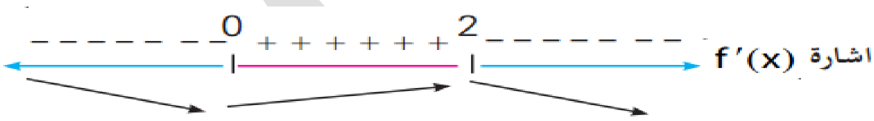
$\because$ للدالة نقطة أنقلاب عند $x = 1 \Rightarrow \bar{\bar{y}} = 0$

$$0 = 6a(1) + 6 \Rightarrow -6a = 6 \Rightarrow \boxed{a = -1}$$

$\because$ للدالة نهاية عظمى محلية تساوي $(8) \Rightarrow \bar{y} = 0$

$$\Rightarrow \bar{y} = -3x^2 + 6x \Rightarrow 0 = -3x^2 + 6x \Rightarrow 0 = -3x(x-2)$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 0} \ , \ \boxed{x = 2}$$



$\therefore$ f تمتلك نهاية عظمى محلية عند $x = 2$

$\therefore$ النقطة $(2, 8)$ نهاية عظمى محلية و تحقق معادلة منحنى الدالة :

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + c$$

$$\therefore 8 = -8 + 12 + c \Rightarrow c = 4$$

****

واجب/ أذا كان للدالة $f(x) = ax^3 + 3x^2 + c$ نهاية صغرى محليـــة تســـاوي 4 ، و نقطة الأنقلاب عند $x = 1$ فجد قيمة $a , c \in R$

تمارين $(4 - 3)$

س1 / لتكن $f(x) = ax^2 - 6x + b$ حيث $b \in R$ ، $a \in \{-4, 8\}$ جد قيمة a اذا كانت :

(أ) الدالة f محدبة (ب) الدالة f مقعرة

الحل/

$$f(x) = ax^2 - 6x + b \Rightarrow \bar{f}(x) = 2ax - 6 \Rightarrow \bar{\bar{f}}(x) = 2a$$

(أ) أذا كانت الدالة f محدبة

$$\bar{\bar{f}}(x) < 0 \Rightarrow 2a < 0 \Rightarrow a < 0 \Rightarrow \boxed{a = -4}$$

(ب) أذا كانت الدالة f مقعرة

$$\bar{\bar{f}}(x) > 0 \Rightarrow 2a > 0 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow \boxed{a = 8}$$

س2 / أذا كانت (2,6) تمثل نقطة حرجــــة لمنحني الدالة $f(x) = a - (x-b)^4$ فجد قيمة $a, b \in R$ وبين نوع النقطة الحرجة.

الحل/

$\bar{f}(x) = -4(x-b)^3(1) \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = -4(x-b)^3$

(نجعل $\bar{f}(x) = 0$) عندما $x = 2$ لأن النقطة $(2,6)$ نقطة حرجة

$0 = -4(2-b)^3 \quad \xrightarrow{(\div -4)} \quad 0 = (2-b)^3 \quad$ (بالجذر الثالث)

$0 = 2 - b \quad \Rightarrow \quad b = 2$

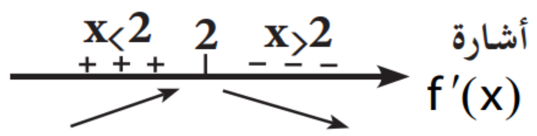
النقطة $(2,6)$ تحقق معادلة منحني الدالة $f(x) = a - (x-2)^4$

$6 = a - (2-2)^4 \quad \Rightarrow \quad 6 = a - 0 \quad \Rightarrow \quad a = 6$

لبيان نوع النقطة الحرجة نلاحظ الرسم :

$\bar{f}(x) = -4(x-2)^3$

$\therefore$ النقطة $(2,6)$ تمتلك نهاية عظمى محلية



س3 / أذا كان $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ وكان $g(x) = 1 - 12x$ وكان كل من f, g متماســـــان عند نقطة الأنقلاب وكانت للدالة f نقطة أنقلاب (1, -11) فجد قيم الثوابت $a, b, c \in R$

وزاري 2014 / د2

الحل/

$\because$ الدالتين $f(x), g(x)$ متماستان عند نقطة الأنقلاب

$\therefore$ ميل الدالتين $f(x), g(x)$ عند $(x = 1)$ متساويان أي أن $\bar{f}(x) = \bar{g}(x)$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$g(x) = 1 - 12x \quad \Rightarrow \quad \bar{g}(x) = -12$

$3ax^2 + 2bx + c = -12 \quad \Rightarrow \quad 3a(1)^2 + 2b(1) + c = -12 \quad \Rightarrow \quad 3a + 2b + c = -12 \quad \rightarrow$ (معادلة ①)

$\because$ النقطة $(1, -11)$ نقطة أنقلاب لدالة $f(x) \Leftarrow (\bar{\bar{f}}(x) = 0)$ عندما $(x = 1)$

$\bar{\bar{f}}(x) = 6ax + 2b \quad \Rightarrow \quad 0 = 6a + 2b \quad \xrightarrow{(\div 2)} \quad 3a + b = 0 \quad \rightarrow$ (معادلة ②)

النقطة $(1, -11)$ تحقق معادلة الدالة $f(x)$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \quad \Rightarrow \quad -11 = a + b + c \quad \rightarrow$ (معادلة ③)

وبحل المعادلات ① و ② و ③ آنياً سوف نحصل على

$3a + 2b + c = -12$ (معادلة ①)

$\mp a \mp b \mp c = \pm 11$ (معادلة ③) بالطرح

$2a + b = -1$

$\mp 3a \mp b = 0$ (معادلة ②) بالطرح

$-a + 0 = -1$

$\boxed{a = 1} \Rightarrow b = -3a \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = -3}$

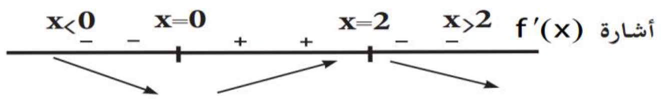
$c = -11 - a - b = -11 - 1 + 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = -9}$

س4 / أذا كانت (6) تمثل نهاية صغرى محلية لمنحنى الدالـــة $f(x) = 3x^2 - x^3 + C$ فجد قيمة $c \in R$ ثم جد معادلة المماس للمنحني في نقطة انقلابه ؟

الحل/

$f(x) = 3x^2 - x^3 + C \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 6x - 3x^2 \qquad$ (نجعل $f'(x) = 0$)

$0 = 6x - 3x^2 \quad \overset{(\div 3)}{\Longrightarrow} \quad 2x - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x(2-x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 0} \ , \ \boxed{x = 2}$



نقطة النهاية الصغرى لمنحنى الدالة (0,6)

النقطة $(0,6)$ تنتمي لمنحنى الدالة $f(x)$

$f(x) = 3x^2 - x^3 + C \quad \Rightarrow \quad 6 = 3(0)^2 - (0)^3 + C \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = 6}$

$f'(x) = 6x - 3x^2 \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 6 - 6x \qquad$ (نجعل $f''(x) = 0$)

$0 = 6 - 6x \quad \Rightarrow \quad 6 = 6x \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 1}$

$f(x) = 3x^2 - x^3 + C \quad \Rightarrow \quad f(1) = 3(1)^2 - (1)^3 + 6 = 3 - 1 + 6 = 8 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = f(1) = 8}$

∴ النقطة $(1,8)$ تمثل نقطة أنقلاب وهي نقطة ميل المماس (اي نحسب $f'(x)$ عندما $x = 1$)

$f'(1) = 6(1) - 3(1)^2 = 6 - 3 = 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{m = f'(1) = 3}$

$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \Rightarrow \quad y - 8 = 3(x - 1) \quad \Rightarrow \quad y - 8 = 3x - 3$

$\Rightarrow \quad 3x - y + 5 = 0 \qquad$ (معادلة المماس للمنحنى)

س5 / أذا كانت $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ وكانت f مقعـــرة $(\forall x > 1)$ ومحدبــــة $(\forall x < 1)$ وللدالة f نقطة نهاية عظمى محلية هي $(-1, 5)$ فجد قيم الثوابت $a, b, c \in R$

وزاري 2012 / د3

الحل/

النقطة $(-1, 5)$ تحقق دالة المنحنى $f(x)$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx \quad \Rightarrow 5 = a(-1)^3 + b(-1)^2 + c(-1) \quad \Rightarrow \quad -a + b - c = 5 \quad \rightarrow \quad$ (معادلة①)

النقطة $(-1, 5)$ نقطة نهاية عظمى محلية للدالة $f \quad \Leftarrow \quad f'(x) = 0$ عندما $(x = -1)$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \Rightarrow 0 = 3a(-1)^2 + 2b(-1) + c \quad \Rightarrow 3a - 2b + c = 0 \quad \rightarrow \quad$ (معادلة②)

∵ الدالة f مقعـــرة $(\forall x > 1)$ ومحدبـــة $(\forall x < 1)$

∴ نجعل $f''(x) = 0$ عندما $(x = 1)$ لانه توجد نقطة انقلاب

$f''(x) = 6ax + 2b \quad \Rightarrow 0 = 6a(1) + 2b \quad \Rightarrow \quad 6a + 2b = 0 \quad \rightarrow \quad$ (معادلة③)

وبحل المعادلات ① و ② و ③ أنياً سوف نحصل على

$-a + b - c = 5 \qquad$ (معادلة①)

$3a - 2b + c = 0 \qquad$ (معادلة②) بالجمع

$2a - b = 5 \qquad (\times 2)$

$6a + 2b = 0 \qquad$ (معادلة③) بالجمع

$10a + 0 = 10$

$\boxed{a = 1} \quad \Rightarrow b = 2a - 5 = 2 - 5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = -3}$

$c = -a + b - 5 = -1 + (-3) - 5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = -9}$

س6 / لتكن $x \neq 0$ ، $f(x) = x^2 - \frac{a}{x}$ برهن أن الدالة f لا تمتلك نهاية عظمى محلية .

وزاري 2013 / د1

الحل/

$f(x) = x^2 - a\,x^{-1} \Rightarrow \bar{f}(x) = 2x + ax^{-2} \Rightarrow \bar{f}(x) = 2x + \frac{a}{x^2}$ (نجعل $\bar{f}(x) = 0$)

$0 = 2x + \frac{a}{x^2} \Rightarrow -2x = \frac{a}{x^2} \Rightarrow -2\,x^3 = a \Rightarrow x^3 = \frac{-a}{2} \rightarrow$ (معادلة ①)

$\bar{\bar{f}}(x) = 2 - 2ax^{-3} \Rightarrow \bar{\bar{f}}(x) = 2 - \frac{2a}{x^3} \rightarrow$ (معادلة ②)

وبتعويض المعادلة (1) في (2) نحصل على :

$\bar{\bar{f}}(x) = 2 - \frac{2a}{\left(\frac{-a}{2}\right)} = 2 + \frac{2a}{1}\left(\frac{2}{a}\right) = 2 + 4 = 6 \Rightarrow \boxed{\bar{\bar{f}}(x) = 6}$

∴ الدالة f تمتلك نهاية صغرى محلية لأن $\bar{\bar{f}}(x) = 6 > 0$

∴ الدالة f لا تمتلك نهاية عظمى محلية مهما كانت قيمة (a)

س7 / المستقيم $3x - y = 7$ يمس المنحني $y = ax^2 + bx + c$ عند $(2,-1)$ وكانت له نهاية محلية عند $x = \frac{1}{2}$ جد قيمة $a, b, c \in R$ ، وما نوع النهاية ؟

وزاري 2015 / د1   **وزاري 2016 / د1**

الحل/

النقطة $(2,-1)$ تحقق معادلة المنحني : حيث نعوض $(y = -1\,,\ x = 2)$

$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow -1 = a(2)^2 + b(2) + c \Rightarrow 4a + 2b + c = -1 \rightarrow$ (معادلة ①)

∵ للمنحني نهاية محلية عند $x = \frac{1}{2} \Leftarrow \bar{y} = 0$ عندما $x = \frac{1}{2}$

$\bar{y} = 2ax + b \Rightarrow 0 = 2a\left(\frac{1}{2}\right) + b \Rightarrow a + b = 0 \rightarrow$ (معادلة ②)

نجد معادلة ميل المستقيم المماس من معادلته : $3x - y = 0$

$M = \frac{-x \text{ معامل}}{y \text{ معامل}} = \frac{-3}{-1} = 3 \Rightarrow \boxed{M = 3}$

نجد ميل منحني الدالة عند نقطة التماس (اي نجد $\bar{y}$ عندما $x = 2$)

$\bar{y} = 2ax + b \Rightarrow \bar{y} = 4a + b$

∵ ميل المستقيم المماس = ميل منحني الدالة عند نقطة التماس

$\Rightarrow 3 = 4a + b \Rightarrow 4a + b = 3 \rightarrow$ (معادلة ③)

بحل المعادلتين (2) و (3) أنياً نحصل على :

$a + b = 0$ (معادلة ②)
$\mp 4a \mp b = \mp 3$ (معادلة ③)   بالطرح

$-3a = -3 \Rightarrow \boxed{a = 1}$ (نعوض في معادلة ②)

$b = -a \Rightarrow \boxed{b = -1}$ (نعوض في معادلة ① لأيجاد c)

$c = -1 - 4a - 2b = -1 - 4(1) - 2(-1) = -1 - 4 + 2 \Rightarrow \boxed{c = -3}$

اشارة $\bar{f}(x)$:   - - - - - - - - $\frac{1}{2}$ + + + + + +

$y = f(x) = x^2 - x - 3$

$if \quad x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 3 \Rightarrow y = -3\frac{1}{4}$

∴ النقطة $\left(\frac{1}{2}\,,\ -3\frac{1}{4}\right)$ تمثل نهاية صغرى محلية

أمثلة أضافية محلولة

مثال/ جد أن وجدت مناطق التزايد والتناقص والنقط الحرجة وقيم نقاط النهايات للدوال الأتية:

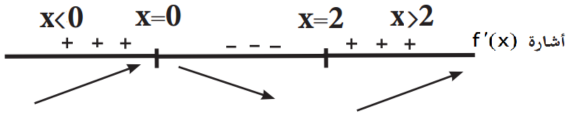
$(a)\ f(x) = x^3 - 3x^2$

$\bar{f}(x) = 3x^2 - 6x \qquad (\bar{f}(x) = 0$ نجعل $)$

$3x^2 - 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow x(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{x = 2}\ \boxed{x = 0}$

$either \quad x = 2 \quad \Rightarrow \boxed{y = -4} \qquad or \quad x = 0 \quad \Rightarrow \boxed{y = 0}$

∴ النقط الحرجة هي$(0,0)(2,-4)$



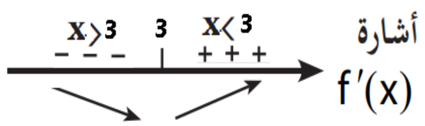
النقطة(0,0) نهاية عظمى محلية
قيمة النهاية العظمى المحلية تساوي (0)
النقطة(2,-4) نهاية صغرى محلية
قيمة النهاية الصغرى المحلية تساوي (-4)
مناطق التزايد $\begin{Bmatrix} x: & x < 0 \\ x: & x > 2 \end{Bmatrix}$
مناطق التناقص = الفترة $(0,2)$

$(b)\ f(x) = x^2 - 6x + 4$

$\bar{f}(x) = 2x - 6 \qquad (\bar{f}(x) = 0$ نجعل $)$

$2x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 3} \qquad \Rightarrow y = 9 - 18 + 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = -5}$

∴ النقط الحرجة هي$(3,-5)$



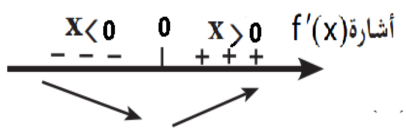
النقطة (3,-5) نهاية صغرى محلية
قيمة النهاية الصغرى المحلية تساوي (-5)
مناطق التزايد $\{x: x > 3\}$
مناطق التناقص $\{x: x < 3\}$

$(c)\ f(x) = x^4$

$\bar{f}(x) = 4x^3 \qquad (\bar{f}(x) = 0$ نجعل $)$

$4x^3 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{x = 0} \quad \Rightarrow \boxed{y = 0}$

∴ النقط الحرجة هي$(0,0)$



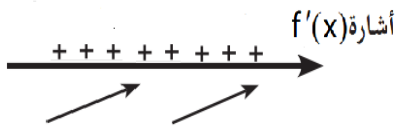
النقطة(0,0) نهاية صغرى محلية
قيمة النهاية الصغرى المحلية تساوي (0)
مناطق التزايد $\{x: \quad x > 0\}$
مناطق التناقص $\{x: \quad x < 0\}$

$(d)\ f(x) = 2x + 3$

$\bar{f}(x) = 2 \qquad \left(\bar{f}(x) = 0 \text{ لايمكن جعل}\right) \qquad \Longrightarrow \mathbf{0} \neq 2$

∴ لا توجد نقط حرجة

مناطق التزايد $\{x:\ \forall\ \ x \in\ R\}$

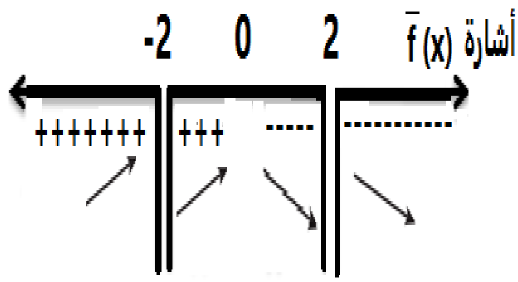


$(e)\ f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-4}$

$\bar{f}(x) = \dfrac{(x^2-4)(2x)-(x^2+1)(2x)}{(x^2-4)^2} = \dfrac{2x^3-8x-2x^3-2x}{(x^2-4)^2} = \dfrac{-10x}{(x^2-4)^2} \qquad \left(\bar{f}(x) = 0 \text{ نجعل}\right)$

$\dfrac{-10x}{(x^2-4)^2} = 0 \quad \Longrightarrow \ -10x = 0 \quad \Longrightarrow \boxed{x = 0}\ \boxed{y = \dfrac{-1}{4}}$

∴ النقط الحرجة هي $\left(0\,,\dfrac{-1}{4}\right)$



النقطة $\left(0,\frac{-1}{4}\right)$ نهاية عظمى محلية

قيمة النهاية العظمى المحلية = $\frac{-1}{4}$

مناطق التزايد $\begin{cases} x:\ \ x < -2 \\ \text{الفترة}(-2,0) \end{cases}$ و **مناطق التناقص** $\begin{cases} x:\ \ x > 2 \\ \text{الفترة}(0,2) \end{cases}$

مثال / جد قيم الثوابت $A, B \in R$ أذا كان لمنحني الدالـــــــة $f(x) = Ax^2 + Bx + 4$ نقطة نهاية صغرى محلية هي $(3,-5)$

الحل/

النقطة (3,-5) تحقق دالة المنحني والمشتقة الأولى عندها تساوي صفر عندما $(x = 3)$

$f(x) = Ax^2 + Bx + 4 \ \Longrightarrow\ -5 = 9A + 3B + 4 \ \Longrightarrow\ -9 = 9A + 3B \ \overset{(\div 3)}{\Longrightarrow}\ 3A + B = -3$ معادلة①

$\bar{f}(x) = 2Ax + B \qquad \left(\bar{f}(x) = 0 \text{ نجعل}\right)$

$0 = 2A(3) + B \quad \Longrightarrow\ 6A + B = 0$ معادلة②

وبحل المعادلة ① والمعادلة ② حلاً أنياً نحصل على :

$\boxed{A = 1} \qquad \boxed{B = -6}$

مثال / جد قيم الثوابت $A, B \in R^{++}$ أذا كان لمنحني الدالــــة $f(x) = Ax^2 + (x - B)^2$ نقطة نهايــــة صغرى محلية هي $(1,6)$

الحل/ النقطة $(1,6)$ تحقق دالة المنحني والمشتقة عندها تساوي صفر

$f(x) = Ax^2 + (x - B)^2 \quad \Rightarrow \mathbf{6 = A + (1 - B)^2}$ معادلة①

$\bar{f}(x) = 2Ax + 2(x - B) \qquad$ (نجعل $\bar{f}(x) = 0$)

$\mathbf{0} = 2A + 2(1 - B)$

$2A + 2 - 2B = 0 \quad \overset{(\div 2)}{\Longrightarrow} \quad A + 1 - B = 0 \quad \Rightarrow \mathbf{A = B - 1}$ معادلة②

نعوض المعادلة ② في المعادلة ① فنحصل على :

$6 = B - 1 + (1 - B)^2 \quad \Rightarrow \quad 6 = B - 1 + 1 - 2B + B^2 \quad \Rightarrow B^2 - \mathbf{B - 6 = 0} \quad \Rightarrow (\mathbf{B - 3})(\mathbf{B + 2}) = \mathbf{0}$

$\boxed{\textbf{\textit{if}} \quad B = 3 \Rightarrow A = 2 \ \in R^{++}}$, $\boxed{if \ \ B = -2 \quad \Rightarrow A = -3 \quad \text{(يهمل)}}$

مثال / لتكن $f(x) = x^3 + 2Ax^2 + Bx$ جد قيم الثوابت $A, B \in R$ اذا علمت أن للدالة نقطة نهاية عظمى محليــة عندما $(x = -1)$ ونهاية صغرى محلية عندما $(x = 3)$

الحل/ في هذا السؤال حدد نقاط النهايات العظمى والصغرى فقط لذلك نعتمد في الحل على المشتقة الأولى فقط

$f(x) = x^3 + 2Ax^2 + Bx$

$\bar{\boldsymbol{f}}(x) = 3x^2 + 4Ax + B \qquad$ (نجعل $\bar{f}(x) = 0$ ثم نعوض قيم x)

$\textbf{\textit{if}} \quad x = -1 \quad \Rightarrow \quad 0 = 3(-1)^2 + 4A(-1) + B \quad \Rightarrow 3 - 4A + B = 0 \quad \Rightarrow \mathbf{4A - B = 3}$ (معادلة①)

$\textbf{\textit{if}} \quad x = 3 \quad \Rightarrow \quad 0 = 3(3)^2 + 4A(3) + B \quad \Rightarrow 27 + 12A + B = 0 \quad \Rightarrow 12A + B = -27$ (معادلة②)

وبحل المعادلة ① والمعادلة ② حلاً أنياً نحصل على :

$\mathbf{16A = -24} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = \frac{-3}{2}}$ نعوض في معادلة ①

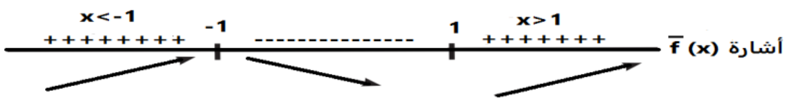
$4\left(\frac{-3}{2}\right) - B = 3 \quad \Rightarrow B = -6 - 3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = -9}$

مثال / أذا كانت (5) تمثل نهاية عظمى محلية للدالة $\boldsymbol{f(x) = x^3 - 3x + 3A}$ فجد قيمة $\boldsymbol{A \in R}$

الحل/ في هذا السؤال لم تعطى النقطة كاملة وأنما قيمة $(y = 5)$ فقط لذا يجب أيجاد قيم x حتى يكون للدالة نقطة نهـــاية عظمى محلية او صغرى محلية عندما مشتقة الدالة تساوي صفر $(\bar{f}(x) = 0)$

$\bar{\boldsymbol{f}}(x) = 3x^2 - 3 \qquad$ (نجعل $\bar{f}(x) = 0$)

$3x^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x - 1)(x + 1) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \boxed{x = 1} \ \boxed{x = -1}$



النقطة (-1,5) نهاية عظمى محلية وتحقق الدالة

$f(x) = x^3 - 3x + 3A \quad \Rightarrow 5 = -1 + 3 + 3A \quad \Rightarrow \quad \mathbf{3 = 3A} \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 1}$

مثال/ أذا علمت أن لمنحني الدالة $f(x) = Ax + \frac{B}{X-1}$ نقطة نهاية صغرى محلية هي (3,10) فجد قيمة $A, B \in R$

الحل/ النقطة (3,10) تحقق دالة المنحني والمشتقة عندها تساوي صفر

$$f(x) = Ax + \frac{B}{X-1} \quad \Rightarrow 10 = 3A + \frac{B}{3-1} \quad \Rightarrow 10 = 3A + \frac{B}{2} \quad \overset{(\times 2)}{\Longrightarrow} \quad 20 = 6A + B \quad (\text{معادلة } ①)$$

$$f(x) = Ax + B(x-1)^{-1} \quad \Rightarrow \bar{f}(x) = A - B(x-1)^{-2} \quad \Rightarrow \bar{f}(x) = A - \frac{B}{(x-1)^2} \quad (\text{نجعل } \bar{f}(x) = 0)$$

$$A - \frac{B}{(x-1)^2} = 0 \quad \Rightarrow A - \frac{B}{(3-1)^2} = 0 \quad \Rightarrow A - \frac{B}{4} = 0 \quad \overset{(\times 4)}{\Longrightarrow} \quad 4A - B = 0 \quad (\text{معادلة } ②)$$

وبحل المعادلة ① والمعادلة ② حلاً أنياً نحصل على :

$$10A = 20 \quad \Rightarrow \quad A = 2 \quad \text{نعوض في معادلة } ②$$

$$4(2) - B = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 8$$

مثال/ أذا كانت $f(x) = ax^3 + bx^2 - 9x$ وكانت $\bar{f}(3) = 0$ و $f(-1) = 5$ فجد قيم $a, b \in R$

الحل/

$$f(x) = ax^3 + bx^2 - 9x \quad \Rightarrow f(-1) = a(-1)^3 + b(-1)^2 - 9(-1)$$

$$5 = -a + b + 9 \quad \Rightarrow \quad a - b = 4 \quad (\text{معادلة } ①)$$

$$\bar{f}(x) = 3ax^2 + 2bx - 9 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(3) = 3a(3)^2 + 2b(3) - 9$$

$$0 = 27a + 6b - 9 \quad \Rightarrow \quad 0 = 9a + 2b - 3 \quad \Rightarrow \quad 9a + 2b = 3 \quad (\text{معادلة } ②)$$

$$\begin{aligned} 2a - 2b &= 8 \\ 9a + 2b &= 3 \\ \hline 11a \;&= 11 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 1} \quad \boxed{b = -3}$$

مثال/ جد أن وجدت مناطق التحدب ومناطق التقعر ونقط الانقلاب للدوال التالية :

$(a)\ f(x) = x^3 - 3x^2$

$$\bar{f}(x) = 3x^2 - 6x \quad \Rightarrow \quad \bar{\bar{f}}(x) = 6x - 6 \quad (\text{نجعل } \bar{\bar{f}}(x) = 0)$$

$$6x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 1} \quad \boxed{y = -2}$$

∴ النقطة $(1, -2)$ نقطة انقلاب مرشحة



النقطة $(1, -2)$ نقطة انقلاب

مناطق التحدب $\{x: \quad x < 1\}$

مناطق التقعر $\{x: \quad x > 1\}$

$(b)\ f(x) = (x-1)^4$

$\bar{f}(x) = 4(x-1)^3 \quad \Rightarrow \quad \bar{\bar{f}}(x) = 12(x-1)^2 \quad$ (نجعل $\bar{\bar{f}}(x) = 0$)

$12(x-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2 = 0 \quad \Rightarrow x-1=0 \quad \Rightarrow \boxed{x=1} \quad \boxed{y=0}$

∴ النقطة$(1,0)$ حرجة مرشحة

مناطق التقعر $\{x : x \in R /\{1\}\}$



$(C)\ f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 2$

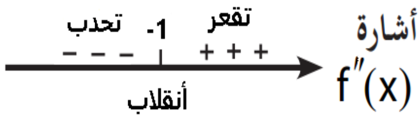
$\bar{f}(x) = 3x^2 + 6x - 24 \quad \Rightarrow \quad \bar{\bar{f}}(x) = 6x + 6 \quad$ (نجعل $\bar{\bar{f}}(x) = 0$)

$6x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=-1}$

$y = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 24(-1) + 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 28}$

∴ النقطة$(-1,28)$نقطة انقلاب مرشحة

مناطق التحدب $\{x: \quad x < -1\}$
مناطق التقعر $\{x: \quad x > -1\}$



مثال / لتكن $f(x) = Ax^2 + B$ حيث $A, B \in R$ وكان $A \in \{-2, 5\}$
فجد قيمة A اذا كانت الدالة (1)مقعرة (2) محدبة

الحل/

تكون الدالة محدبة أو مقعرة اعتمادا على أشاره $\bar{\bar{f}}(x)$ لذلك سوف نجد $\bar{\bar{f}}(x)$

$f(x) = Ax^2 + B \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = 2Ax \quad \Rightarrow \bar{\bar{f}}(x) = 2A$

(1) أذا الدالة مقعرة

$\Rightarrow \quad \bar{\bar{f}}(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad 2A > 0 \quad \Rightarrow \boxed{A = 5}$

(2) أذا الدالة محدبة

$\Rightarrow \quad \bar{\bar{f}}(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad 2A < 0 \quad \Rightarrow \boxed{A = -2}$

مثال/ منحني الدالـــــــــة $f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + 5$ يمس محــور الســينات عند النقطة (2,0) وله نقطـــــة أنقلاب هي (0,5) فجد قيم الثوابت $A, B, C \in R$

الحل/ النقطة $(0,5)$ تحقق دالة المنحني والمشتقة الثانية عندها تساوي صفر وقيمة (x) عندها تساوي صفر

$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + 5 \quad \Rightarrow f(0) = A(0) + (0) + (0) + 5 \quad \Rightarrow 5 = 5$ (لا ينفع)

$\bar{f}(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C \quad \Rightarrow \bar{\bar{f}}(x) = 6Ax + 2B \quad \Rightarrow 0 = 6A(0) + 2B \quad \Rightarrow 2B = 0 \quad \Rightarrow \boxed{B = 0}$

النقطة $(2,0)$ تحقق دالة المنحني

$f(x) = Ax^3 + Bx^2 + Cx + 5 \quad \Rightarrow \quad 0 = 8A + 4B + 2C + 5 \quad \Rightarrow 8A + 2C = -5$ معادلة ①

المشتقة الأولى $\bar{f}(x)$ عند النقطة $(2,0)$ تساوي (صفر) عندما $(x = 2)$ لأنها تمس محور السينات

$\bar{f}(x) = 3Ax^2 + 2Bx + C \quad \Rightarrow \quad 0 = 12A + 4B + C \Rightarrow 12A + C = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -12A$ (نعوضها في معادلة ①)

$8A + 2C = -5 \quad \Rightarrow 8A + 2(-12A) = -5 \quad \Rightarrow 8A - 24A = -5 \quad \Rightarrow -16A = -5$

$\Rightarrow \boxed{A = \frac{5}{16}} \quad , \quad C = -12A = -12\left(\frac{5}{16}\right) \quad \Rightarrow \boxed{C = \frac{-15}{4}}$

مثال/ لتكن $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx$ جد قيم كل من $A, B \in R$ اذا علمت أن للدالـــــة نهاية صـــغرى محلية عندما $(x = 4)$ ونقطة انقلاب عندما $(x = 1)$

الحل/

$f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = 3x^2 + 2Ax + B \quad \Rightarrow \quad \bar{\bar{f}}(x) = 6x + 2A$

$if \;\; x = 1 \quad \Rightarrow \bar{\bar{f}}(1) = 6x + 2A \quad \Rightarrow 0 = 6(1) + 2A \quad \Rightarrow 2A = -6 \quad \Rightarrow \boxed{A = -3}$

$if \;\; x = 4 \quad \Rightarrow \bar{f}(4) = 3x^2 + 2Ax + B \quad \Rightarrow 48 + 2(-3)(4) + B = 0 \quad \Rightarrow 48 - 24 + B = 0$

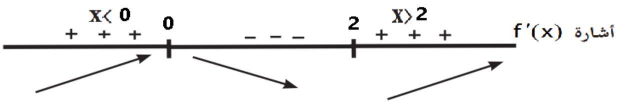
$\Rightarrow 24 + B = 0 \quad \Rightarrow \boxed{B = -24}$

مثال / أذا كانت (6) تمثل نهاية عظمى محلية للدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + A$ فجد قيمة $A \in R$ ثم جد معادلة المماس للمنحني عند نقطة انقلابه .

الحل/

$f(x) = x^3 - 3x^2 + A \quad \Rightarrow \overline{f}(x) = 3x^2 - 6x \quad$ ($\overline{f}(x) = 0$ نجعل)

$0 = 3x^2 - 6x \quad \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{x = 0} \; , \; \boxed{x = 2}$

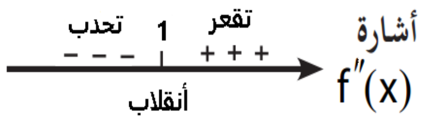


النقطة (0,6) نقطة نهاية عظمى محلية وتحقق الدالة

$f(x) = x^3 - 3x^2 + A \quad \Rightarrow \quad 6 = 0 - 0 + A \quad \Rightarrow \boxed{A = 6}$

$\overline{f}(x) = 3x^2 - 6x \quad \Rightarrow \overline{\overline{f}}(x) = 6x - 6 \quad$ ($\overline{\overline{f}}(x) = 0$ نجعل)

$0 = 6x - 6 \quad \Rightarrow x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{x = 1} \quad \Rightarrow y = f(x) = 1 - 3 + 6 \quad \Rightarrow \boxed{y = 4}$



النقطة (1,4) نقطة انقلاب وتحقق معادلة ميل المماس

الأن نجد ميل المماس عند نقطة الأنقلاب حيث (ميل المماس = المشتقة الأولى) ونستخدم قانون معادلة المماس

$m = \overline{f}(x) = 3x^2 - 6x \quad \Rightarrow m = 3(1)^2 - 6(1) \quad \Rightarrow m = 3 - 6 \quad \Rightarrow \boxed{m = -3}$

$y - y_1 = m(x - x_1) \quad \Rightarrow \quad y - 4 = -3(x - 1) \quad \Rightarrow y - 4 = -3x + 3$

$\therefore \quad 3x + y - 7 = 0$ (معادلة المماس للمنحني عند نقطة انقلابه)

****

واجبات

جد أن وجدت مناطق التزايد والتناقص والنقط الحرجة وقيم نقاط النهايات للدوال الأتية :

$(a) \; f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2$

$(b) \; f(x) = \frac{2x - 1}{3 - x}$

$(c) \; f(x) = x^3(4 - x)$

$(d) \; f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$

رسم المخطط البياني للدالة

لرسم المخطط البياني لأي دالة معطاة نتبع الخطوات التالية والتي تمثل النقط الأساسية للرسم :

❶ اوسع مجال للدالة ❷ نقط التقاطع مع المحورين ❸ التناظر ❹ المحاذيات ❺ دراسة $\overline{f}(x)$ وما ينتج عنها
❻ دراسة $\overline{\overline{f}}(x)$ وما ينتج عنها ❼ تحديد النقط الخاصة بالرسم ومن ثم رسمها

❶ اوسع مجال للدالة : أذا كانت y هي دالة الى (x) فأن أوسع مجال للدالة هو كل قيم (x) الحقيقية التي لها صور(y) بواسطة الدالة (f) ولهذا يمكن تقسيم الدوال الى ثلاث أشكال حسب المتغيرات الموجودة فيها

ⓐ الدوال كثيرات الحدود: وهي الدوال التي متغيرها (x) غير موجود في مقام الدالة وكذلك غير موجود في داخل الجذر ويكون اوسع مجال لها $= \mathbf{R}$

ⓑ الدوال الكسرية: وهي الدوال التي متغيرها (x) موجود في مقام الدالة ويكون اوسع مجال لها $= \dfrac{\mathbf{R}}{\{\text{القيم } x \text{ التي تجعل المقام}=0\}}$

ⓒ الدوال الجذرية: وهي الدوال التي متغيرها (x) موجود في داخل الجذر وهي نوعان :

النوع الأول: دوال جذرية دليل جذرها فردي ويكون اوسع مجال لها هو قيم (x) التي تجعل الجذر معرفا

النوع الثاني: دوال جذرية دليل جذرها زوجي ويكون اوسع مجال لها هو قيم (x)التي تجعل الجذر معرفا

مثال توضيحي ① / جد أوسع مجال لكل من الدوال التالية :

ⓐ $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ ➡ $\forall x \in \mathbf{R}$ (أوسع مجال للدالة R لأنها كثيرات الحدود)

ⓑ $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ ➡ $\forall x \in \mathbf{R}$ (أوسع مجال للدالة R لأنها كثيرات الحدود)

ⓒ $f(x) = (2x-1)^3 - 6x$ ➡ $\forall x \in \mathbf{R}$ (أوسع مجال للدالة R لأنها كثيرات الحدود)

ⓓ $f(x) = (1+x)(x-1)^3$ ➡ $\forall x \in \mathbf{R}$ (أوسع مجال للدالة R لأنها كثيرات الحدود)

ⓔ $f(x) = \frac{3}{2}$ ➡ $\forall x \in \mathbf{R}$ (أوسع مجال للدالة R لأنها كثيرات الحدود)

ⓕ $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x$ ➡ $\forall x \in \mathbf{R}$ (أوسع مجال للدالة R لأنها كثيرات الحدود)

ⓖ $f(x) = 3\sqrt{2}\ x^2 - \frac{1}{\sqrt{5}}\ x$ ➡ $\forall x \in \mathbf{R}$ (أوسع مجال للدالة R لأنها كثيرات الحدود)

ⓗ $f(x) = 3\sqrt{2}\ x^2$ ➡ $\forall x \in \mathbf{R}$ (أوسع مجال للدالة R لأنها كثيرات الحدود)

ⓘ $f(x) = \dfrac{2x^2+1}{5}$ ➡ $\forall x \in \mathbf{R}$ (أوسع مجال للدالة R لأنها كثيرات الحدود)

مثال توضيحي ②/ جد أوسع مجال لكل من الدوال التالية :

① $f(x) = \frac{2x+3}{x-2}$ ➡ $Domain \ \forall x \in R/\{2\}$

② $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$ ➡ $Domain \ \forall x \in R/\{\pm 2\}$

③ $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ ➡ $Domain \ \forall x \in R/\{\pm 1\}$

لا تستخدم طرق تبسيط المقام لانها تؤدي الى الحل الخاطئ

$f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{(x+1)}$ ➡ $Domain \ \forall x \in R/\{-1\}$ (حل خاطئ)

④ $f(x) = \frac{2x+3}{\left(\frac{x+3}{2-x}\right)}$

$f(x) = (2x+3).\left(\frac{2-x}{x+3}\right)$ ➡ $Domain \ \forall x \in R/\{-3\}$

$f(x) = \frac{3+2x}{x}$ ➡ $Domain \ \forall x \in R/\{0\}$

أما الدوال الجذرية فالمنهج خالي من الدوال الجذرية ولم يعطي أي مثال عليها لذلك سأضع أمثلة للاطلاع

مثال توضيحي ③/ جد أوسع مجال لكل من الدوال التالية:

① $f(x) = \sqrt[2]{2x-8}$ ➡ $Domain \ \{x: x \in R \quad x > 4\}$

② $f(x) = \sqrt[2]{\frac{1}{2x-8}}$ ➡ $Domain \ \forall x \in R/\{4\}$

❷ نقط التقاطع مع المحورين: وهو على نوعين :

(a) التقاطع مع المحور الصادي $(y-axis)$: لأيجاد نقط التقاطع مع المحور(y) نجعل $(x=0)$لايجاد قيم (y)

(b) التقاطع مع المحور السيني $(x-axis)$: لأيجاد نقط التقاطع مع المحور(x) نجعل $(y=0)$ لايجاد قيم (x)

مثال توضيحي ④/ جد نقط التقاطع لكل من الدوال التالية :

$(a) \ f(x) = x^3 - 4x$

$if \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$

$if \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad x^3 - 4x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x^2-4) = 0 \quad \Rightarrow x(x-2)(x+2) = 0$

$\therefore$ نقط التقاطع $(2,0), (-2,0), (0,0)$

$(b)\ f(x) = (x-2)^3$

$if \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -8$

$if \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-2)^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 2 = 0 \quad \Rightarrow x = 2$

$\therefore$ نقط التقاطع $(2,0), (0,-8)$

$(c)\ f(x) = \dfrac{x-3}{4-x}$

$if \quad x = 0 \quad \Rightarrow y = \dfrac{-3}{4}$

$if \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{x-3}{4-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

$\therefore$ نقط التقاطع $(3,0), \left(0, \dfrac{-3}{4}\right)$

❸ التناظر : وهو على نوعين :

(a) يكون المنحني متناظر مع المحور الصادي(y-axis) اذا كانت أسس المتغير (x) كلها زوجية أي أن $f(-x) = f(x)$ أي أن

$\forall\, x \in A\ \exists(-x) \in A$ ➡ $f(-x) = f(x)$

(b) يكون المنحني متناظر حول نقطة الأصل اذا كانت أسس المتغير (x) كلها فردية أي أن $f(-x) = -f(x)$ أي أن

$\forall\, x \in A\ \exists(-x) \in A$ ➡ $f(-x) = -f(x)$

مثال توضيحي ⑤/ جد التناظر لكل من الدوال التالية ثم برهن ذلك في حالة وجود التناظر :

ⓐ	$f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$	➡ (متناظرة مع الصادي لان أسس x كلها زوجية)
ⓑ	$f(x) = x^4$	➡ (متناظرة مع الصادي لان أسس x كلها زوجية)
ⓒ	$f(x) = x^2 - 3$	➡ (متناظرة مع الصادي لان أسس x كلها زوجية)
ⓓ	$f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$	➡ (متناظرة مع الصادي لان أسس x كلها زوجية)
Ⓔ	$f(x) = x^4 - x^2 - \dfrac{1}{x^2}$	➡ (متناظرة مع الصادي لان أسس x كلها زوجية)
Ⓕ	$f(x) = x^3 - 2x$	➡ (متناظرة مع نقطة الاصل لان أسس x كلها فرديـــــة)
Ⓖ	$f(x) = x^5 + x^3$	➡ (متناظرة مع نقطة الاصل لان أسس x كلها فرديـــــة)
Ⓗ	$f(x) = 3x$	➡ (متناظرة مع نقطة الاصل لان أسس x كلها فرديـــــة)
ⓘ	$f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$ $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3x$ $f(x) = (x-2)^2$	➡ (لا يوجد تناظر لاختلاف اسس المتغير x)

البرهان متشابه في جميع الأمثلة السابقة لذا سنبرهن مثال لكل نوع من التناظر

Ⓔ $f(x) = x^4 - x^2 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow f(-x) = (-x)^4 - (-x)^2 - \frac{1}{(-x)^2} = x^4 - x^2 - \frac{1}{x^2} \Rightarrow \boxed{f(-x) = f(x)}$

Ⓕ $f(x) = x^3 - 2x \Rightarrow f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -[x^3 - 2x] \Rightarrow \boxed{f(-x) = -f(x)}$

❹ المحاذيات : دراستنا للمحاذيات تقتصر على الدوال الكسرية فقط

- **المحاذي الأفقي الموازي لمحور السينات**

الطريقة الأولى :

نجعل $x = \frac{n(y)}{m(y)}$ ثم نجعل $m(y) = 0$ ونجد قيم (x) ولتكن $(y = a)$ فهي تمثل معادلة المستقيم الأفقي .

الطريقة الثانية :

تكون معادلته $\boxed{y = \text{عدد}}$ هذا العدد هو حاصل قسمة معامل الحد الاكبر درجة من البسط على معامل الحد الاكبر درجة من المقام بشرط تساوي الدرجتين

- **المحاذي الشاقولي الموازي لمحور الصادات**

الطريقة الأولى :

نجعل $y = \frac{g(x)}{h(x)}$ ثم نجعل $h(x) = 0$ ونجد قيم (x) ولتكن $(x = a)$ فهي تمثل معادلة المستقيم الشاقولي .

الطريقة الثانية :

تكون معادلته $\boxed{x = \text{عدد}}$ هذا العدد هو العدد الذي يستثنى من المجموعة R في المقام عند حساب أوسع مجال .

مثال توضيحي ⑥/ جد أوسع مجال ومعادلات المستقيمات المحاذية لكل من الدوال التالية :

$(a)\ f(x) = \frac{3x-4}{x+2}$

$x + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -2}$ المستقيم المحاذي الشاقولي

$f(x) = y = \frac{3x-4}{x+2} \Rightarrow yx + 2y = 3x - 4 \Rightarrow yx - 3x = -4 - 2y \Rightarrow x(y-3) = -4 - 2y$

$\Rightarrow x = \frac{-4-2y}{y-3} \Rightarrow y - 3 = 0 \Rightarrow \boxed{y = 3}$ المستقيم المحاذي الأفقي

او لاحظ الطريقة الثانية

$Domain\ \ \forall x \in R/\{-2\}$

$\Rightarrow \boxed{x = -2}$ المستقيم المحاذي الشاقولي

$\Rightarrow y = \frac{3x-4}{x+2} \Rightarrow y = \frac{3x}{x} \Rightarrow \boxed{y = 3}$ المستقيم المحاذي الأفقي

$(b)\ f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-4}$

$Domain\ \ \forall x \in R/\{\pm 2\}$

المحاذيات الشاقولية $\Rightarrow$ $\boxed{x=-2}$, $\boxed{x=2}$

المحاذيات الافقية $\Rightarrow y = \dfrac{x+3}{x^2-4} \Rightarrow y = \dfrac{0x^2+x+3}{x^2-4}$ (نساوي الدرجتين) $\Rightarrow y = \dfrac{0}{1}$, $\boxed{y=0}$

$(c)\ f(x) = \dfrac{x^2+3x+3}{x-5}$

$Domain\ \ \forall x \in R/\{5\}$

المحاذيات الشاقولية $\Rightarrow$ $\boxed{x=5}$

المحاذيات الافقية $\Rightarrow y = \dfrac{x^2+3x+3}{x-5} \Rightarrow y = \dfrac{x^2+3x+3}{0x^2+x-5}$ (نساوي الدرجتين)

$\Rightarrow y = \dfrac{1}{0}$, $y =$ غير معرف

$(d)\ f(x) = \dfrac{5}{x}$

$Domain\ \ \forall x \in R/\{0\}$

المحاذيات الشاقولية $\Rightarrow$ $\boxed{x=0}$

المحاذيات الافقية $\Rightarrow y = \dfrac{5}{x} \Rightarrow y = \dfrac{0x+5}{x}$ (نساوي الدرجتين) $\Rightarrow y = \dfrac{0}{1}$, $\boxed{y=0}$

==================

مثال (1)/ أرسم بالأستعانة بمعلوماتك في التفاضل منحنى الدالة : $f(x) = x^5$

وزاري 2013 / د3

الحل/

- أوسع مجال للدالة $R =$
- التناظر / المنحنى متناظر حول نقطة الأصل لأن :

$\forall x \in R\ \exists(-x) \in R \Rightarrow f(-x) = -f(x)$
$f(-x) = (-x)^5 = -x^5 = -f(x)$

- المحاذيات / لا توجد لأن الدالة ليست نسبية (كسرية)
- نقط التقاطع مع المحورين

$if\ \ x=0 \Rightarrow y=0$
$if\ \ y=0 \Rightarrow x=0$

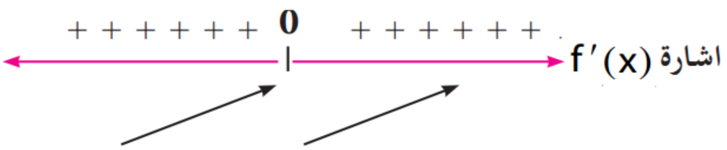
$\therefore$ النقطة $(0,0)$ نقطة تقاطع مع المحورين الأحداثيين

- دراسة $\bar{f}(x)$ وما ينتج عنها

$\bar{f}(x) = 5x^4$ (نجعل $\bar{f}(x) = 0$)

$\Rightarrow 5x^4 = 0 \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow f(x) = x^5 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow y = 0$



f متزايدة في كل من $\{x : x > 0\}$ ، $\{x : x < 0\}$

$(0,0)$ نقطة حرجة لا تمثل نقطة نهاية.

- دراسة $\bar{\bar{f}}(x)$ وما ينتج عنها

$\bar{\bar{f}}(x) = 20\,x^3$ (نجعل $\bar{\bar{f}}(x) = 0$)

$\Rightarrow 20\,x^3 = 0 \Rightarrow x = 0$

$\Rightarrow f(x) = x^5 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow y = 0$



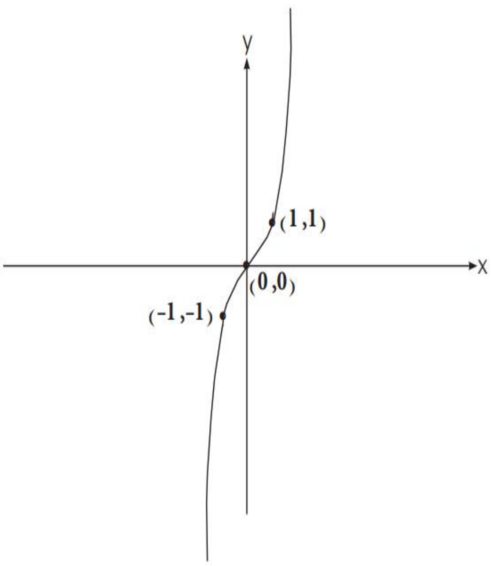
f مقعرة في $\{x : x > 0\}$

f محدبة في $\{x : x < 0\}$

$\therefore$ $(0,0)$ نقطة الانقلاب

- تحديد النقط الخاصة بالرسم ومن ثم رسمها

x	0	1	-1	2	-2
y	0	1	-1	32	-32



مثال (2)/ أرسم بالأستعانة بمعلوماتك بالتفاضل الدالة : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

الحل/

- أوسع مجال للدالة $R =$
- التناظر /

$\forall\, x \in R\ \exists(-x) \in R \Rightarrow f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 4 = -x^3 - 3x^2 + 4$

∴ لا يوجد تناظر مع محور الصادات او مع نقطة الأصل لأن :

$f(-x) \neq -f(x) \quad , \quad f(-x) \neq f(x)$

- المحاذيات / لا توجد لأن الدالة ليست نسبية (كسرية)

- نقط التقاطع مع المحورين

$if \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 4$

$if \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = ?$ (لا يمكن حل المعادلة)

∴ النقطة $(0, 4)$ نقطة التقاطع مع المحور الصادي

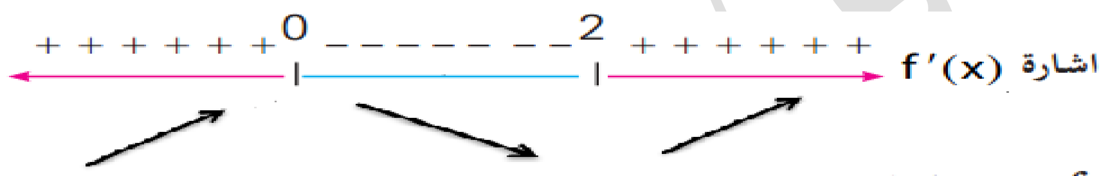
- دراسة $\bar{f}(x)$ وما ينتج عنها

$\bar{f}(x) = 3x^2 - 6x$ (نجعل $\bar{f}(x) = 0$)

$3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \ , \ x = 2$

$f(0) = 4 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow (0, 4)$

$f(2) = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (2, 0)$



f متزايدة في كل من $\{x : x > 2\}$, $\{x : x < 0\}$

f متناقصة في الفترة $(0 , 2)$

∴ $(0, 4)$ نقطة نهاية عظمى محلية ، $(2 , 0)$ نقطة نهاية صغرى محلية .

- دراسة $\bar{\bar{f}}(x)$ وما ينتج عنها

$\bar{\bar{f}}(x) = 6x - 6$ (نجعل $\bar{\bar{f}}(x) = 0$)

$6x - 6 = 0 \Rightarrow 6x = 6 \Rightarrow x = 1$

$f(1) = 2 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (1, 2)$



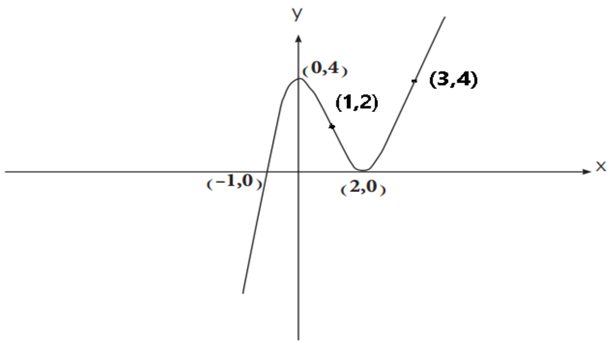
f مقعرة في $\{x : x > 1\}$

f محدبة في $\{x : x < 1\}$

∴ $(1, 2)$ نقطة الانقلاب

- تحديد النقط الخاصة بالرسم ومن ثم رسمها

x	0	1	2	3	-1
y	4	2	0	4	0



مثال (3)/ أرسم بالأستعانة بمعلوماتك بالتفاضل الدالة : $f(x)=\frac{3x-1}{x+1}$

الحل/

- أوسع مجال للدالة $\forall x \in R/\{-1\}$
- التناظر /

$\because$ العدد (1) ينتمي الى مجال الدالة ولكن العدد (-1) لا ينتمي الى مجال الدالـــــة لذلك فالمنحني غير متناظر مع محور الصادات وغير متناظر مع نقطة الأصل

$\therefore$ لا يوجد تناظر

- المحاذيات /

$x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$ المستقيم المحاذي الشاقولي

$f(x)=y=\frac{3x-1}{x+1} \Rightarrow yx+y=3x-1 \Rightarrow yx-3x=-1-y \Rightarrow x(y-3)=-1-y$

$\Rightarrow x=\frac{-1-y}{y-3} \Rightarrow y-3=0 \Rightarrow \boxed{y=3}$ المستقيم المحاذي الأفقي

- نقط التقاطع مع المحورين

$if \quad x=0 \Rightarrow y=-1$

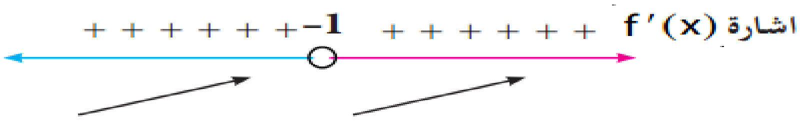
$if \quad y=0 \Rightarrow 0=\frac{3x-1}{x+1} \Rightarrow 3x-1=0 \Rightarrow 3x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{3}$

$\therefore$ النقط $(0,-1)$ $\left(\frac{1}{3}\ ,\ 0\right)$ نقط التقاطع مع المحورين

- دراسة $\bar{f}(x)$ وما ينتج عنها

$\bar{f}(x)=\frac{(x+1)(3)-(3x-1)(1)}{(x+1)^2}=\frac{3x+3-3x+1}{(x+1)^2}=\frac{4}{(x+1)^2}$

$\Rightarrow \frac{4}{(x+1)^2}=0 \qquad \Rightarrow 4=0$ (غير ممكن)

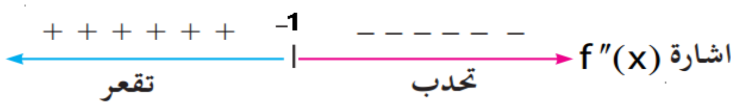


الدالة متزايدة في $\{x : x < -1\}$, $\{x : x > -1\}$ ولاتوجد نقاط حرجة .

- دراسة $\overline{\overline{f}}(x)$ وما ينتج عنها

$$\overline{\overline{f}}(x)=\frac{(x+1)^2(0)-4[2(x+1)]}{(x+1)^4}=\frac{-8(x+1)}{(x+1)^4}=\frac{-8}{(x+1)^3}$$

$$\Rightarrow\ 0=\frac{-8}{(x+1)^3}\qquad\Rightarrow\ -8=0$$ (غير ممكن)

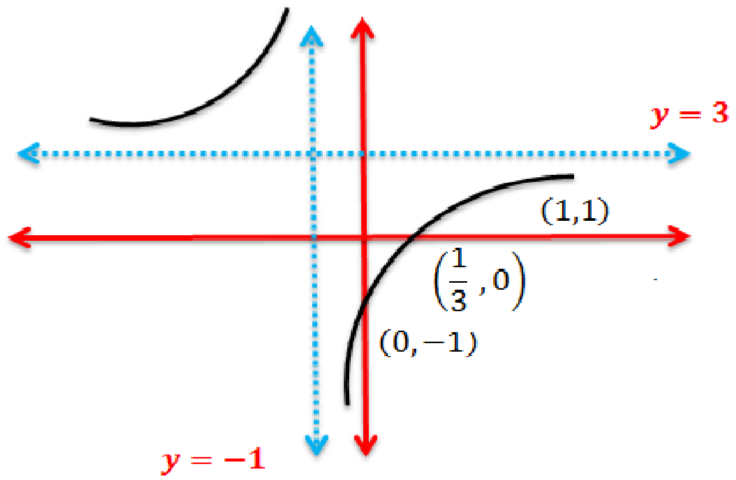


f مقعرة في $\{x : x < -1\}$

f محدبة في $\{x : x > -1\}$

الدالة لا تمتلك نقطة أنقلاب لأن (-1) لا ينتمي الى مجال الدالة

- تحديد النقط الخاصة بالرسم ومن ثم رسمها



x	0	$\frac{1}{3}$	2	-2	1
y	-1	0	$\frac{5}{3}$	7	1

مثال (4)/ بأستخدام معلوماتك بالتفاضل أرسم المنحني : $f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$

الحل/

- أوسع مجال للدالة $= R$
- التناظر /

$$\forall x\in R\ \exists(-x)\in R\ \Rightarrow\ f(-x)=\frac{(-x)^2}{(-x)^2+1}=\frac{x^2}{x^2+1}=f(x)$$

∴ المنحني متناظر حول محور الصادات لأن : $f(-x)=f(x)$

- المحاذيات /

$x^2+1\neq 0\quad\Rightarrow$ لا يوجد محاذي عمودي

$$f(x)=y=\frac{x^2}{x^2+1}\Rightarrow\ yx^2+y=x^2\ \Rightarrow\ yx^2-x^2=-y\ \Rightarrow\ x^2(y-1)=-y$$

$$\Rightarrow\ x^2=\frac{-y}{y-1}\ \Rightarrow\ y-1=0\ \Rightarrow\ \boxed{y=1}$$ المستقيم المحاذي الأفقي

- نقط التقاطع مع المحورين

$if \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$
$if \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$

$\therefore$ $(0\ ,\ 0)$ نقطة التقاطع مع المحورين

- دراسة $\bar{f}(x)$ وما ينتج عنها

$$\bar{f}(x) = \frac{(x^2+1)(2x)-(x^2)(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2x}{(x+1)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = 0 \quad \Rightarrow x = 0$$

اشارة $f'(x)$: $- - - - - - - -$ 0 $+ + + + + +$

تناقص | تزايد

$f(x)$ متزايدة في $\{x : x > 0\}$

$f(x)$ متناقصة في $\{x : x < 0\}$

$(0, 0)$ نقطة نهاية صغرى محلية

- دراسة $\bar{\bar{f}}(x)$ وما ينتج عنها

$$\bar{\bar{f}}(x) = \frac{(x^2+1)^2(2)-2x[4x(x^2+1)]}{(x^2+1)^4} = \frac{(x^2+1)[2x^2+2-8x^2]}{(x+1)^4} = \frac{2-6x^2}{(x+1)^3}$$

(نجعل $\bar{\bar{f}}(x) = 0$)

$$\Rightarrow \ 0 = \frac{2-6x^2}{(x+1)^3} \quad \Rightarrow \ 2-6x^2 = 0 \ \overset{(\div 2)}{\Longrightarrow} \ 3x^2 = 1 \quad \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \quad \Rightarrow f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{4}{3}\right)} = \frac{1}{4}$$

اشارة $f''(x)$: $- - - - - - - -$ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $+ + + + + +$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ $- - - - - - - -$

تحدب | تقعر | تحدب

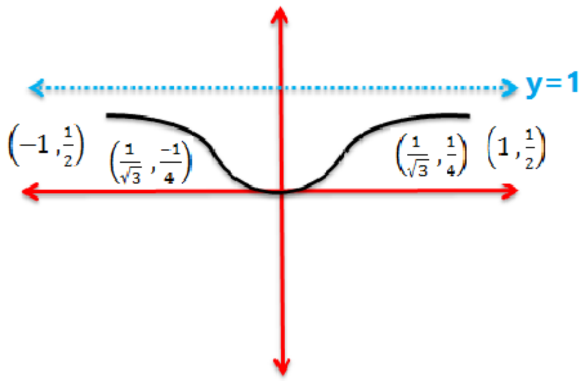
$f(x)$ محدبة في $\{x : x < -\frac{1}{\sqrt{3}}\}, \{x : x > \frac{1}{\sqrt{3}}\}$

$f(x)$ مقعرة في الفترة المفتوحة $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

نقطتا الانقلاب هما : $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{4}\right)$

- تحديد النقط الخاصة بالرسم ومن ثم رسمها

x	0	-1	2	-2	1
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$



تمارين(5 – 3)

أرسم بأستخدام معلوماتك في التفاضل الدوال التالية :

$(1) \quad f(x) = 10 - 3x - x^2$

الحل/

- أوسع مجال للدالة $= R$
- التناظر /

$\forall x \in R \; \exists (-x) \in R \Rightarrow f(-x) = 10 - 3(-x) - (-x)^2 = 10 + 3x - x^2$

∴ لا يوجد تناظر مع محور الصادات او مع نقطة الأصل لأن :

$f(-x) \neq -f(x) \quad , \quad f(-x) \neq f(x)$

- المحاذيات / لا توجد لأن الدالة ليست نسبية (كسرية)

- نقط التقاطع مع المحورين

$if \quad x = 0 \quad \Rightarrow y = 10$
$if \quad y = 0 \quad \Rightarrow 10 - 3x - x^2 = 0 \quad \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \quad \Rightarrow (x+5)(x-2) = 0$
$\Rightarrow \quad x = -5 \quad , \quad x = 2$

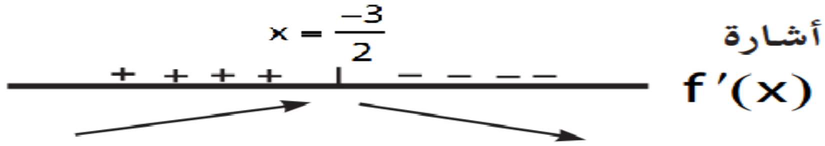
∴ نقط التقاطع $(-5,0),(2,0),(0,10)$

- دراسة $\bar{f}(x)$ وما ينتج عنها

$\bar{f}(x) = -3 - 2x$ $\quad$ (نجعل $\bar{f}(x) = 0$)

$\Rightarrow -3 - 2x = 0 \quad \Rightarrow -3 = 2x \quad \Rightarrow \boxed{x = \frac{-3}{2}}$

$\Rightarrow f\left(\frac{-3}{2}\right) = 10 - 3\left(\frac{-3}{2}\right) - \left(\frac{-3}{2}\right)^2 = 10 + \frac{9}{2} - \frac{9}{4} = \frac{40+18-9}{4} \quad \Rightarrow \boxed{y = \frac{49}{4}}$



النقطة $\left(\frac{-3}{2}, \frac{49}{4}\right)$ نقطة نهاية عظمى محلية

$f(x)$ متزايدة في $\left\{x:\ x < \frac{-3}{2}\right\}$

$f(x)$ متناقصة في $\left\{x:\ x > \frac{-3}{2}\right\}$

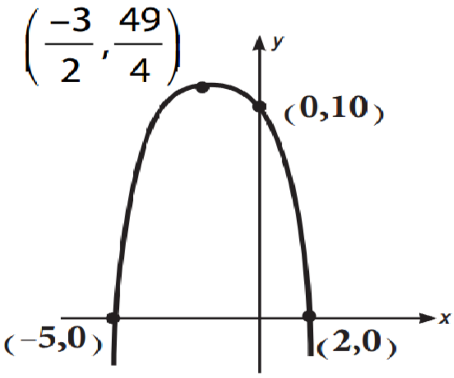
- دراسة $\overset{=}{f}(x)$ وما ينتج عنها

$\because \overset{=}{f}(x) = -2$ (سالب دائما مهما تكون قيمة x فلهذا منحني الدالة محدب دائما ولا توجد نقطة انقلاب)

$f(x)$ محدبة في $\{x: \forall\, x \in R\}$

- تحديد النقط الخاصة بالرسم ومن ثم رسمها

x	y
−5	0
$\frac{-3}{2}$	$\frac{49}{4}$
0	10
2	0



(2) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

الحل/

- أوسع مجال للدالة $= R$
- التناظر /

$\forall\, x \in R\ \exists(-x) \in R$ ➡ $f(-x) = (-x)^2 + 4(-x) + 3 = x^2 - 4x + 3$

∴ لا يوجد تناظر مع محور الصادات او مع نقطة الأصل لأن :

$f(-x) \neq -f(x) \quad , \quad f(-x) \neq f(x)$

- المحاذيات / لا توجد لأن الدالة ليست نسبية (كسرية)

- نقط التقاطع مع المحورين

$if \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 3$

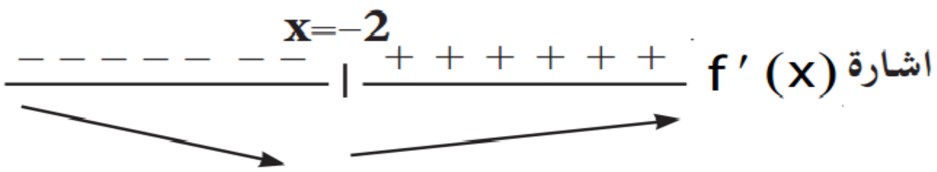
$if \quad y = 0 \quad \Rightarrow x^2 + 4x + 3 = 0 \quad \Rightarrow (x+3)(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{x = -3}\ \boxed{x = -1}$

∴ نقط التقاطع $(-3, 0), (-1, 0), (0, 3)$

- دراسة $\bar{f}(x)$ وما ينتج عنها

$\bar{f}(x) = 2x + 4$ (نجعل $\bar{f}(x) = 0$)

$\Rightarrow \; 2x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \; 2x = -4 \quad \Rightarrow \; \boxed{x = -2} \quad \boxed{y = -1}$



النقطة $(-2 , -1)$ نقطة نهاية صغرى محلية

$f(x)$ متزايدة في $\{x: \; x > -2\}$

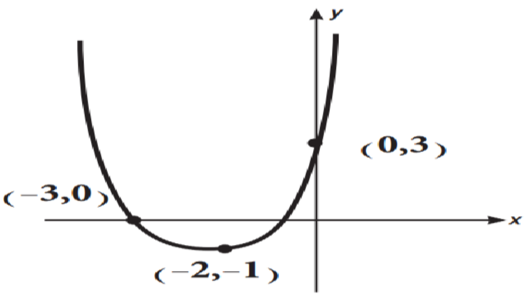
$f(x)$ متناقصة في $\{x: \; x < -2\}$

- دراسة $\bar{\bar{f}}(x)$ وما ينتج عنها

$\because \bar{\bar{f}}(x) = 2 > 0$ (موجب دائما مهما تكون قيمة x فلهذا منحني الدالة مقعر دائما و لا توجد نقطة انقلاب)

$\therefore$ $f(x)$ مقعرة في $\{x: \forall \, x \; \in R \}$

- تحديد النقط الخاصة بالرسم ومن ثم رسمها



x	y
−3	0
−2	−1
−1	0
0	3
1	8

(3) $f(x) = (1 - x)^3 + 1$ وزاري 2011 / د2   وزاري 2013 / د2

الحل/

- أوسع مجال للدالة $R =$
- التناظر /

$\forall \, x \in R \, \exists (-x) \in R$ ➡ $f(-x) = \left(1 - (-x)\right)^3 + 1 = (1 + x)^3 + 1$

$\therefore$ لا يوجد تناظر مع محور الصادات او مع نقطة الأصل لأن :

$f(-x) \neq - f(x) \quad , \quad f(-x) \neq \; f(x)$

- المحاذيات / لا توجد لأن الدالة ليست نسبية (كسرية)

- نقط التقاطع مع المحورين

$if \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = (1 - 0)^3 + 1 = 1 + 1 = 2 \quad \Rightarrow \quad y = 2$

$if \quad y = 0 \quad \Rightarrow (1 - x)^3 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (1 - x)^3 = -1$ بالجذر الثالث للطرفين

$\Rightarrow \quad 1 - x = -1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 2}$

$\therefore$ نقط التقاطع $(2, 0), (0, 2)$

- دراسة $\bar{f}(x)$ وما ينتج عنها

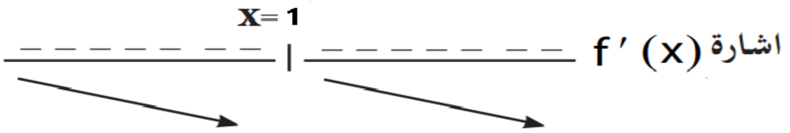
$\bar{f}(x) = 3(1-x)^2(-1) \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = -3(1-x)^2 \qquad$ (نجعل $\bar{f}(x) = 0$)

$\Rightarrow \quad -3(1-x)^2 = 0 \qquad (\div -3)$

$\Rightarrow \quad (1-x)^2 = 0 \qquad$ (نجذر الطرفين)

$\Rightarrow \quad 1 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

$\Rightarrow \quad \boldsymbol{f(x) = (1-x)^3 + 1 \quad \Rightarrow f(1) = (1-1)^3 + 1 \quad \Rightarrow y = 0 + 1 \quad \Rightarrow \boxed{y = 1}}$



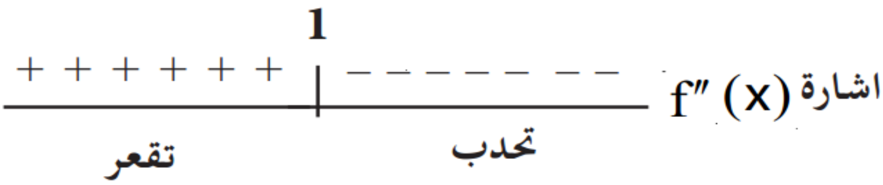
النقطة $(1\,,1)$ نقطة حرجة فقط

$f(x)$ متناقصة في $\{\boldsymbol{x:\ x > 1}\}\ \{\boldsymbol{x:\ x < 1}\}$

- دراسة $\bar{\bar{f}}(x)$ وما ينتج عنها

$\Rightarrow \quad \bar{\bar{f}}(x) = -6(1-x)^1(-1) \quad \Rightarrow \quad \bar{\bar{f}}(x) = 6(1-x) \qquad$ (نجعل $\bar{\bar{f}}(x) = 0$)

$\Rightarrow \quad 0 = 6(1-x) \quad \Rightarrow \quad 6x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 1} \quad , \quad \boxed{y = 1}$

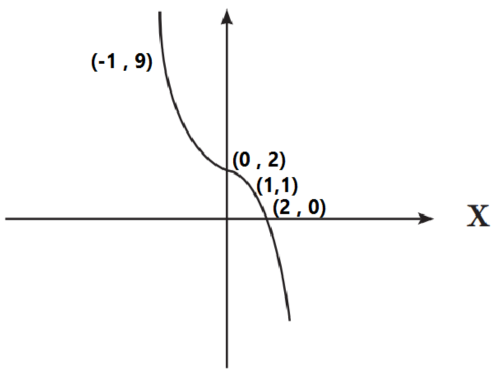


∴ النقطة (1,1) نقطة أنقلاب

$\boldsymbol{f(x)}$ مقعرة في $\{\ \boldsymbol{x: x < 1}\ \}$

$\boldsymbol{f(x)}$ محدبة في $\{\ \boldsymbol{x: x > 1}\ \}$

- تحديد النقط الخاصة بالرسم ومن ثم رسمها



x	y
2	0
0	2
1	1
-1	9

(4) $f(x) = 6x - x^3$ 		**وزاري 2015 / د1**

الحل/

- أوسع مجال للدالة $= R$
- التناظر /

$\forall\, x \in R\ \exists(-x) \in R$ ➡ $f(-x) = 6(-x) - (-x)^3 = -6x + x^3 = -(6x - x^3)$

∴ التناظر حول نقطة الأصل لأن :

$f(-x) = -f(x)$

- المحاذيات / لا توجد لأن الدالة ليست نسبية
- نقط التقاطع مع المحورين

$if \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$

$if \quad y = 0 \quad \Rightarrow 6x - x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x(6 - x^2) = 0$

أما $\boxed{x = 0}$

أو $6 - x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \mp\sqrt{6}}$

∴ نقط التقاطع $(0,0), (\sqrt{6}, 0), (-\sqrt{6}, 0)$

- دراسة $\bar{f}(x)$ وما ينتج عنها

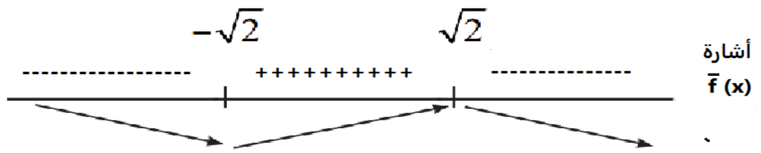
$\bar{f}(x) = 6 - 3x^2$ 		(نجعل $\bar{f}(x) = 0$)

$\Rightarrow \ 6 - 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow 6 = 3x^2 \quad \Rightarrow \ x^2 = 2 \quad \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \ f(x) = 6x - x^3$

$f(\sqrt{2}) = 6(\sqrt{2}) - (\sqrt{2})^3 \quad \Rightarrow y = 6\sqrt{2} - 2\sqrt{2} \quad \Rightarrow \boxed{y = 4\sqrt{2}}$

$f(-\sqrt{2}) = 6(-\sqrt{2}) - (-\sqrt{2})^3 \quad \Rightarrow y = -6\sqrt{2} + 2\sqrt{2} \quad \Rightarrow \boxed{y = -4\sqrt{2}}$



النقطة $(\sqrt{2}\ ,\ 4\sqrt{2})$ نهاية عظمى محلية

النقطة $(-\sqrt{2}\ , -4\sqrt{2})$ نهاية صغرى محلية

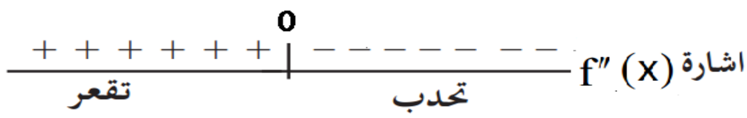
$f(x)$ متزايدة في $(-\sqrt{2}\ , \sqrt{2})$

$f(x)$ متناقصة في $\{x:\ x > \sqrt{2}\}\ \{x:\ x < -\sqrt{2}\}$

- دراسة $\bar{\bar{f}}(x)$ وما ينتج عنها

$\Rightarrow \bar{\bar{f}}(x) = -6x$ 		(نجعل $\bar{\bar{f}}(x) = 0$)

$\Rightarrow \ 0 = -6x \quad \Rightarrow \boxed{x = 0} \quad \boxed{y = 0}$



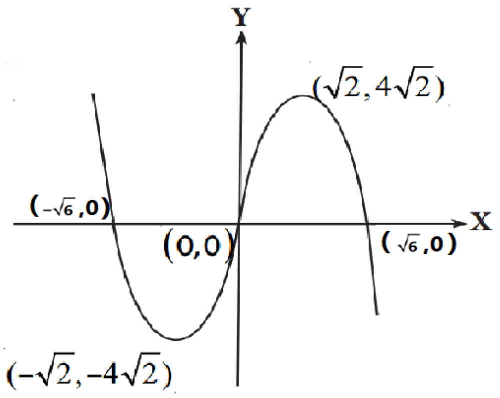
∴ النقطة (0,0) نقطة أنقلاب

$f(x)$ مقعرة في $\{\, x : x < 0 \,\}$

$f(x)$ محدبة في $\{\, x : x > 0 \,\}$

- تحديد النقط الخاصة بالرسم ومن ثم رسمها

x	y
$-\sqrt{2}$	$-4\sqrt{2}$
$4\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$
0	0
$-\sqrt{6}$	0
$\sqrt{6}$	0



$(5)\quad f(x)=\frac{1}{x}$

الحل/

- أوسع مجال للدالة = $R-\{0\}$
- التناظر /

$\forall\, x\in R\ \exists(-x)\in R \Rightarrow f(-x)=\frac{1}{-x}=-\left(\frac{1}{x}\right)$

$\therefore$ التناظر مع نقطة الأصل لأن :

$f(-x)=-f(x)$

- المحاذيات

المستقيم المحاذي الشاقولي $\boxed{x=0}$

المستقيم المحاذي الأفقي $f(x)=y=\frac{1}{x} \Rightarrow yx=1 \Rightarrow x=\frac{1}{y} \Rightarrow \boxed{y=0}$

- نقط التقاطع مع المحورين

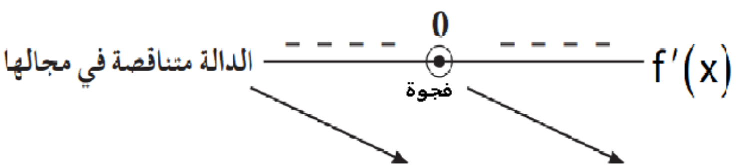
لا يوجد تقاطع مع محور الصادات لان $(x\neq 0$ لان $0\neq 1)$

لا يوجد تقاطع مع محور السينات لان $(y\neq 0$ لان $0\neq 1)$

- دراسة $\bar{f}(x)$ وما ينتج عنها

$f(x)=x^{-1} \Rightarrow \bar{f}(x)=-x^{-2}=\frac{-1}{x^2}$ (نجعل $\bar{f}(x)=0$)

$\frac{-1}{x^2}=0 \Rightarrow -1=0$ (غير ممكن)



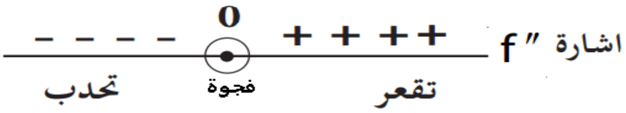
$\therefore$ لا توجد نقطة حرجة

- دراسة $\bar{\bar{f}}(x)$ وما ينتج عنها

(نجعل $\bar{\bar{f}}(x) = 0$)

$\Rightarrow \bar{\bar{f}}(x) = 2x^{-3} = \dfrac{2}{x^3}$

$\Rightarrow \quad 0 = \dfrac{2}{x^3} \qquad \Rightarrow 0 = 2$ (غير ممكن)



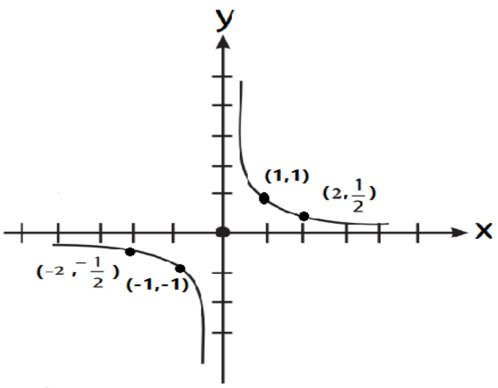
$\therefore$ لا توجد نقطة أنقلاب

$f(x)$ مقعرة في $\{x : x > 0\}$

$f(x)$ محدبة في $\{x : x < 0\}$

- تحديد النقط الخاصة بالرسم ومن ثم رسمها

x	y
-2	$-\frac{1}{2}$
-1	-1
فجوة	
1	1
2	$\frac{1}{2}$



$(6) \qquad f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

الحل/

- أوسع مجال للدالة $R - \{-1\}$
- التناظر /

$\forall\, x \in R\ \exists(-x) \in R \;\Rightarrow\; f(-x) = \dfrac{-x-1}{-x+1}$

$\therefore$ لا يوجد تناظر مع محور الصادات او مع نقطة الأصل لأن :

$f(-x) \neq -f(x) \quad , \quad f(-x) \neq f(x)$

- المحاذيات /

$x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = -1}$ المستقيم المحاذي الشاقولي

$f(x) = y = \dfrac{x-1}{x+1} \Rightarrow yx + y = x - 1 \Rightarrow yx - x = -1 - y \Rightarrow x(y-1) = -1 - y$

$\Rightarrow x = \dfrac{-1-y}{y-1} \quad \Rightarrow \quad y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 1}$ المستقيم المحاذي الأفقي

- نقط التقاطع مع المحورين

$$if \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -1$$

$$if \quad y = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{x-1}{x+1} \quad \Rightarrow \quad x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

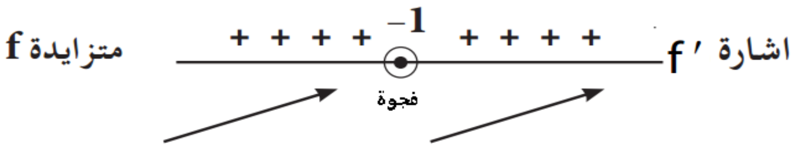
$\therefore$ النقط $(0,-1)$ $(1 \, , \, 0)$ نقط التقاطع مع المحورين

- دراسة $\bar{f}(x)$ وما ينتج عنها

$$\bar{f}(x) = \frac{(x+1)(1) - (x-1)(1)}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{(x+1)^2} \neq 0$$

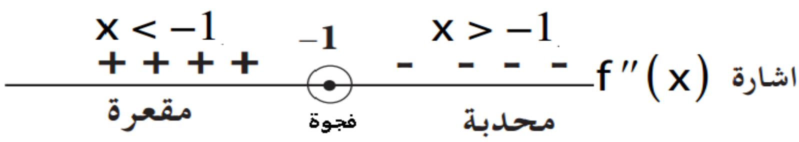
$\therefore$ لا توجد نقطة حرجة



- دراسة $\bar{\bar{f}}(x)$ وما ينتج عنها

$$\bar{\bar{f}}(x) = \frac{(x+1)^2(0) - 2[2(x+1)]}{(x+1)^4} = \frac{-4(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{-4}{(x+1)^3}$$

$$\Rightarrow \frac{-4}{(x+1)^3} \neq 0 \quad (\text{غير ممكن})$$

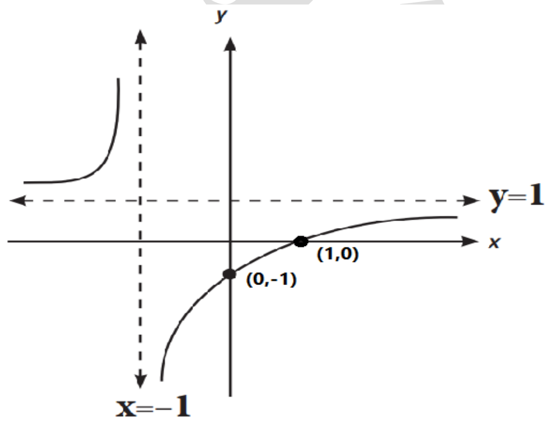


لاتوجد نقاط انقلاب

f محدبة في $\{x : x > -1\}$

f مقعرة في $\{x : x < -1\}$

- تحديد النقط الخاصة بالرسم ومن ثم رسمها



x	0	1	2	-2
y	-1	0	$\frac{1}{3}$	3

$(7)\quad f(x)=(x+2)(x-1)^2$

الحل/

- أوسع مجال للدالة $=R$
- التناظر /

$\forall\, x\in R\ \exists(-x)\in R \Rightarrow f(-x)=(-x+2)(-x-1)^2$

∴ لا يوجد تناظر مع محور الصادات او مع نقطة الأصل لأن :

$f(-x)\neq -f(x)\quad,\quad f(-x)\neq f(x)$

- المحاذيات / لا توجد لأن الدالة ليست نسبية (كسرية)

- نقط التقاطع مع المحورين

$if\quad x=0 \quad\Rightarrow\quad y=(0+2)(0-1)^2=(2)(1)\quad\Rightarrow\quad y=2$

$if\quad y=0\quad\Rightarrow\quad 0=(x+2)(x-1)^2$

$either\quad x+2=0\quad\Rightarrow\quad x=-2$

$or\quad (x-1)^2=0\quad\Rightarrow\quad x-1=0\quad\Rightarrow\quad x=1$

∴ النقط $(0,2)\,,(-2\,,\,0)\,,(1\,,\,0)$ نقط التقاطع مع المحورين

- دراسة $\bar{f}(x)$ وما ينتج عنها

$\bar{f}(x)=(x+2)[2(x-1)]+(x-1)^2\,(1)\ =(x-1)[2x+4+x-1]$

$\bar{f}(x)=(x-1)[3x+3]$ (نجعل $\bar{f}(x)=0$)

$(x-1)[3x+3]=0$

$either\quad x-1=0\quad\Rightarrow\quad x=1\quad\Rightarrow\quad y=f(1)=(1+2)(1-1)^2\quad\Rightarrow\quad y=0$

$or\quad 3x+3=0\quad\Rightarrow\quad x=-1\quad\Rightarrow\quad y=f(-1)=(-1+2)(-1-1)^2\quad\Rightarrow\quad y=4$

اشارة f′(x) : + + + + (−1) − − − − (1) + + + +

↗ ↘ ↗

النقاط $(1\,,0)\,,(-1\,,4)$ نقاط حرجة

$f(x)$ متزايدة في $\{x:\ x<-1\}$ $\{x:\ x>1\}$

$f(x)$ متناقصة في الفترة المفتوحة $(-1,1)$

∴ النقطة $(1,0)$ صغرى محلية

∴ النقطة $(-1,4)$ عظمى محلية

- دراسة $\bar{\bar{f}}(x)$ وما ينتج عنها

$\bar{\bar{f}}(x)=(x-1)(3)+(3x+3)(1)=3x-3+3x+3$

$\Rightarrow\quad \bar{\bar{f}}(x)=6x$ (نجعل $\bar{\bar{f}}(x)=0$)

$\therefore\quad 6x=0\quad\Rightarrow\quad x=0\quad\Rightarrow\quad y=f(0)=(0+2)(0-1)^2\quad\Rightarrow\quad y=2$

اشارة f″(x) : − − − − (0) + + + +

تحدب | تقعر

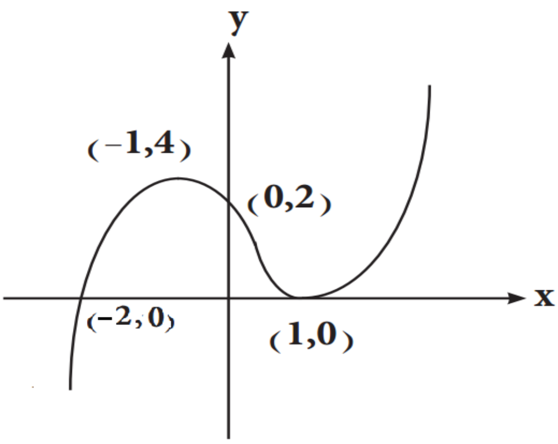
∴ النقطة $(0,2)$ نقطة أنقلاب

$f(x)$ محدبة في $\{x:\ x<0\}$

$f(x)$ مقعرة في $\{x:\ x>0\}$

- تحديد النقط الخاصة بالرسم ومن ثم رسمها

x	0	1	-2	-1
y	2	0	0	4



(8) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

الحل/

- أوسع مجال للدالة $R =$ لأن $\left(x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \notin R\right)$
- التناظر /

$\forall x \in R \; \exists(-x) \in R \Rightarrow f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

∴ التناظر مع محور الصادات لأن $f(-x) = f(x)$

- المحاذيات /

$x^2 + 1 = 0$ لا يوجد مستقيم المحاذي الشاقولي

$f(x) = y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \Rightarrow yx^2 + y = x^2 - 1 \Rightarrow yx^2 - x^2 = -1 - y \Rightarrow x^2(y - 1) = -1 - y$

$\Rightarrow x^2 = \frac{-1 - y}{y - 1} \Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow \boxed{y = 1}$ المستقيم المحاذي الأفقي

- نقط التقاطع مع المحورين

$if \quad x = 0 \Rightarrow y = -1$

$if \quad y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1$

∴ النقط $(0, -1)$ $(-1 , 0), (1 , 0)$ نقط التقاطع مع المحورين

- دراسة $\bar{f}(x)$ وما ينتج عنها

$\bar{f}(x) = \frac{(x^2 + 1)(2x) - (x^2 - 1)(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 + 2x - 2x^3 + 2x}{(x^2 + 1)^2}$

$\bar{f}(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$ (نجعل $\bar{f}(x) = 0$)

$\therefore \frac{4x}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

$\therefore y = f(1) = -1 \Rightarrow \boxed{y = -1}$

اشارة $f'(x)$: $- - - -$ 0 $+ + + +$

$\therefore$ النقطة $(0,-1)$ نقطة نهاية صغرى محلية

$f(x)$ متزايدة في $\{x:\ x>0\}$

$f(x)$ متزايدة في $\{x:\ x<0\}$

- دراسة $\bar{\bar{f}}(x)$ وما ينتج عنها

$$\bar{\bar{f}}(x)=\frac{(x^2+1)^2(4)-(4x)\big(2(x^2+1)(2x)\big)}{(x^2+1)^4}=\frac{4(x^2+1)^2-(16x^2)(x^2+1)}{(x^2+1)^4}$$

$$\bar{\bar{f}}(x)=\frac{4(x^2+1)[x^2+1-4x^2]}{(x^2+1)^4}=\frac{4[x^2+1-4x^2]}{(x^2+1)^3}=\frac{4[1-3x^2]}{(x^2+1)^3}$$

$$\bar{\bar{f}}(x)=\frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3}\qquad \left(\text{نجعل } \bar{\bar{f}}(x)=0\right)$$

$$\Rightarrow\ \frac{4-12x^2}{(x^2+1)^3}=0\quad\Rightarrow\ 4-12x^2=0\quad\Rightarrow\ 4=12x^2\quad\Rightarrow\ x^2=\frac{4}{12}\quad\Rightarrow\ x^2=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow\ x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$either\quad y=f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2-1}{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{3}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{3}{3}}=\frac{\frac{-2}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

$$or\quad y=f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{x^2-1}{x^2+1}=\frac{\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^2-1}{\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^2+1}=\frac{\frac{1}{3}-1}{\frac{1}{3}+1}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{3}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{3}{3}}=\frac{\frac{-2}{3}}{\frac{4}{3}}=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}$$

اشارة $f''(x)$: $- - - -$ $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ $+ + + +$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ $- - - -$

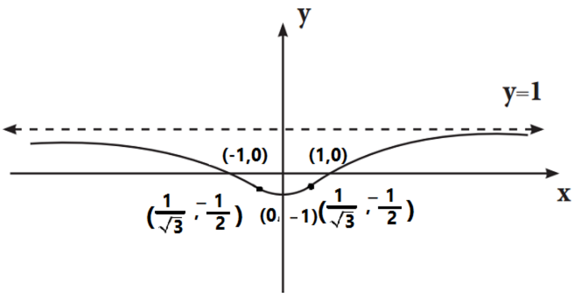
تحدب | تقعر | تحدب

$\therefore$ النقاط $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{2}\right), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{2}\right)$ نقاط أنقلاب

$f(x)$ محدبة في $\left\{x:\ x>\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \left\{x:\ x<\frac{-1}{\sqrt{3}}\right\}$

$f(x)$ مقعرة في $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

- تحديد النقط الخاصة بالرسم ومن ثم رسمها



x	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	-1	1
y	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	-1	0	0

(9) $f(x) = 2x^2 - x^4$ **وزاري 2012 / د2**

الحل/

- أوسع مجال للدالة $= R$
- التناظر /

$\forall x \in R \; \exists (-x) \in R \Rightarrow f(-x) = 2x^2 - x^4 = 2(-x)^2 - (-x)^4 = 2x^2 - x^4$

∴ التناظر مع محور الصادات لأن :

$f(-x) = -f(x)$

- المحاذيات / لا توجد لأن الدالة ليست نسبية (كسرية)
- نقط التقاطع مع المحورين

$if \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 0$

$if \quad y = 0 \quad \Rightarrow 2x^2 - x^4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2(2 - x^2) = 0$

أما $x^2 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$

أو $2 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow \boxed{x = \mp\sqrt{2}}$

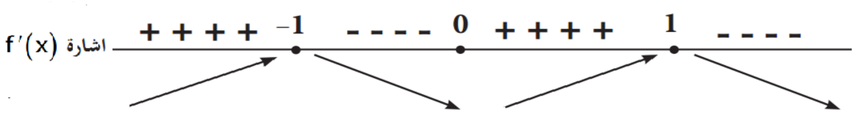
∴ نقط التقاطع $(0,0), (\sqrt{2}, 0), (-\sqrt{2}, 0)$

- دراسة $\bar{f}(x)$ وما ينتج عنها

$\bar{f}(x) = 4x - 4x^3$ (نجعل $\bar{f}(x) = 0$)

$\Rightarrow 4x - 4x^3 = 0 \xrightarrow{(\div\, -4)} x^3 - x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 1) \Rightarrow \boxed{x = 0} \boxed{x = 1} \boxed{x = -1}$

$\Rightarrow f(x) = 2x^2 - x^4 \Rightarrow \boxed{y = 0} \boxed{y = 1} \boxed{y = 1}$



النقطة $(0, 0)$ نهاية صغرى محلية

النقطة $(-1,1)$ نهاية عظمى محلية

النقطة $(1,1)$ نهاية عظمى محلية

$f(x)$ متزايدة في $\{x: x < -1\}$ $(0, 1)$

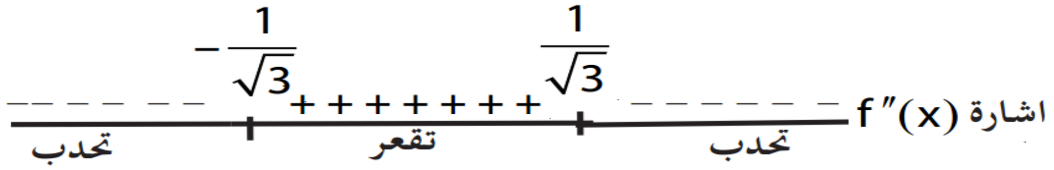
$f(x)$ متناقصة في $\{x: x > 1\}$ $(-1, 0)$

- دراسة $\overline{\overline{f}}(x)$ وما ينتج عنها

$\Rightarrow \overline{\overline{f}}(x) = 4 - 12x^2$ (نجعل $\overline{\overline{f}}(x) = 0$)

$\Rightarrow \ 0 = 4 - 12x^2 \xRightarrow{(\div -4)} -1 + 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \boxed{x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$\Rightarrow f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^4 = \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{6-1}{9} \quad \Rightarrow \boxed{y = \frac{5}{9}}$



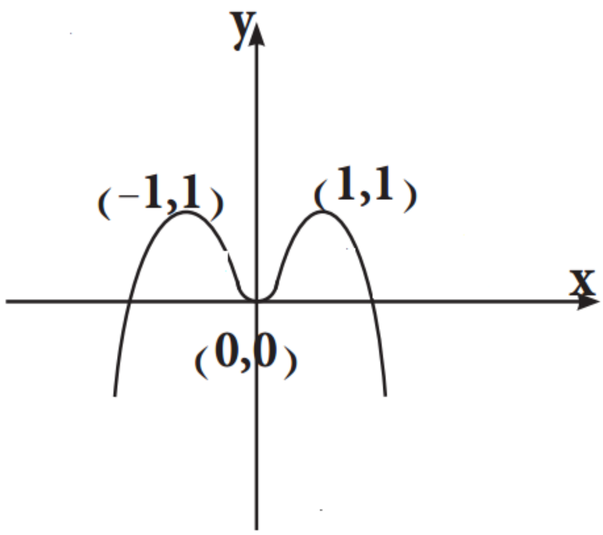
النقط $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$ $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{5}{9}\right)$ نقط أنقلاب مرشحة

$f(x)$ مقعرة في $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$f(x)$ محدبة في $\left\{x:\ x > \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$ $\left\{x:\ x < \frac{-1}{\sqrt{3}}\right\}$

- تحديد النقط الخاصة بالرسم ومن ثم رسمها

x	y
− 1	1
1	1
0	0
$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	$\frac{5}{9}$
$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{5}{9}$
$\mp\sqrt{2}$	0



$(10) \quad f(x) = \dfrac{6}{x^2+3}$

الحل/

- أوسع مجال للدالة $R =$ لأن $(x^2 + 3 \neq 0)$
- التناظر /

$$\forall\, x \in R\ \exists(-x) \in R \ \Rightarrow\ f(-x) = \frac{6}{(-x)^2+3} = \frac{6}{x^2+3}$$

∴ التناظر مع محور الصادات لأن $f(-x) = f(x)$

- المحاذيات /

$x^2 + 3 \neq 0$ لا يوجد محاذي الشاقولي

$$f(x) = y = \frac{6}{x^2+3} \Rightarrow yx^2 + 3y = 6 \Rightarrow yx^2 = 6 - 3y$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{6-3y}{y} \Rightarrow \boxed{y = 0}$$ المستقيم المحاذي الأفقي

- نقط التقاطع مع المحورين

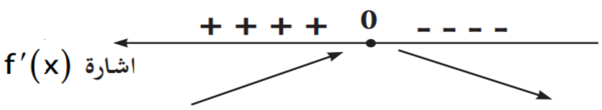
$$if \quad x = 0 \Rightarrow y = 2$$
$$if \quad y = 0 \Rightarrow 0 = \frac{6}{x^2+3} \Rightarrow 0 \neq 6$$

∴ النقطة $(0\ ,\ 2)$ نقطة التقاطع مع المحور الصادي

- دراسة $\bar{f}(x)$ وما ينتج عنها

$$\bar{f}(x) = \frac{(x^2+3)(0) - 6(2x)}{(x^2+3)^2} = \frac{-12x}{(x^2+3)^2}$$ (نجعل $\bar{f}(x) = 0$)

$$-12x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 0}$$
$$y = f(0) = 2 \Rightarrow \boxed{y = 2}$$



∴ النقطة $(0,2)$ نقطة نهاية عظمى محلية

$f(x)$ متزايدة في $\{x:\ x < 0\}$

$f(x)$ متناقصة في $\{x:\ x > 0\}$

- دراسة $\bar{\bar{f}}(x)$ وما ينتج عنها

$$\bar{\bar{f}}(x) = \frac{(x^2+3)^2(-12) - (-12x)\big(2(x^2+3)(2x)\big)}{(x^2+3)^4} = \frac{-12(x^2+3)^2 + (48x^2)(x^2+3)}{(x^2+3)^4}$$

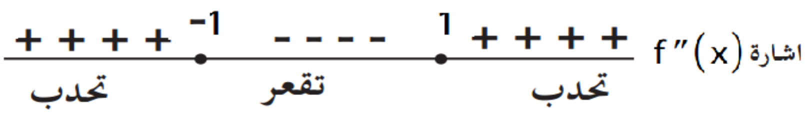
$$\bar{\bar{f}}(x) = \frac{(x^2+3)[-12(x^2+3) + 48x^2]}{(x^2+3)^4} = \frac{-12x^2 - 36 + 48x^2}{(x^2+3)^3}$$

$$\bar{\bar{f}}(x) = \frac{36x^2 - 36}{(x^2+3)^3} = 0$$ (نجعل $\bar{\bar{f}}(x) = 0$)

$$\Rightarrow 36x^2 - 36 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow \boxed{x = \pm 1}$$

$$if \quad x = 1 \qquad \Rightarrow f(1) = y = \frac{6}{(1)^2 + 3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

$$if \quad x = -1 \qquad \Rightarrow f(-1) = y = \frac{6}{(-1)^2 + 3} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$



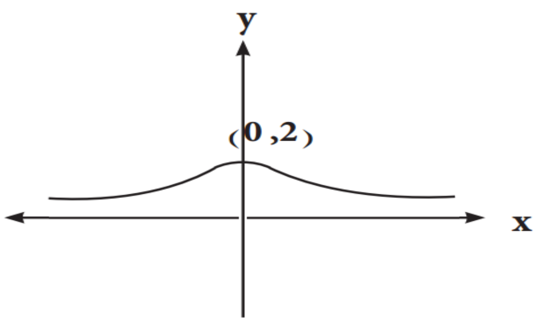
∴ النقاط $\left(1 , \frac{3}{2}\right) , \left(-1 , \frac{3}{2}\right)$ نقاط أنقلاب

$f(x)$ مقعرة في $\{x: \ x > 1\} , \{x: \ x < -1\}$

$f(x)$ محدبة في $(-1 \ , \ 1)$

- تحديد النقط الخاصة بالرسم ومن ثم رسمها

x	-1	1	0
y	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	2



****

واجبات

مثال (1)/ باستخدام معلوماتك في التفاضل أرسم منحني كل من الدوال الأتية

$(a) \quad f(x) = x^5$ $\qquad (b) \quad f(x) = (2x-1)^3$

$(c) \quad f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ $\qquad (d) \quad f(x) = 2x^2 - x^4$

مثال (2)/ أذا كانت $f(x) = x^2 - (b-1)x + 1$ متناظرة حول محور الصادات جد قيمة (b) ومن ثم استخدام معلوماتك في التفاضل وأرسم منحني الدالة .

مثال (3)/ أذا كانت الدالة $f(x) = \frac{ax+b}{2x+b}$ وكانت النقطة (-1,3) نقطة تقاطع المحاذيات الافقية والعمودية للدالة جد كل من a , b ومن ثم استخدام معلوماتك في التفاضل وأرسم منحني الدالة .

تطبيقـــات عملية على النهايـات العظمى والصغرى المحلية:

ظهرت في الفيزياء الكثير من المسائل التي أدت الى تطور حساب التفاضل والتكامل ومن هذه المسائل مسائل حساب أقصى أرتفاع تصله قذيفة أطلقت بزوايا مختلفة أو أقصى أرتفاع يصله جسم مقذوف شاقولياً الى الأعلى أو أقل كلفة أو أقل زمن ومسائل من الصناعات مثل أقل مساحة وأكبر حجم وأقل محيط ، ... ألخ .

لحل المسائل المتعلقة بهذا الموضوع نتبع الخطوات التالية :

① نرسم رسم توضيحي للمسألة كلما كان ذلك ممكنا ونثبت على الشكل كل المتغيرات والثوابت ومن ثم نبدأ بتكوين الفرضية التي تعتمد على كلمة (جد ، ماهي ،عين ،احسب، ...) أي نكون الفرضية على أساس المطلوب.

② نكون الدالـــة المطلوب أيجـــاد النهاية العظمى أو الصغرى لهــــا . بمعنى أخر نبحث في المسألة عن الكلمات التي تدل على النهايـــات العظمى أو الصغرى المحليـة مــثل (اكبر ما يمكن ، اصغر مـــا يمكن ، اقــل كمية ، اطول مسافة ، ...) ثم نبدأ بتكوين الدالة على أساس هذه الكلمات وفي أكثر الأحيان تكون هذه الدالة (قانون حجم ، مساحة ، محيط ، فيثاغورس ، تشابه مثلثات ، دوال دائرية ، ...)

③ اذا كانت الدالة المكونة اعلاه تعتمد على اكثر من متغير لذا يجب ايجاد علاقة بين المتغيرات لتكوين دالـة ذات متغير واحد وأكثر الاحيان هذه العلاقة هي (قانون حجم ، مساحة ، ....) مشابهة للقوانين السابقة.

④ أخير نبدأ بدراسة الدالة المتكونة والتي تحتوي على متغير واحد لأيجاد النهاية العظمى أو الصغرى المحلية كما تعلمنـــا ســـابقا عــن طريــق أيجـــاد الأعـــداد الحرجـــة فـــي أطـــراف الفتـــرة أي (أيجـــاد قـــيم الدالـــة).

مثال (1)/ جد العدد الذي أذا أضيف الى مربعه يكون الناتج أصغر ما يمكن :

الحل/

الفرضية : نفرض العدد $= x$

مربع العدد $= x^2$

الدالة : العدد + مربعه

$$f(x) = x + x^2$$

الدراسة:

$$\bar{f}(x) = 1 + 2x \qquad (\text{نجعل } \bar{f}(x) = 0)$$

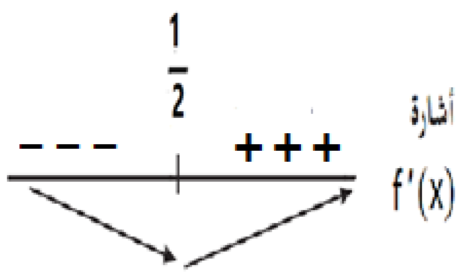
$$1 + 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}$$

$$\bar{\bar{f}}(x) = 2 \Rightarrow \bar{\bar{f}}\left(\frac{-1}{2}\right) = 2 > 0$$

∴ توجد نهاية صغرى محلية عندما $x = \frac{-1}{2}$

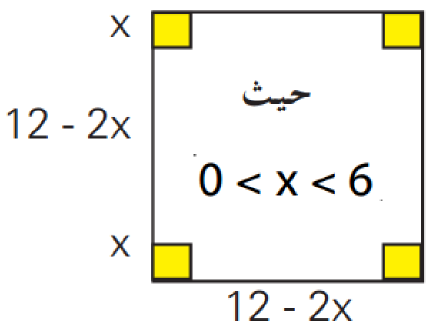
∴ العدد هو $\left(\frac{-1}{2}\right)$

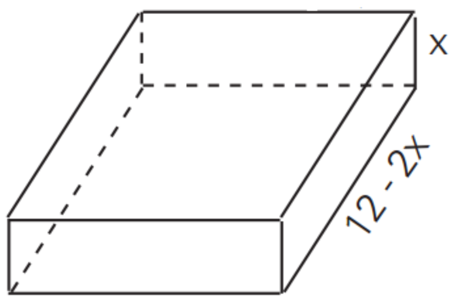
الأختبار



مثال (2)/ صنع صندوق مفتوح من قطعة من النحاس مربعة الشكل طول ضلعها $(12\ cm)$ وذلك بقص أربع مربعات متساوية الأبعاد من أركانها الأربعة ثم ثني الأجزاء البارزة لها . ما هو الحجم الأعظم لهذه العلبة ؟

الحل/ **وزاري 2015 / د1**





الفرضية : نفرض طول ضلع المربع المقطوع $= x$

أبعاد الصندوق = $(x\ ,\ 12-2x\ ,12-2x)$

الدالة: هي قانون حجم الصندوق = حاصل ضرب أبعاده الثلاثة

$$V=(12-2x)(12-2x)(x)$$
$$V=(144-48x+4x^2)(x)$$
$$V=144x-48x^2+4x^3$$

العلاقة: لا نحتاج الى علاقة لان المعادلة تحتوي متغير واحد

الدراسة :

$$\frac{dV}{dx}=144-96x+12x^2 \qquad \left(\text{نجعل } \frac{dV}{dx}=0\right)$$
$$144-96x+12x^2=0 \qquad (\div 12)$$
$$12-8x+x^2=0 \qquad \Longrightarrow (6-x)(2-x)=0$$

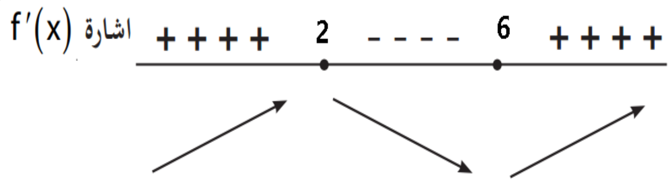
$either\ \ x=6$ لا يمكن

$or\ \ \boxed{x=2}$

$\therefore$ عندما $(x=2)$ توجد نهاية عظمى للحجم تساوي :

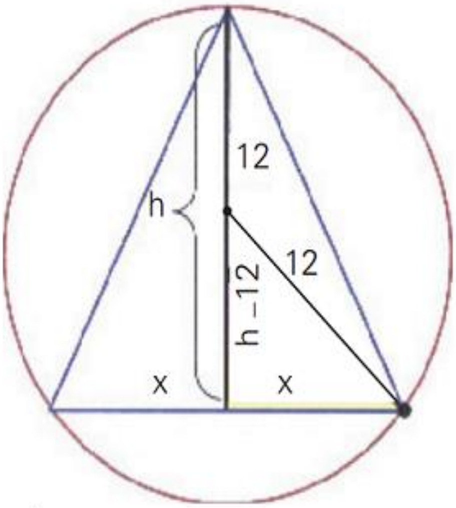
$$V=(8)(8)(2)=128\ \ cm^3$$

الأختبار: (للأطلاع)



مثال (3)/ جد بعدي أكبر مثلث متساوي الساقين يمكن أن يوضع داخل دائرة نصف قطرها $(12\ cm)$ ثم برهن أن نسبة مساحة المثلث الى مساحة الدائرة كنسبة $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

الحل/



الفرضية : نفرض أرتفاع المثلث = h طول قاعدة المثلث = $2x$

الدالة: هي قانون مساحة المثلث

$$A = \frac{1}{2}(2x)(h) = xh$$

العلاقة: فيثاغورس

$$x^2 + (h-12)^2 = (12)^2$$
$$x^2 + h^2 - 24h + 144 = 144$$
$$x^2 = 24h - h^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \sqrt{24h - h^2}}$$
$$\therefore A = xh = \left(\sqrt{24h-h^2}\right)h = \sqrt{24h^3 - h^4}$$

الدراسة:

$$\frac{dA}{dh} = \frac{72h^2 - 4h^3}{(2)\sqrt{24h^3 - h^4}} \quad \left(\text{نجعل } \frac{dA}{dh} = 0\right)$$
$$\frac{72h^2 - 4h^3}{(2)\sqrt{24h^3 - h^4}} = 0$$
$$\Rightarrow \quad 72h^2 - 4h^3 = 0 \quad (\div 4)$$
$$\Rightarrow \quad h^2(18 - h) = 0$$
$$either \quad h = 0 \quad (\text{لايمكن})$$
$$or \ \boxed{h = 18}$$
$$\Rightarrow x = \sqrt{24(18) - (18)^2} = \sqrt{(18)(6)} = 6\sqrt{3}\ \ cm$$

∴ طول قاعدة المثلث تساوي :

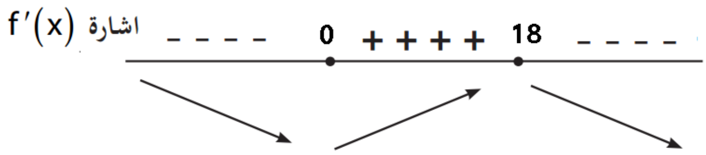
$$2x = 2(6\sqrt{3}) = 12\sqrt{3}\ \ cm$$

نسبة مساحة المثلث الى مساحة الدائرة :

$$A_1 = \pi r^2 = \pi(12)^2 = 144\,\pi\ \ cm^2 \quad \text{مساحة الدائرة}$$
$$A_2 = \frac{1}{2}(2x)(h) = xh = (6\sqrt{3})(18)$$
$$A_2 = 108\sqrt{3}\ \ cm^2 \quad \text{مساحة المثلث}$$

$$\therefore \frac{\text{مساحة المثلث}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{108\sqrt{3}}{144\,\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$$

الأختبار: (للأطلاع)

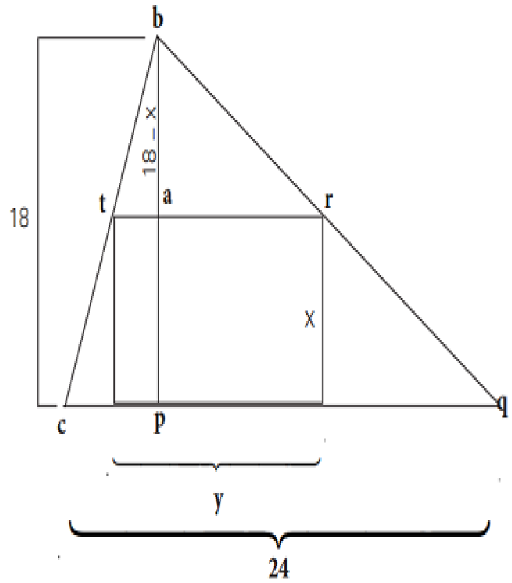


مثال (4)/ جد بعدي أكبر مستطيل يمكن أن يوضع داخل مثلث طول قاعدتـه (24 cm) وأرتفاعه (18 cm) بحيث أن رأسين متجاورين من رؤوسه تقعان على القاعدة والرأسين الباقيان تقعان على ساقيه . وزاري2013 / د2

الحل/

الفرضية : نفرض بعدي المستطيل : x , y

الدالة: هي مساحة المستطيل = حاصل ضرب بعديه



$$A = xy$$

العلاقة: تشـــــابه المثلثات btr , bcq (لتســاوي زواياهما المتناظرة لذا تتناسب أضلاعهما المتناظرة وكذلك أرتفاعهما)

$$\frac{tr}{cq} = \frac{ba}{bq} \implies \frac{y}{24} = \frac{18-x}{18}$$

$$y = 24\left(\frac{18-x}{18}\right) \implies \boxed{y = \frac{4}{3}(18-x)}$$

$$\therefore A = xy = x\left(\frac{4}{3}(18-x)\right) = \frac{4}{3}(18x - x^2)$$

الدراسة:

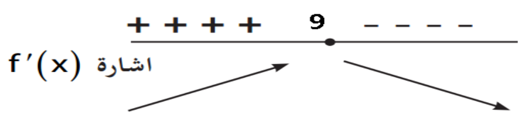
$$\frac{dA}{dx} = \frac{4}{3}(18-2x) \qquad \left(\text{نجعل } \frac{dA}{dx} = 0\right)$$

$$\frac{4}{3}(18-2x) = 0 \qquad \left(\div \frac{4}{3}\right)$$

$$\implies 18 - 2x = 0 \qquad \implies \boxed{x = 9} \quad \implies \boxed{y = 12}$$

∴ بعدي المستطيل هما $(9), (12)$

الأختبار: (للأطلاع)



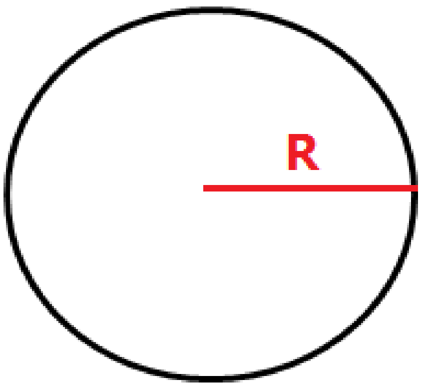
طريقة ثانية للأختبار :

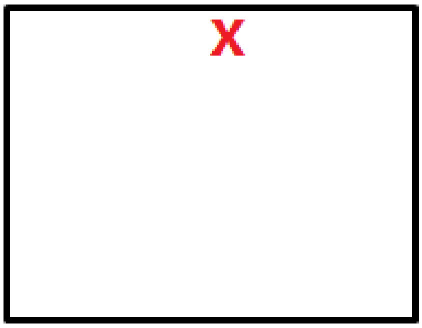
$$\frac{dA^2}{d^2x} = \frac{4}{3}(-2) = \frac{-8}{3} < 0$$

هذا يعني أن للدالة مساحة نهاية عظمى محلية عندما $(x = 9 \quad cm)$

مثال (5)/ مجموع محيطي دائرة ومربع $(60\ cm)$ أثبت أنه عندما يكون مجموع مساحتي الشكلين أصغر ما يمكن فأن طول قطر الدائرة يساوي طول ضلع المربع . وزاري 2013 / د3

الحل/





الفرضية : نفرض طول ضلع المربع = x cm ونصف قطر الدائرة = R cm

الدالة: هي مساحة المربع+ مساحة الدائرة

$$A = x^2 + \pi R^2$$

العلاقة: محيط المربع + محيط الدائرة= 60 cm

$$60 = 4x + 2\pi R \qquad (\div 2)$$

$$\pi R = 30 - 2x \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{30 - 2x}{\pi}}$$

$$\therefore A = x^2 + \pi R^2 = x^2 + \pi \left(\frac{30 - 2x}{\pi}\right)^2$$

$$A = x^2 + \frac{1}{\pi}(30 - 2x)^2 = x^2 + \frac{1}{\pi}(900 - 120x + 4x^2)$$

الدراسة:

$$\frac{dA}{dx} = 2x + \frac{1}{\pi}(-120 + 8x) \qquad \left(\text{نجعل } \frac{dA}{dx} = 0\right)$$

$$2x + \frac{1}{\pi}(-120 + 8x) = 0 \qquad \left(\div \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Rightarrow x\pi - 60 + 4x = 0 \qquad \Rightarrow x(\pi + 4) = 60$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{60}{\pi + 4}} \quad \text{طول ضلع المربع}$$

$$\text{قطر الدائرة} = 2R = 2\left(\frac{1}{\pi}(30 - 2x)\right) = \frac{2}{\pi}\left(30 - \frac{120}{\pi + 4}\right)$$

$$\text{قطر الدائرة} = \frac{2}{\pi}\left(\frac{30\pi + 120 - 120}{\pi + 4}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{30\pi}{\pi + 4}\right) = \frac{60}{\pi + 4} = x$$

الأختبار :

$$\frac{dA^2}{d^2x} = 2 + \frac{1}{\pi}(8) \ > 0$$

هذا يعني أن الدالة تمتلك نهاية صغرى محلية

مثال (6)/ جد نقطة أو نقاط تنتمي للقطع الزائد $y^2 - x^2 = 3$ بحيث تكون أقرب ما يمكن للنقطة $(0,4)$

الحل/   **وزاري 2011 / د2**   **وزاري 2013 / د1**

الفرضية : نفرض أن النقطة $p(x,y)$ هي من نقط المنحني $y^2 - x^2 = 3$ بحيث تكن أقرب ما يمكن للنقطة $(0,4)$

الدالة: هي قانون المسافة

$$S = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2}$$

العلاقة: $(y^2 - x^2 = 3)$

$$S = \sqrt{x^2 + y^2 - 8y + 16}$$

$$S = \sqrt{(y^2 - 3) + y^2 - 8y + 16}$$

$$S = \sqrt{2y^2 - 8y + 13}$$

الدراسة:

$$\frac{dS}{dy} = \frac{4y-8}{(2)\sqrt{2y^2 - 8y + 13}} \qquad \left(\text{نجعل } \frac{dS}{dy} = 0\right)$$

$$\Rightarrow \frac{4y-8}{(2)\sqrt{2y^2 - 8y + 13}} = 0$$

$$\Rightarrow 4y - 8 = 0 \qquad \Rightarrow y - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 2}$$

$$\Rightarrow x^2 = y^2 - 3 = 4 - 3 = 1 \qquad \Rightarrow \boxed{x = \pm 1}$$

النقاط هي $(1,2)$ ، $(-1,2)$

****

ملاحظات :

① يمكن القول عن دالة المساحة في بعض الأحيان أكبر أو أصغر مسطح للشكل

② يمكن القول عن دالة الحجم أو السعة في بعض الأحيان أكبر أو أصغر مجسم للشكل

③ في كلا الحالتين أعلاه يكون الحل هو نفس الحل السابق عن طريق أيجاد الفرضية ، الدالة ، العلاقة (فقط في حالة وجود أكثر من متغير) ، الدراسة ، الاختبار

تمارين(6 – 3)

س1 / جد عددين موجبين مجموعهما (75) وحاصل ضرب أحدهما في مربع الأخر أكبر ما يمكن .

الحل/

الفرضية: نفرض العدد الأول = x والعدد الثاني =y
حاصل ضرب العدد الأول × مربع العدد الثاني = L

الدالة: هي علاقة عددية

$L = xy^2 \quad \dots\dots$ (معادلة ①)
$x + y = 75$
$x = 75 - y \quad \dots\dots$ (معادلة ②)

نعوض معادلة ② في معادلة ①

$L = (75 - y)y^2$
$L = 75y^2 - y^3$

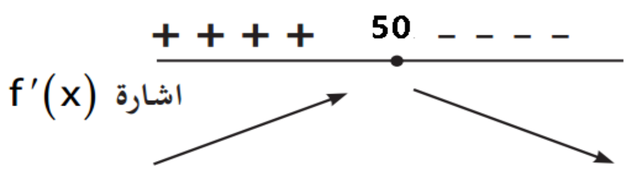
الدراسة:

$\frac{dL}{dy} = \bar{L} = 150y - 3y^2$ (نجعل $\bar{L} = 0$)
$150y - 3y^2 = 0 \quad (\div 3)$
$50y - y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y(50 - y) = 0$

$either \quad y = 0$ (يهمل)
$or \quad \boxed{y = 50} \quad \Rightarrow \quad x = 75 - y = 75 - 50 = 25$

العدد الأول (25) والعدد الثاني (50)

الأختبار: للأطلاع



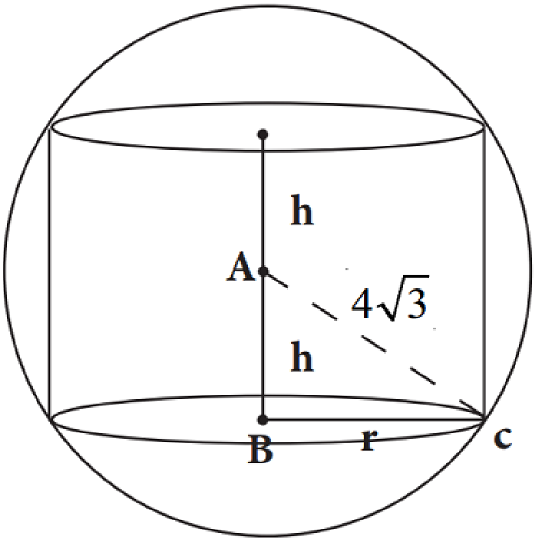
س2 / جد أرتفاع أكبر أسطوانة دائرية قائمة توضع داخل كرة نصف قطرها $4\sqrt{3}\ cm$ — وزاري 2012 / د3

الحل/

الفرضية : نفرض نصف قطر قاعدة الاسطوانة = r ونفرض أرتفاع الاسطوانة = $2h$ ونفرض الحجم = V

الدالة: هي قانون حجم الاسطوانة

$$V = \pi r^2(2h) \qquad (\text{معادلة } ①)$$



العلاقة: فيثاغورس

$$\because r^2 + h^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2$$

$$\therefore r^2 = 48 - h^2 \qquad (\text{معادلة } ②)$$

نعوض معادلة ② في معادلة ①

$$\therefore V = 2\pi r^2 h = 2\pi(48 - h^2)h$$

$$V = 2\pi(48h - h^3) \qquad (\text{معادلة } ③)$$

الدراسة:

$$\frac{dV}{dh} = 2\pi(48 - 3h^2) \qquad \left(\text{نجعل } \frac{dV}{dh} = 0\right)$$

$$2\pi(48 - 3h^2) = 0 \qquad (\div 2\pi)$$

$$\Rightarrow 48 - 3h^2 = 0 \qquad (\div 3)$$

$$\Rightarrow 16 - h^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (4 - h)(4 + h) = 0$$

$either\ \ h = -4$ (يهمل)

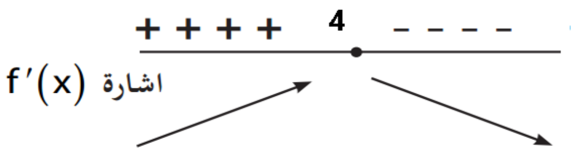
$or\ \ \boxed{h = 4}$

$$\therefore r^2 = 48 - h^2 = 48 - 16 = 32 \Rightarrow \boxed{r = 4\sqrt{2}}$$

أكبر ارتفاع للاسطوانة :

$$2h = 2(4) = 8\ \ cm$$

الأختبار: (للأطلاع)

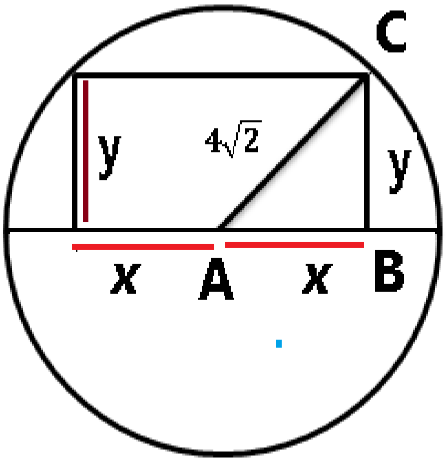


س3 / جد بعدي أكبر مستطيل يوضع داخل نصف دائرة نصف قطرها $4\sqrt{2}\ cm$ وزاري 2012 / د1

الحل/

الفرضية : نفرض طول المستطيل = $2x$ نفرض عرض المستطيل = y ونفرض مساحة المستطيل = A

الدالة: هي قانون مساحة المستطيل



$A = 2x.y$ (معادلة ①)

العلاقة: فيثاغورس في المثلث القائم (ABC)

$x^2 + y^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 32$

$x = \sqrt{32 - y^2}$ (معادلة②)

نعوض معادلة ② في معادلة ①

$\therefore A = 2x.y = 2\left(\sqrt{32 - y^2}\right)y$

$A = 2\left(\sqrt{32y^2 - y^4}\right) = \sqrt{4(32y^2 - y^4)}$

$A = \sqrt{128y^2 - 4y^4}$

الدراسة:

$\frac{dA}{dy} = \frac{256y - 16y^3}{2\left(\sqrt{128y^2 - 4y^4}\right)}$ (نجعل $\frac{dA}{dy} = 0$)

$\frac{256y - 16y^3}{2\left(\sqrt{128y^2 - 4y^4}\right)} = 0 \Rightarrow 256y - 16y^3 = 0$

$\Rightarrow 16y - y^3 = 0 \qquad \Rightarrow y(16 - y^2) = 0$

either $y = 0$ (يهمل)

or $y^2 = 16$

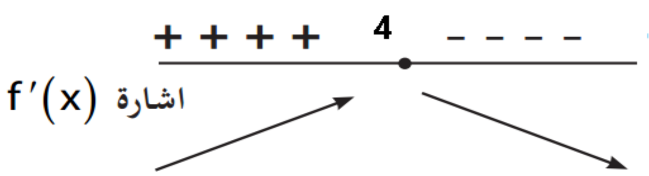
$\Rightarrow y = \mp 4$ (يهمل السالب)

$\therefore \boxed{y = 4\ cm}$ (عرض المستطيل)

$\therefore x = \sqrt{32 - y^2} = \sqrt{32 - 16} = \sqrt{16} = 4\ cm$

$\therefore 2x = 2(4) = 8\ cm$ (طول المستطيل)

الأختبار: للأطلاع



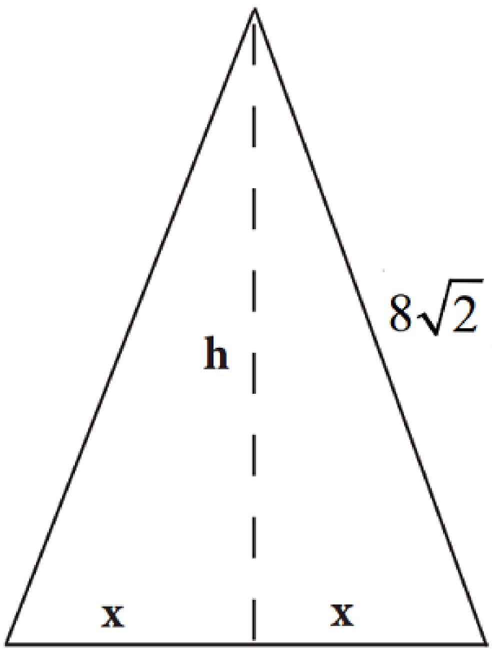
س4 / جد أكبر مساحة لمثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه $8\sqrt{2}\ cm$

الحل/

الفرضية : نفرض أرتفاع المثلث $= h$ ونفرض طول قاعدة المثلث $= 2x$ ونفرض مساحة المثلث $= A$

الدالة: هي قانون مساحة المثلث

$$A = \frac{1}{2}(2x).h = xh \qquad (\text{معادلة } ①)$$



العلاقة: فيثاغورس

$$x^2 + h^2 = \left(8\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 + h^2 = 128$$

$$\Rightarrow x^2 = 128 - h^2 \Rightarrow x = \sqrt{128 - h^2} \qquad (\text{معادلة } ②)$$

نعوض معادلة ② في معادلة ①

$$\therefore A = x.h = \left(\sqrt{128 - h^2}\right)h$$

$$A = \sqrt{128h^2 - h^4}$$

الدراسة:

$$\frac{dA}{dh} = \frac{256h - 4h^3}{2\left(\sqrt{128h^2 - h^4}\right)} \qquad \left(\text{نجعل } \frac{dA}{dh} = 0\right)$$

$$\frac{256h - 4h^3}{2\left(\sqrt{128h^2 - h^4}\right)} = 0 \Rightarrow 256h - 4h^3 = 0$$

$$64h - h^3 = 0 \Rightarrow h(64 - h^2) = 0$$

$either\ \boxed{h = 0}$ (يهمل)

$or\quad 64 - h^2 = 0 \Rightarrow h^2 = 64$

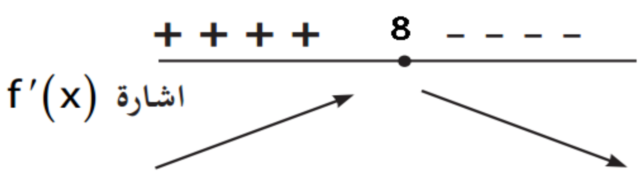
$\Rightarrow \boxed{h = 8\ \ cm}$ الأرتفاع $\quad or \quad h = -8$ (يهمل)

$\therefore 2x = 2(8) = 16\ \ cm$ (طول قاعدة المثلث)

اكبر مساحة للمثلث :

$$A = xh = (8)(8) = 64\ cm^2$$

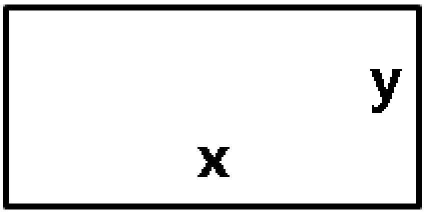
الأختبار: للأطلاع



س5 / جد أقل محيط ممكن للمستطيل الذي مساحته $16\ cm^2$

الحل/

الفرضية : نفرض طول المستطيل = x ونفرض عرض المستطيل = y ونفرض محيط المستطيل = P
ونفرض مساحة المستطيل = A



الدالة: هي قانون محيط المستطيل

$$P = 2x + 2y \qquad \text{(معادلة ①)}$$

العلاقة: مساحة المستطيل

$$A = x.y \implies 16 = xy \implies y = \frac{16}{x} \qquad \text{(معادلة ②)}$$

نعوض معادلة ② في معادلة ①

$$\therefore\ P = 2x + 2y = 2x + 2\left(\frac{16}{x}\right)$$

$$P = 2x + 32x^{-1}$$

الدراسة:

$$\frac{dP}{dx} = 2 - 32x^{-2} \qquad \left(\text{نجعل } \frac{dP}{dx} = 0\right)$$

$$2 - 32x^{-2} = 0 \qquad (\div 2)$$

$$1 - 16x^{-2} = 0 \qquad (\text{نضرب المعادلة ب } x^2)$$

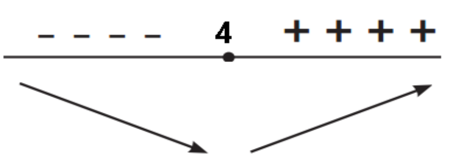
$$\implies x^2 - 16 = 0 \implies \boxed{x = 4\ cm}\ ,\quad \boxed{y = 4\ \ cm}$$

أقل محيط ممكن :

$$P = 2x + 2y = 2(4) + 2(4) = 16\ cm$$

الأختبار: للأطلاع

اشارة $f'(x)$



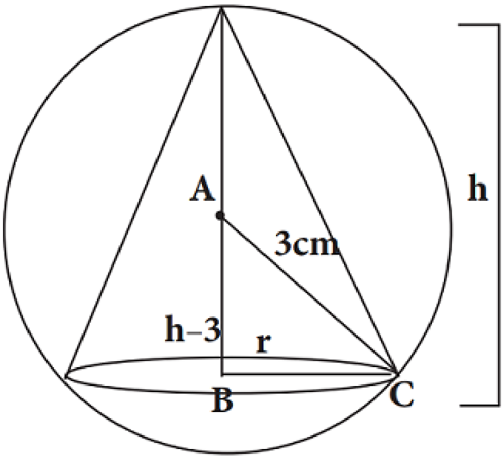
س6 / جد حجم أكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها (3 cm)

الحل/

الفرضية : نفرض نصف قطر قاعدة المخروط = r ونفرض أرتفاع المخروط = h ونفرض الحجم = V

الدالة: هي قانون حجم المخروط

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h \qquad \text{(معادلة ①)}$$



العلاقة: فيثاغورس (للمثلث القائم الزاوية ABC)

$$r^2 + (h-3)^2 = (3)^2$$

$$r^2 + h^2 - 6h + 9 = 9 \quad \Rightarrow r^2 = 6h - h^2 \qquad \text{(معادلة ②)}$$

نعوض معادلة ② في معادلة ①

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(6h - h^2)h = \frac{\pi}{3}(6h^2 - h^3)$$

الدراسة:

$$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{3}(12h - 3h^2) \qquad \left(\frac{dV}{dh} = 0 \text{ نجعل}\right)$$

$$\frac{\pi}{3}(12h - 3h^2) = 0 \qquad (\div \ 3)$$

$$4\pi h - \pi h^2 = 0 \qquad (\div \pi)$$

$$4h - h^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad h(4-h) = 0$$

$either \ h = 0$ (يهمل)

$or \ \boxed{h = 4\ cm}$ الأرتفاع

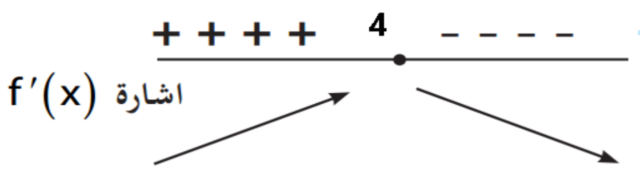
$\therefore r^2 = 6h - h^2 = 6(4) - (16) = 8$

$\Rightarrow \boxed{r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}}$ نصف القطر

أكبر حجم للمخروط :

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi(2\sqrt{2})^2(4) = \frac{32\pi}{3} \quad cm^3$$

الأختبار : للأطلاع



س7 / جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (6,8) والذي يصنع مع المحورين في الربع الأول أصغر مثلث

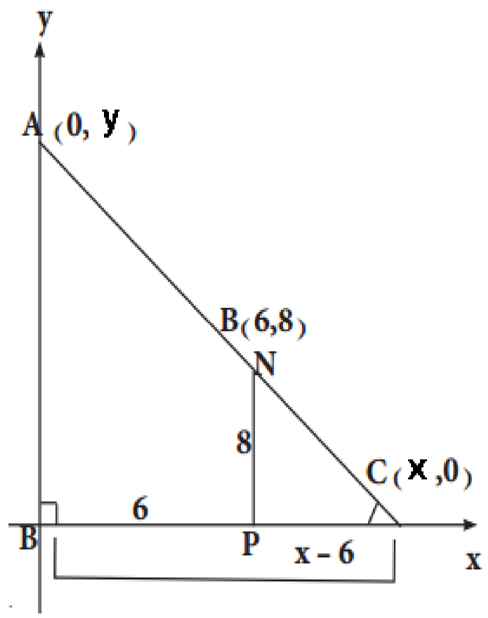
الحل/

الفرضية : نفرض $(x,0)$ نقطة تقاطع المستقيم مع المحور x

نفرض أبعاد المثلث = x , y ونفرض مساحة المثلث = A

الدالة: هي قانون مساحة المثلث

$$A = \frac{1}{2}\,x.y \qquad \text{(معادلة ①)}$$



العلاقة: قانون الميل (ميل $\overline{AC}$ = ميل $\overline{BC}$)

النقطة $B(6,8)$ تنتمي للمستقيم $\overline{AC}$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \frac{y-8}{0-6} = \frac{8-0}{6-x}$$

$$\Rightarrow (y-8)(6-x) = -48$$
$$\Rightarrow 6y - xy - 48 + 8x = -48$$
$$\Rightarrow 6y - xy + 8x = 0$$
$$\Rightarrow y(6-x) = -8x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-8x}{6-x} \qquad \text{(معادلة ②)}$$

نعوض معادلة ② في معادلة ①

$$A = \frac{1}{2}\,x.y = \frac{1}{2}\,x\left(\frac{-8x}{6-x}\right) = \frac{-4x^2}{6-x} \qquad \text{(معادلة ③)}$$

الدراسة:

$$\frac{dA}{dx} = \frac{(6-x)(-8x) - (-4x^2)(-1)}{(6-x)^2} = \frac{-48x + 8x^2 - 4x^2}{(6-x)^2}$$

$$\frac{dA}{dx} = \frac{-48x + 4x^2}{(6-x)^2} \qquad \left(\text{نجعل } \frac{dA}{dx} = 0\right)$$

$$\frac{4x^2 - 48x}{(6-x)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x^2 - 48x = 0 \qquad (\text{نقسم على } 4)$$

$$\Rightarrow x^2 - 12x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x-12) = 0$$

$either\ \ x = 0$ (يهمل)

$or\ \ \boxed{x = 12}$

∴ $(12,0)$ نقطة تقاطع المستقيم مع المحور x (المحور السيني)

$$m(\overline{BC}) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-0}{6-12} = \frac{8}{-6} \Rightarrow \boxed{m = \frac{-4}{3}}$$

معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (6,8) الذي ميله $\left(\frac{-4}{3}\right)$ هي :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$
$$y - 8 = \left(\frac{-4}{3}\right)(x-6) \overset{(\times 3)}{\Longrightarrow} 3y - 24 = -4x + 24$$
$$4x + 3y - 48 = 0$$

س8 / جد بعدي أكبر مستطيل يوضع داخل المنطقة المحددة بالدالة $f(x) = 12 - x^2$ ومحور السينات ، رأسان من رؤوسه على المنحني والرأسان الأخران على محور السينات ، ثم جد محيطه .

وزاري 2012 / د2

الحل/

الفرضية : نفرض طول المستطيل = $2x$ 　 نفرض عرض المستطيل = y 　 ونفرض مساحة المستطيل = A

الدالة: هي قانون مساحة المستطيل

$A = 2x.y$ 　 (معادلة①)

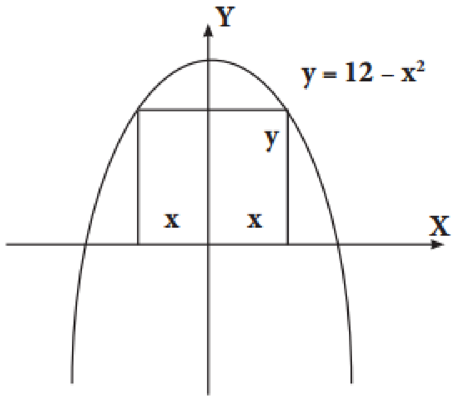
العلاقة: المعادلة $(y = 12 - x^2)$

$y = 12 - x^2$ 　 (معادلة②)

نعوض معادلة ② في معادلة ①

$\therefore A = 2x.y \quad \Rightarrow A = 2x(12 - x^2)$

$A = 24x - 2x^3$



الدراسة:

$\frac{dA}{dx} = 24 - 6x^2$ 　 (نجعل $\frac{dA}{dx} = 0$)

$24 - 6x^2 = 0 \quad \Rightarrow 4 - x^2 = 0$

$\Rightarrow x = 2\ cm \quad \Rightarrow \quad 2x = 4\ cm$ الطول

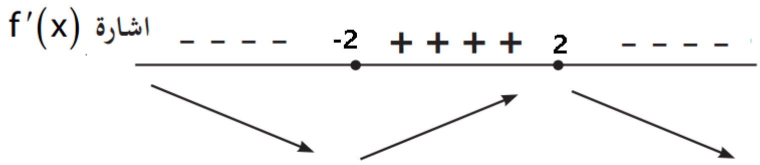
$\Rightarrow y = 12 - x^2 = 12 - 4 \quad \Rightarrow \quad y = 8\ cm$ العرض

أكبر محيط للمستطيل :

$p = 2(2x + y)$

$p = 4x + 2y = 4(2) + 2(8) = 8 + 16 = 24\ cm$

الأختبار: (للأطلاع)





س9 / جد مســــاحة أكبر أسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم أرتفاعــه $(8\ cm)$ وطول قطر قاعدته $(12\ cm)$

الحل/

الفرضية : نفرض نصف قطر قاعدة الأسطوانة =R ونفرض أرتفاع الأسطوانة =h ونفرض حجم المخروط=V

الدالة: هي قانون حجم الاسطوانة

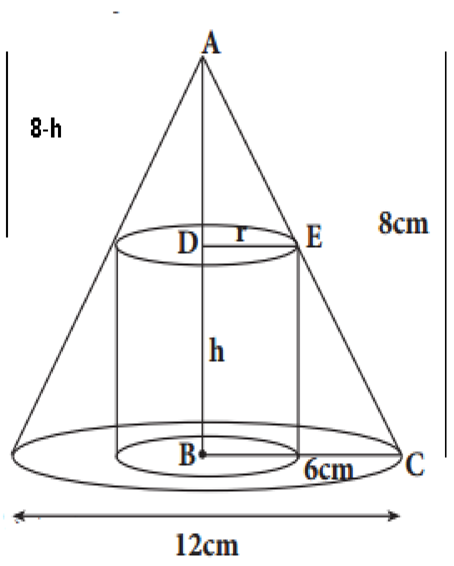
$$V = \pi R^2 h \quad (\text{معادلة } ①)$$

العلاقة: تشابه مثلثات (ADE , ABC)

$$\frac{8}{8-h} = \frac{6}{R} \qquad (\text{نقسم الطرفين على } \tfrac{1}{2})$$

$$\therefore 4R = 24 - 3h \qquad \Rightarrow h = \frac{24-4R}{3} \quad (\text{معادلة } ②)$$

نعوض معادلة ② في معادلة ①



$$V = \pi R^2 h = \pi R^2\left(\frac{24-4R}{3}\right) = \frac{\pi}{3}(24R^2 - 4R^3)$$

الدراسة:

$$\frac{dV}{dR} = \frac{\pi}{3}(48R - 12R^2) \qquad \left(\text{نجعل } \frac{dV}{dR} = 0\right)$$

$$\frac{\pi}{3}(48R - 12R^2) = 0 \qquad \Rightarrow 16\pi R - 4\pi R^2 = 0 \qquad (\div 4\pi)$$

$$\Rightarrow 4R - R^2 = 0 \qquad \Rightarrow R(4-R) = 0$$

$$either \quad R = 0 \qquad (\text{يهمل})$$

$$or \quad \boxed{R = 4\ cm} \quad \Rightarrow \boxed{h = \frac{8}{3}\ cm}$$

أكبر مساحة للأسطوانة (للأطلاع) :

$$A = (\text{محيط القاعدة} \times \text{الأرتفاع}) + \text{مساحة القاعدتين}$$

$$A = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi(4)\left(\frac{8}{3}\right) + 2\pi(4)^2 = \frac{64\pi}{3} + 32\pi$$

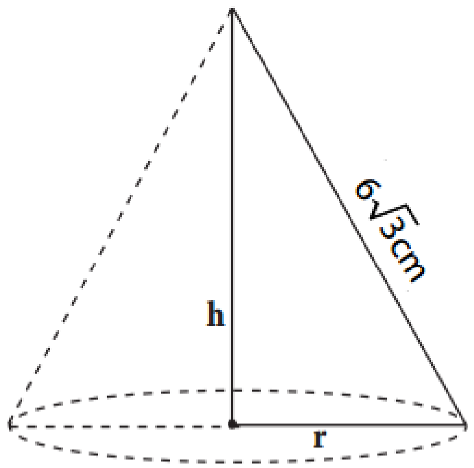
$$A = \frac{64\pi + 96\pi}{3} = \frac{160\pi}{3} \quad CM^2$$

س10 / جد حجم أكبر مخروط دائري ناتج من دوران مثلث قائم الزاوية طول وتره $6\sqrt{3}\ cm$ دورة كاملة حول أحد ضلعيه القائمين

وزاري 2014 / د1 	وزاري 2011 / د1

الحل/

الفرضية : نفرض نصف قطر قاعدة المخروط =R 	ونفرض أرتفاع المخروط =h 	ونفرض حجم المخروط =V



الدالة: هي قانون حجم المخروط

$$V = \frac{\pi}{3}R^2h \quad (\text{معادلة} ①)$$

العلاقة: فيثاغورس على المثلث القائم الزاوية

$$R^2 + h^2 = (6\sqrt{3})^2$$

$$R^2 = 108 - h^2 \quad (\text{معادلة} ②)$$

نعوض معادلة ② في معادلة ①

$$V = \frac{\pi}{3}R^2h = \frac{\pi}{3}(108 - h^2)h = \frac{\pi}{3}(108h - h^3)$$

الدراسة:

$$\frac{dV}{dh} = \frac{\pi}{3}(108 - 3h^2) \quad \left(\text{نجعل } \frac{dV}{dh} = 0\right)$$

$$\frac{\pi}{3}(108 - 3h^2) = 0 \quad \Rightarrow 36\pi - \pi h^2 = 0 \quad (\div \pi)$$

$$\Rightarrow 36 - h^2 = 0$$

$$either \quad h = -6 \quad (\text{يهمل})$$

$$or \quad \boxed{h = 6\ cm}$$

$$\Rightarrow R^2 = 108 - h^2 = 108 - 36 = 72$$

$$\boxed{R = \sqrt{72}\ cm}$$

أكبر حجم للمخروط :

$$V = \frac{\pi}{3}R^2h = \frac{\pi}{3}(\sqrt{72})^2(6) = \frac{(72)(6)\pi}{3} = 144\pi\ cm^3$$

س11 / علبة أسطوانية الشكل مفتوحة من الأعلى سعتها $(125\,\pi\, cm^3)$ جد أبعادها عندما تكون مســـاحة المعدن المستخدم في صناعتها أقل ما يمكن .

الحل/

الفرضية : نفرض نصف قطر الاسطوانة =R نفرض أرتفاع الأسطوانة =h ونفرض المساحة الكلية بدون غطاء =A

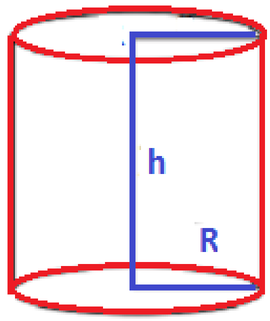
الدالة: هي قانون المساحة $A =$ المساحةالجانبية + مساحة قاعدة واحدة

$$A = \pi R^2 + 2\pi R h \qquad (\text{معادلة} ①)$$

العلاقة: قانون حجم الأسطوانة

$$v = \pi R^2 h \quad \Longrightarrow \quad 125\,\pi = \pi R^2 h$$

$$h = \frac{125}{R^2} \qquad (\text{معادلة} ②)$$



نعوض معادلة ② في معادلة ①

$$A = \pi R^2 + 2\pi R h = \pi R^2 + 2\pi R\left(\frac{125}{R^2}\right)$$

$$A = \pi R^2 + 250\pi\, R^{-1}$$

الدراسة:

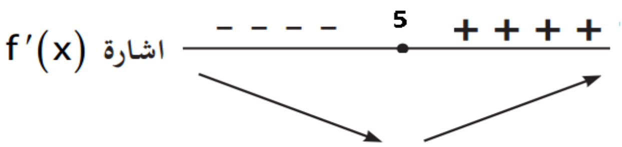
$$\frac{dA}{dR} = 2\pi R - 250\pi R^{-2} = 2\pi R - \frac{250\pi}{R^2} \qquad \left(\text{نجعل } \frac{dA}{dR} = 0\right)$$

$$2\pi R - \frac{250\pi}{R^2} = 0 \quad \xrightarrow{(\div 2\pi)} \quad R - \frac{125}{R^2} = 0 \qquad (\times\ R^2\ )$$

$$\Longrightarrow\ (R^3 - 125) = 0$$

$$\Longrightarrow\ \boxed{R = 5\ cm} \quad \boxed{h = \frac{125}{R^2} = \frac{125}{25} = 5\ \ cm}$$

الأختبار: (للأطلاع)



س12 / خزان على شكل متوازي سطوح مستطيلة طول قاعدته ضعف عرضها فأذا كانت مساحة المعدن المستعمل في صناعته $108\ m^2$ جد أبعاد الخزان لكي يكون حجمه أكبر ما يمكن علما ان الخزان ذو غطاء كامل

الحل/

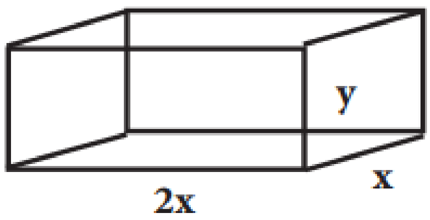
الفرضية : نفرض عرض القاعدة =x   ونفرض طول القاعدة = 2x   ونفرض الارتفاع =y   ونفرض حجم الخزان= V

الدالة: هي قانون حجم الخزان

$$V = (2x)(x)(y) = 2x^2\, y \qquad \text{(معادلة ①)}$$

العلاقة: مساحة المعدن

مساحة القاعدتين + المساحة الجانبية = مساحة المعدن



$$108 = 2(2x + x)y + 4x^2$$
$$108 = 2(3x)y + 4x^2 \qquad (\div 2)$$
$$54 = 3xy + 2x^2$$
$$3xy = 54 - 2x^2 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{54 - 2x^2}{3x} \qquad \text{(معادلة ②)}$$

نعوض معادلة ② في معادلة ①

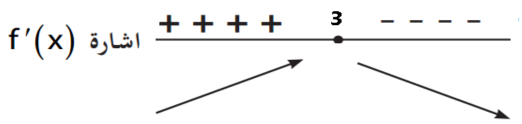
$$V = 2x^2y = 2x^2\left(\frac{54 - 2x^2}{3x}\right) = \frac{2}{3}(54x - 2x^3)$$

الدراسة:

$$\frac{dV}{dx} = \frac{2}{3}(54 - 6x^2) \qquad \left(\text{نجعل } \frac{dV}{dx} = 0\right)$$

$$\frac{2}{3}(54 - 6x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 54 - 6x^2 = 0 \quad (\div 6)$$
$$\Rightarrow 9 - x^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x = 3\ m \quad \Rightarrow \quad 2x = 6\ m$$ طول القاعدة
$$y = \frac{54 - 2x^2}{3x} = \frac{54 - 18}{9} = \frac{36}{9}$$
$$y = 4\ m$$ عرض القاعدة

الأختبار: (للأطلاع)



ملاحظة للتذكير: (قوانين المساحة لمتوازي السطوح المستطيلة)

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين

أمثلة أضافية محلولة

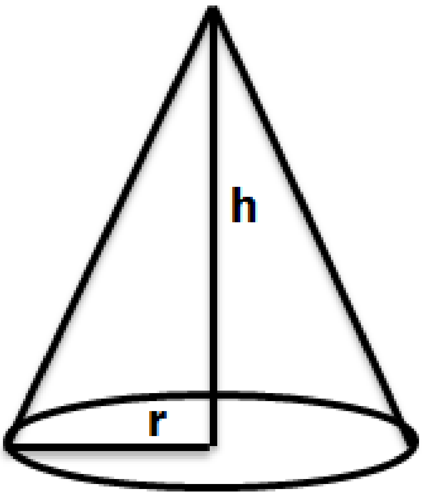
مثال/ مخروط دائري قائم مجموع نصف قطر قاعدته وأرتفاعه (12 cm) جد أكبر حجم لهذا المخروط .

الحل/

الفرضية : نفرض نصف قطر المخروط = R ونفرض أرتفاع المخروط = h ونفرض حجم المخروط = V

الدالة: هي قانون حجم المخروط

$$V = \frac{\pi}{3}R^2h \qquad (\text{معادلة}①)$$



العلاقة:

$$\because R + h = 12 \Rightarrow h = 12 - R \qquad (\text{معادلة}②)$$

نعوض معادلة ② في معادلة ①

$$\therefore V = \frac{\pi}{3}R^2h = \frac{\pi}{3}R^2(12 - R)$$

$$V = \frac{\pi}{3}(12R^2 - R^3) \qquad (\text{معادلة}③)$$

الدراسة:

$$\frac{dV}{dR} = \frac{\pi}{3}(24R - 3R^2) \qquad \left(\text{نجعل } \frac{dV}{dR} = 0\right)$$

$$\frac{\pi}{3}(24R - 3R^2) = 0 \Rightarrow \pi(8R - R^2) = 0$$

$$\Rightarrow 8R - R^2 = 0 \Rightarrow R(8 - R) = 0$$

$$either \quad R = 0 \Rightarrow h = 12 \qquad (\text{لايمكن})$$

$$or \quad \boxed{R = 8} \Rightarrow \boxed{h = 4}$$

أكبر حجم للمخروط :

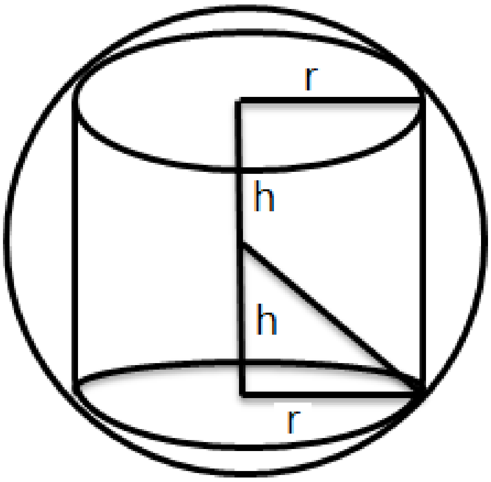
$$V = \frac{\pi}{3}R^2h = \frac{\pi}{3}(8)^2(4) = \frac{256\pi}{3} \quad cm^3$$

مثال / اسطوانة دائرية قائمة موضوعة داخل كرة نصف قطرها $9cm$ أحسب أرتفاع الاسطوانة لكي يكون حجمها أكبر ما يمكن .

الحل/

الفرضية : نفرض نصف قطر قاعدة الاسطوانة = R   ونفرض أرتفاع الاسطوانة = 2 h

الدالة: هي قانون حجم الاسطوانة



$$V = \pi R^2(2h)$$ (معادلة ①)

العلاقة: فيثاغورس

$$\because R^2 + h^2 = 9^2 \Longrightarrow R^2 = 81 - h^2$$ (معادلة ②)

نعوض معادلة ② في معادلة ①

$$\therefore V = 2\pi R^2 h = 2\pi(81 - h^2)h$$

$$V = 2\pi(81h - h^3)$$ (معادلة ③)

الدراسة:

$$\frac{dV}{dh} = 2\pi(81 - 3h^2) \qquad \left(\text{نجعل } \frac{dV}{dh} = 0\right)$$

$$2\pi(81 - 3h^2) = 0 \overset{(\div 2\pi)}{\Longrightarrow} 81 - 3h^2 = 0$$

$$\Longrightarrow 81 = 3h^2 \overset{(\div 3)}{\Longrightarrow} h^2 = 27$$

$$either \quad h = -3\sqrt{3} \quad (\text{يهمل})$$

$$or \quad \boxed{h = 3\sqrt{3}} \Longrightarrow \boxed{R = 3\sqrt{6}}$$

أكبر ارتفاع للاسطوانة :

$$\text{الأرتفاع} = 2h = 2(3\sqrt{3}) = 6\sqrt{3} \quad cm$$

مثال / عددان الفرق بينهما (12) جد هذان العددان بحيث يكون حاصل ضربهما أكبر ما يمكن .

الفرضية : نفرض العدد الأول = x   والعدد الثاني = $x - 12$

وحاصل ضربهما =y

الدالة: هي علاقة عددية

$$y = x(x - 12) = x^2 - 12x$$

الدراسة:

$$\frac{dy}{dx} = 2x - 12 \qquad (\text{نجعل } f'(x) = 0)$$

$$2x - 12 = 0 \qquad \Longrightarrow x - 6 = 0$$

$$\Longrightarrow \quad x = 6$$

العدد الأول (6) والعدد الثاني (−6)

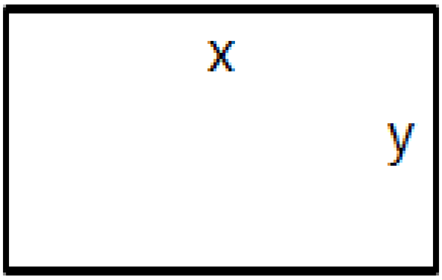
مثال/ جد بعدي مستطيل مساحته $25\ cm^2$ بحيث يكون محيطه أقل ما يمكن

الحل/

الفرضية : نفرض بعدي المستطيل هما x, y ونفرض محيطه =m

الدالة: هي قانون محيط المستطيل

$$m = 2x + 2y \quad (\text{معادلة}①)$$



العلاقة: مساحة المستطيل

$$xy = 25 \quad \Rightarrow y = \frac{25}{x} \quad (\text{معادلة}②)$$

نعوض معادلة ② في معادلة ①

$$\therefore m = 2x + 2y$$

$$m = 2x + 2\left(\frac{25}{x}\right) = 2x + 50x^{-1} \quad (\text{معادلة}③)$$

الدراسة:

$$\frac{dm}{dx} = 2 - 50x^{-2} \quad \left(\text{نجعل } \frac{dm}{dx} = 0\right)$$

$$2 - 50x^{-2} = 0 \quad \Rightarrow 1 - 25x^{-2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 25 = 0 \qquad \Rightarrow x^2 = 25$$

$$either \quad x = -5 \quad \Rightarrow y = -5 \quad (\text{يهمل})$$

$$or \quad \boxed{x = 5} \quad \Rightarrow \boxed{y = 5}$$

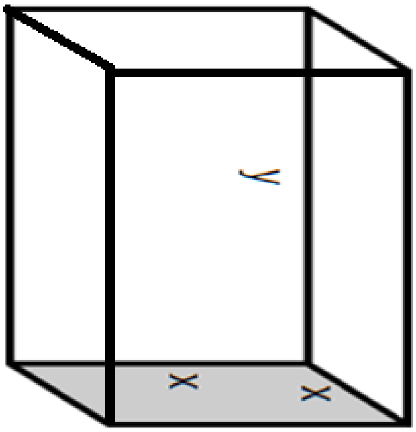
مثال/ حوض على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة الشكل ، فأذا كان مجموع محيط قاعدته وأرتفاعه 24 m، جد ابعاد الحوض لكي تكون سعته (حجمه) أكبر ما يمكن.

الحل/

الفرضية : نفرض ابعاد الحوض x , x, y ونفرض حجمه =V

الدالة: هي قانون حجم الحوض

$$V = x.x.h = x^2.h \quad (\text{معادلة}①)$$



العلاقة : (محيط القاعدة المربعة + الارتفاع) للحوض

$$4x + h = 24 \quad \Rightarrow h = 24 - 4x \quad (\text{معادلة}②)$$

نعوض معادلة ② في معادلة ①

$$\therefore V = x^2.h$$

$$V = x^2.(24 - 4x) = 24x^2 - 4x^3$$

الدراسة:

$$\frac{dV}{dx} = 48x - 12x^2 \quad \left(\text{نجعل } \frac{dV}{dx} = 0\right)$$

$$48x - 12x^2 = 0 \quad \Rightarrow 4x - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x(4 - x) = 0$$

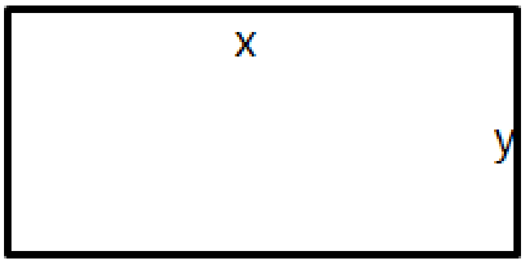
$$either \quad x = 0 \quad (\text{يهمل})$$

$$or \quad x = 4 \quad \Rightarrow \quad h = 8$$

مثال / جد بعدي أكبر مستطيل محيطه $100\ cm$

الحل/

الفرضية : نفرض بعدي المستطيل هما x, y ونفرض مساحته A=



الدالة: هي قانون مساحة المستطيل

$$A = x.y \qquad \text{(معادلة ①)}$$

العلاقة: محيط المستطيل

$$2x + 2y = 100$$

$$\therefore x + y = 50 \Rightarrow y = 50 - x \qquad \text{(معادلة ②)}$$

نعوض معادلة ② في معادلة ①

$$A = x.y = x(50 - x) = 50x - x^2$$

الدراسة:

$$\frac{dA}{dx} = 50 - 2x \qquad \left(\text{نجعل } \frac{dA}{dx} = 0\right)$$

$$50 - 2x = 0 \Rightarrow 25 - x = 0$$

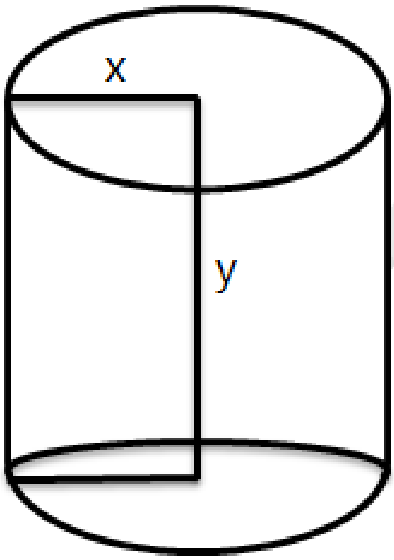
$$\Rightarrow \boxed{x = 25} \Rightarrow \boxed{y = 25}$$

مثال / مستطيل محيطه (30 cm) أدير حول أحد أضلاعه فكون أسطوانة دائرية قائمة ، جد بعدي هذا المستطيل لكي يكون حجم الأسطوانة المتكونة أكبر ما يمكن .

الحل/

الفرضية : نفرض نصف قطر قاعدة الاسطوانة = x ونفرض أرتفاع الاسطوانة = y ونفرض الحجم =V

الدالة: هي قانون حجم الاسطوانة



$$V = \pi x^2 y \qquad \text{(معادلة ①)}$$

العلاقة: محيط المستطيل

$$2x + 2y = 30 \Rightarrow x + y = 15 \Rightarrow y = 15 - x \qquad \text{(معادلة ②)}$$

نعوض معادلة ② في معادلة ①

$$\therefore V = \pi x^2 y = \pi x^2(15 - x)$$

$$V = \pi(15x^2 - x^3)$$

الدراسة:

$$\frac{dV}{dx} = \pi(30x - 3x^2) \qquad \left(\text{نجعل } \frac{dV}{dx} = 0\right)$$

$$\pi(30x - 3x^2) = 0 \Rightarrow 10x - x^2 = 0$$

$$\Rightarrow x(10 - x) = 0$$

$$either \quad x = 0 \qquad (\text{يهمل})$$

$$or \quad \boxed{x = 10} \Rightarrow \boxed{y = 5}$$

بعدي الأسطوانة هي (10 cm , 5 cm)

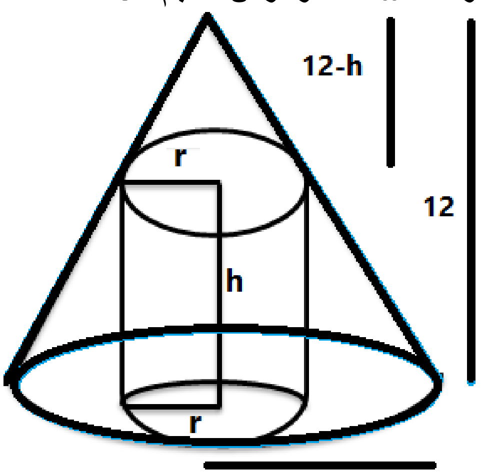
مثال / جد حجم أكبر أسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري قائم أرتفاعه (12 cm) ونصف قطر قاعدته (9 cm) بحيث أحد قاعدتي الأسطوانة والمخروط متماستان .

الحل/

الفرضية : نفرض نصف قطر قاعدة الاسطوانة =R   ونفرض أرتفاع الاسطوانة = h   ونفرض الحجم =V

الدالة: هي قانون حجم الاسطوانة

$$V = \pi R^2 h \qquad (\text{معادلة} ①)$$



العلاقة: تشابه مثلثات

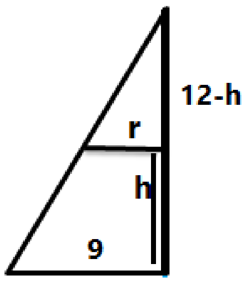
$$\frac{R}{9} = \frac{12-h}{12} \qquad (\div 3)$$

$$36 - 3h = 4R \quad \Rightarrow 36 - 4R = 3h$$

$$h = \frac{36-4R}{3} \qquad (\text{معادلة} ②)$$

نعوض معادلة ② في معادلة ①

$$V = \pi R^2 \left(\frac{36-4R}{3}\right) = \frac{\pi}{3}(36R^2 - 4R^3)$$



الدراسة:

$$\frac{dV}{dR} = \frac{\pi}{3}(72R - 12R^2) \qquad \left(\text{نجعل } \frac{dV}{dR} = 0\right)$$

$$\frac{\pi}{3}(72R - 12R^2) = 0 \quad \Rightarrow 72R - 12R^2 = 0 \qquad (\div 12)$$

$$\Rightarrow \ 6R - R^2 \Rightarrow \ R(6-R) = 0$$

$$either \ \ R = 0 \qquad (\text{يهمل})$$

$$or \ \ \boxed{R = 6} \ \Rightarrow \boxed{h = 4}$$

أكبر حجم للاسطوانة :

$$V = \pi R^2 h = \pi(6)^2(4) = 144\pi$$

****

واجبات

① جد مساحة أكبر مستطيل رأسان منه يقعان على المنحني $y = x^2 - 8$ والرأسان الأخران يقعان على المستقيم $y = -4$

② جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها $(2\ cm)$

③أوجد النقط التي تنتمي لمنحني الدالة $y = 9 - \frac{1}{2}x^2$ بحيث تكون أقرب ما يمكن من نقطة الأصل

④ جد حجم أكبر أسطوانة دائرية قائمة يمكن وضعها داخل مخروط دائري أرتفاعه $(12\ cm)$ ونصف قطر قاعدته $(9\ cm)$

⑤ جد العدد الذي :

(a) زيادته على مربعه يكون أكبر ما يمكن

(b)عند أضافته الى مربعه يكون أصغر ما يمكن

(c)عند أضافته الى مقلوبه يكون الناتج أصغر ما يمكن

⑥ أذا كان $y + 4x = 24$ جد قيم كل من x , y التي تجعل yx^2 أكبر ما يمكن

حلول التمارين العامة الخاصة بالفصل الثالث

س6 / جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي : الفروع (c, d, e, f, g, h) مرتبطة بموضوع التكامل

$(a)\ \ x^3y^2 - 2y = 5x + 3$

$$x^3\left(2y\frac{dy}{dx}\right) + y^2(3x^2) - 2\frac{dy}{dx} = 5 \quad \Rightarrow \quad 2x^3y\frac{dy}{dx} - 2\frac{dy}{dx} = 5 - 3x^2y^2$$

$$2x^3y\frac{dy}{dx} - 2\frac{dy}{dx} = 5 - 3x^2y^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx}(2x^3y - 2) = 5 - 3x^2y^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5 - 3x^2y^2}{2x^3y - 2}$$

$(b)\ \ y = sin4x\,.\,tan2x$

$$\frac{dy}{dx} = sin4x\,.\,sec^2 2x(2) + tan2x\,.\,cos4x(4) = 2sin4x\,.\,sec^2 2x + 4tan2x\,.\,cos4x$$

س7 / أستخدم مبرهنة رول ثم مبرهنة القيمة المتوسطة لأيجاد قيم C للدالة

$f(x) = x^4 - 2x^2 \ \ , x \in [-2, 2]$

الحل / وزاري 2013/د2 وزاري 2013 / د3

① الدالة مستمرة في الفترة المغلقة $[-2, 2]$ لانها كثيرة الحدود

② الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-2, 2)$ لانها كثيرة الحدود

③ نوجد $f(-2), f(2)$

$$f(2) = (2)^4 - 2(2)^2 = 16 - 8 = 8$$

$$f(-2) = (-2)^4 - 2(-2)^2 = 16 - 8 = 8$$

$$\Rightarrow f(2) = f(-2)$$

أولا : الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول لذا نفرض $(x = c)$ ونفرض $\bar{f}(c) = 0$

$$f(x) = x^4 - 2x^2 \qquad \Rightarrow \bar{f}(x) = 4x^3 - 4x$$

$$\bar{f}(c) = 4c^3 - 4c \ \Rightarrow\ 4c^3 - 4c = 0 \ \xrightarrow{(\div 4)}\ c^3 - c = 0 \ \Rightarrow\ c(c^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \quad c = 0 \in (-2, 2) \quad , \quad c = 1 \in (-2, 2) \quad , \quad c = -1 \in (-2, 2)$$

ثانيا : الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة

∴ نبحث عن النقطة c التي تحقق المبرهنة

$\bar{f}(x) = 4x^3 - 4x \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(c) = 4c^3 - 4c$ (ميل المماس)

$\bar{f}(C) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{8 - 8}{4} = \frac{0}{4} = 0$ (ميل الوتر)

∵ مـــــيل المماســـاس = مـــــيل الوتـــــر

$4c^3 - 4c = 0 \quad \overset{(\div 4)}{\Longrightarrow} \quad c^3 - c = 0 \quad \Rightarrow \quad c(c^2 - 1) = 0$

$\Rightarrow \quad c = 0 \in (-2, 2) \quad , \quad c = 1 \in (-2, 2) \quad , \quad c = -1 \in (-2, 2)$

س8 / $f(x) = ax^2 - 4x + 5$ دالة تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة $[-1, b]$ فأذا كانت $c = 2$ تنتمي للفترة $(-1, b)$ فجد قيمة $a, b \in R$

الحل /

∵ الدالة f تحقق شروط مبرهنة رول .

$\therefore \ \bar{f}(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(2) = 0$

$\bar{f}(x) = 2ax - 4 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(2) = 4a - 4 \quad \Rightarrow \quad 4a - 4 = 0 \Rightarrow \quad 4a = 4 \quad \Rightarrow \boxed{a = 1}$

$f(a) = f(b) \quad \Rightarrow \quad f(-1) = f(b) \quad \Rightarrow \quad (-1)^2 - 4(-1) + 5 = b^2 - 4b + 5$

$b^2 - 4b + 5 = 10 \quad \Rightarrow \quad b^2 - 4b - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad (b - 5)(b + 1) = 0$

أما $\quad b - 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{b = 5}$

أو $\quad b + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = -1$ يهمل

س9 / متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة و أرتفاعه ثلاثة أمثال طول قاعدته ، جد الحجم التقريبي لـه عندما يكون طول قاعدته $(2.97\ cm)$

الحل /

نفرض طول القاعدة $= x$

∴ الأرتفاع $h = 3x$

$f(x) = V = x^2.h = x^2.3x = 3x^3 \quad \Rightarrow \quad f(x) = 3x^3$

$\bar{f}(x) = 9x^2$

نفرض $a = 3$ أقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه

نفرض $b = 2.97$ معطى

$h = b - a = 2.97 - 3 = -0.03$

$f(3) = 3(3)^3 = 3(27) = 81 \quad , \quad \bar{f}(3) = 9(3)^2 = 9(9) = 81$

$f(a + h) \cong f(a) + h.\bar{f}(a)$

$f\big(3 + (-0.03)\big) \cong f(3) + (-1).\bar{f}(3)$

$f(2.97) \cong 81 + (-0.03).(81) = 81 - 2.43 \quad \Rightarrow \quad f(2.97) \cong 78.57\ cm^3$

س10 / مخروط دائري قائم حجمه $(210\,\pi\, cm^3)$ جد القيمة التقريبية لنصف قطر قاعدته أذا كان أرتفاعه $(10\ cm)$ وزاري 2013 / د2

الحل /

$$V = \frac{1}{3}\pi\, r^2 h \quad \Rightarrow \quad 210\,\pi = \frac{1}{3}\pi\, r^2 (10) \quad \Rightarrow \quad r^2 = \frac{(210)(3)}{10} \quad \Rightarrow \quad r^2 = (21)(3)$$

$$\Rightarrow \quad r^2 = 63 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{63}$$

نفرض $a = 64$ أقرب رقم للعدد يسهل حسابه

نفرض $b = 63$

$$h = b - a = 63 - 64 = -1$$

$$f(x) = r = \sqrt{x} \quad \Rightarrow \quad f(a) = f(64) = \sqrt{64} = 8$$

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(a) = \bar{f}(64) = \frac{1}{2\sqrt{64}} = \frac{1}{(2)(8)} = \frac{1}{16} = 0.063$$

$$f(a+h) \cong f(a) + h.\bar{f}(a)$$

$$f\big(64 + (-1)\big) \cong f(64) + (-1).\bar{f}(64)$$

$$f(63) \cong 8 + (-1).(0.063) = 8 - 0.063 \qquad \Rightarrow \qquad f(63) \cong 7.937\ \ cm$$

س11 / أذا كانت $f(x) = \sqrt[5]{31x+1}$ جد بأستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة القيمة التقريبية الى $f(1.01)$ وزاري 2013 / د1

الحل /

نفرض $a = 1$ أقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه

نفرض $b = 1.01$ معطى

$$h = b - a = 1.01 - 1 = 0.01$$

$$f(x) = \sqrt[5]{31x+1} = (31x+1)^{\frac{1}{5}} \quad \Rightarrow \quad f(1) = (31+1)^{\frac{1}{5}} = (32)^{\frac{1}{5}} = \left(2^5\right)^{\frac{1}{5}} = 2$$

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{5}(31x+1)^{\frac{-4}{5}}\ (31) = \frac{31}{5(31+1)^{\frac{4}{5}}} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(1) = \frac{31}{5(32)^{\frac{4}{5}}} = \frac{31}{5(2^5)^{\frac{4}{5}}} = \frac{31}{5(2)^4} = \frac{31}{80} = 0.3875$$

$$f(a+h) \cong f(a) + h.\bar{f}(a)$$

$$f\big(1 + (0.01)\big) \cong f(1) + (0.01).\bar{f}(1)$$

$$f(1.01) \cong 2 + (0.01).(0.3875) = 2 + 0.003875 \qquad \Rightarrow \qquad f(1.01) \cong 2.003875$$

س12 / بأستخدام معلوماتك في التفاضل أرسم المنحني البياني للدالة $yx^2 = 1$

الحل/

$\because \quad yx^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{1}{x^2}$

- أوسع مجال للدالة $= R / \{0\}$
- التناظر / المنحني متناظر حول المحور الصادي لأن :

$\forall\, x \in R\, \exists(-x) \in R \;\Rightarrow\; f(-x) = f(x)$

$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2} = \frac{1}{x^2} = f(x)$

- المحاذيات /

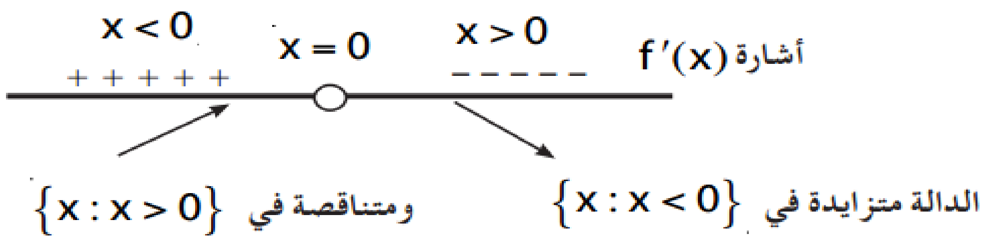
$x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 0}$ المستقيم المحاذي الشاقولي

$y = \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{y} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 0}$ المستقيم المحاذي الأفقي

- نقط التقاطع مع المحورين / لا يوجد تقاطع مع المحورين لأن $x \neq 0 \;,\; y \neq 0$
- دراسة $f'(x)$ وما ينتج عنها

$f(x) = \frac{1}{x^2} = x^{-2} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$ $\quad (f'(x) \neq 0)$

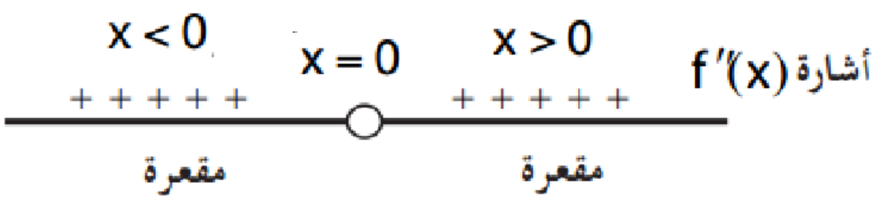
لا توجد نهايات



- دراسة $f''(x)$ وما ينتج عنها

$f''(x) = 6\, x^{-4} = \frac{6}{x^4}$ $\quad (f''(x) \neq 0)$

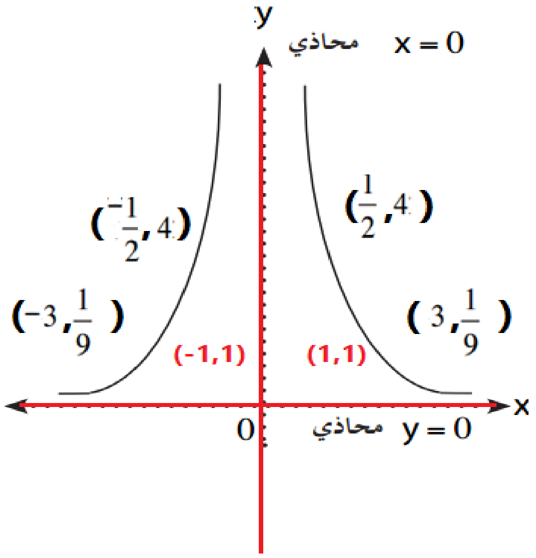
لا توجد نقطة انقلاب



الدالة مقعرة في الفترتين $\{x: x > 0\} \;,\; \{x: x < 0\}$

- تحديد النقط الخاصة بالرسم ومن ثم رسمها

x	y
$\pm\frac{1}{2}$	4
± 1	1
± 2	$\frac{1}{4}$
± 3	$\frac{1}{9}$



****

حلول الأسئلة الوزارية الخاصة بالفصل الثالث

سؤال وزاري 96/د1

جد نقطة على الدائرة التي معادلتها $x^2 + y^2 - 4x = 4$ يكون عندها معدل ازدياد y مساوياً لمعدل ازدياد x.

الحل:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

$x^2 + y^2 - 4x = 4 \dots\dots\dots (1)$

$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} - 4\frac{dx}{dt} = 0 \Rightarrow 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dx}{dy} - 4\frac{dx}{dt} = 0]$ نقسم على $\left(2\frac{dx}{dt}\right)$

$\therefore x + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 - x \dots\dots\dots\dots\dots (2)$

$x^2 + (2-x)^2 - 4x = 4 \Rightarrow x^2 + 4 - 4x + x^2 - 4x = 4$

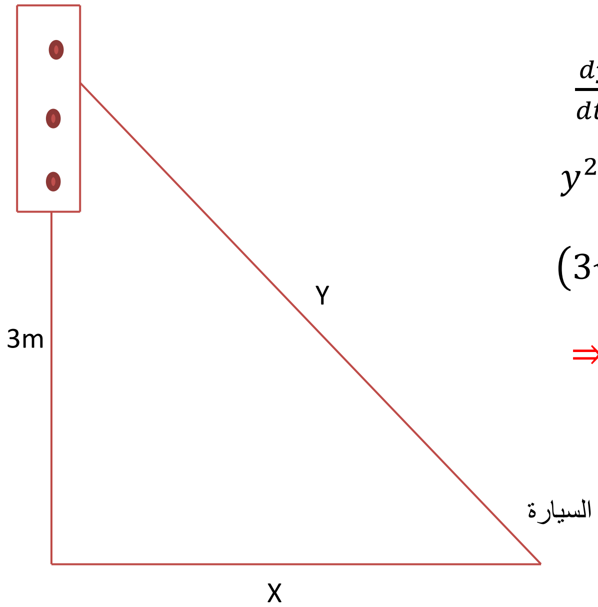
$2x^2 - 8x = 0 \xrightarrow{\text{نقسم على (2)}} x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x-4) = 0$

$either\ x = 0 \Rightarrow y = 2 - 0 \Rightarrow y = 2$ ∴ النقطة $(0,2)$

$or\ x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow y = 2 - 4 \Rightarrow y = -2$ ∴ النقطة $(4,-2)$

سؤال وزاري 97/د1

سيارة تسير بسرعة (30m/s) اجتازت إشارة مرورية حمراء ارتفاعها (3m) عن سطح الأرض وبعد أن ابتعدت عنها مسافة $(3\sqrt{3}\ m)$ اصطدمت بسيارة أخرى نتيجة عدم الالتزام بقوانين المرور. جد سرعة تغير المسافة بين السيارة والاشارة الضوئية.



الحل: $\frac{dy}{dt}\ ?\ ,\ \frac{dx}{dt}\ 30m/s\quad ,y = 3\sqrt{3}m$

$y^2 = x^2 + 9$ فيثاغورس

$(3\sqrt{3})^2 = x^2 + 9 \Rightarrow 27 = x^2 + 9$

$\Rightarrow x^2 = 18 \Rightarrow \quad x = 3\sqrt{2}$

$\not{2}y\,\frac{dy}{dt} = \not{2}x.\frac{dx}{dt}$

$\not{3}\sqrt{3}\,\frac{dy}{dt} = \not{3}\sqrt{2}\,(30) \Rightarrow \therefore\ \frac{dy}{dt} = \frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{m}{s}$

سؤال وزاري 98/د1

إذا كانت (1,6) تمثل نهاية صغرى محلية للدالة $f(x) = ax^2 + (x-b)^2$ جد قيمة كل من b ، a الحقيقيتين الموجبتين.

الحل: $\because$ $(1,6) \in$ الدالة

$\therefore$ تحقق معادلتها

$6 = a(1)^2 + (1-b)^2$

$6 = a + 1 - 2b + b^2 \ldots\ldots\ldots (1)$

$\acute{f}(x) = 2ax + 2(x-b) \Rightarrow 2a(1) + 2(1-b) = 0 \Rightarrow 2a + 2 - 2b = 0] \div 2$

$a + 1 - b = 0 \Rightarrow a = b - 1 \ldots\ldots\ldots (2)$

$\therefore 6 = b - 1 + 1 - 2b + b^2 \Rightarrow b^2 - b - 6 = 0 \Rightarrow (b-3)(b+2) = 0$

$b - 3 = 0 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow a = 3 - 1 \Rightarrow a = 2$

$or\ \ b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2$ يهمل

سؤال وزاري 98/د1

حاوية على هيئة اسطوانة دائرية قائمة حجمها $(216\ \pi cm^3)$ جد ابعادها إذا كانت مساحة المعدن المستخدم في صناعتها أقل ما يمكن. مع العلم أن الحاوية مفتوحة من الأعلى.

الحل:

$A = 2\pi rh + \pi r^2$ ……….. القانون الرئيسي

$V = \pi r^2 h \Rightarrow 216\pi = \pi r^2 h \Rightarrow h = \frac{216}{r^2}$ ……… العلاقة

$\therefore A = 2\pi r\left(\frac{216}{r^2}\right) + \pi r^2 = 432\pi r^{-1} + \pi r^2$

$\bar{A} = -432\pi r^{-2} + 2\pi r \Rightarrow \frac{-432\pi}{r^2} + 2\pi r = 0 \xrightarrow{(\div 2\pi)} \frac{-216}{r^2} + r = 0 \quad \times (r^2)$

$-216 + r^3 = 0 \Rightarrow r^3 = 216 \Rightarrow r = 6\ cm \qquad \therefore h = \frac{216}{36} = 6\ cm$

سؤال وزاري 98/د1

إذا كان المنحنى $f(x) = x^3 - bx^2 + cx$ يمر بالنقطة (-2,2) وكانت للدالة نقطة انقلاب عند x=1 جد قيمتي $b, c \in R$ ثم جد نقطة النهاية العظمى المحلية للدالة f.

الحل: $\because$ $(-2,-2) \in$ الدالة

$\therefore$ تحقق معادلتها

$f(x) = x^3 - bx^2 + cx$

$-2 = (-2)^3 - b(-2)^2 + c(-2) \Rightarrow -2 = -8 - 4b - 2c \quad (\div 2)$

$-1 = -4 - 2b - c \Rightarrow -2b - c = 3$ ……….. (1)

$\bar{f}(x) = 3x^2 - 2bx + c$

$\bar{\bar{f}}(x) = 6x - 2b \Rightarrow 6(1) - 2b = 0 \Rightarrow 2b = 6 \Rightarrow b = 3$

$-2(3) - c = 3 \Rightarrow -6 - c = 3 \Rightarrow c = -9$

$\bar{f}(x) = 3x^2 - 2(3)x + (-9) \Rightarrow \acute{f}(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$3x^2 - 6x - 9 = 0 \xrightarrow{(\div 3)} x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0$

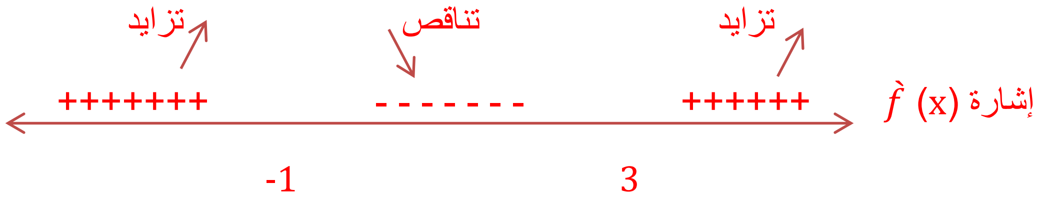
$x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3 \quad or \quad x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1)$

$f(-1) = -1 - 3 + 9 = 5$

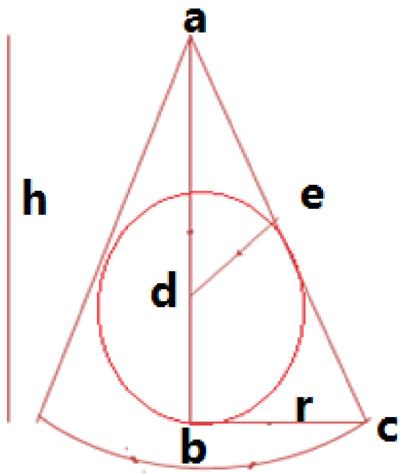
$\therefore$ $(-1,5)$ نهاية عظمى محلية



سؤال وزاري 98/د 2

جد أبعاد مخروط دائري قائم حجمه أقل ما يمكن ويحيط بكرة نصف قطرها (3cm).

الحل: نفرض أبعاد المخروط r ,h

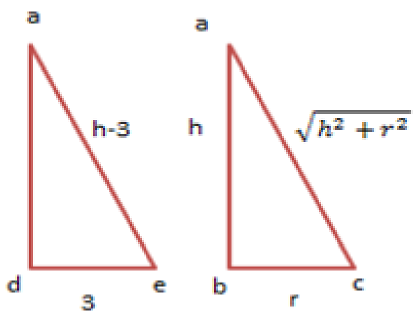


$V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$ ……………………… القانون الرئيسي

في المثلث abc القائم الزاوية في b:

$(ac)^2=h^2+r^2 \Rightarrow ac=\sqrt{h^2+r^2}$

من تشابه المثلثين abc ، ade نحصل على:



$\frac{\sqrt{h^2+r^2}}{h-3}=\frac{r}{3} \Rightarrow 3\sqrt{h^2+r^2}=r(h-3)$ بالتربيع

$\Rightarrow 9(h^2+r^2)=r^2(h-3)^2$

$\Rightarrow 9h^2+9r^2=r^2(h-3)^2 \Rightarrow 9h^2=r^2(h-3)^2-9r^2$

$\Rightarrow 9h^2=r^2[(h-3)^2-9]$

$\therefore r^2=\frac{9h^2}{(h-3)^2-9}$ ……………..العلاقة

$V=\frac{1}{3}\pi.\frac{9h^2}{(h-3)^2-9}.h=\frac{3\pi h^3}{(h-3)^2-9}=\frac{3\pi h^3}{h^2-6h+9-9}=\frac{3\pi h^3}{h^2-6h}$

$\therefore \acute{V}=\frac{(h^2-6h).9\pi h^2-3\pi h^3.(2h-6)}{(h^2-6h)^2}=\frac{3\pi h^2[3(h^2-6h)-h(2h-6)]}{(h^2-6h)^2}$

$\acute{V}=\frac{3\pi h^2[3h^2-18h-2h^2+6h]}{(h^2-6h)^2}=\frac{3\pi h^2(h^2-12h)}{(h^2-6h)^2}=\frac{3\pi h^3(h-2)}{(h^2-6h)^2}$

نضع $\acute{V}=0$

$3\pi h^3(h-12)=0 \xrightarrow{(\div 3\pi)} h^3(h-12)=0$

$either\ h^3=0 \Rightarrow h=0$ يهمل

$or\ h-12=0 \Rightarrow h=12\ cm \quad , \quad r^2=\frac{9(12)^2}{(12-3)^2-9}=\frac{9(144)}{72}=18$

$\therefore \boxed{r=3\sqrt{2}}\ cm$

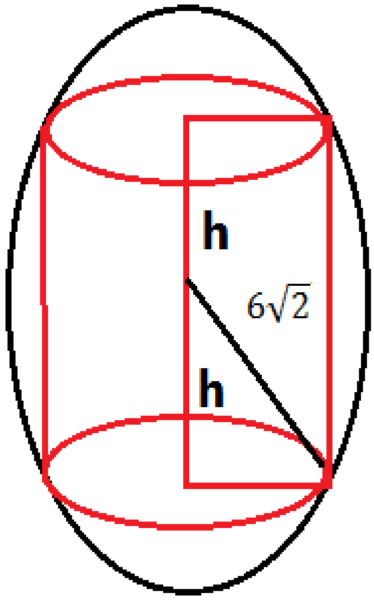
سؤال وزاري 99/د1

جد إبعاد اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية أكبر ما يمكن موضوعة داخل كرة نصف قطرها $6\sqrt{2}\ cm$.

الحل: لتكن A المساحة الجانبية $A = 4\pi rh$ ... ... القانون الرئيسي

نفرض أبعاد الاسطوانة $r, 2h$

$(6\sqrt{2})^2 = r^2 + h^2$ فيثاغورس



$72 = r^2 + h^2 \Rightarrow h^2 = 72 - r^2 \Rightarrow h = \sqrt{72 - r^2}$ ... ... العلاقة

$A = 4\pi r\sqrt{72 - r^2} = 4\pi\sqrt{r^2(72 - r^2)} = 4\pi(72r^2 - r^4)^{\frac{1}{2}}$

$\bar{A} = 4\pi.\frac{1}{2}(72r^2 - r^4)^{\frac{-1}{2}}.(144r - 4r^3) = \frac{2\pi(144r - 4r^2)}{\sqrt{72r^2 - r^2}}$

$\bar{A} = 0 \Rightarrow 2\pi(144r - 4r^3) = 0 \xrightarrow{(\div 2\pi)} 144r - 4r^3 = 0 \quad (\div 4)$

$36r - r^3 = 0 \Rightarrow r(36 - r^2) = 0$

$r = 0$ يهمل $or\ 36 - r^2 = 0 \Rightarrow r^2 = 36 \Rightarrow \boxed{r = 6cm}$

$\therefore h = \sqrt{72 - 36} = \sqrt{36} = \boxed{6\ cm}$

$\therefore 2h = 2(6) = \boxed{12\ cm}$ الارتفاع

سؤال وزاري 2000/د2

اسطوانة دائرية قائمة يزداد ارتفاعها بمعدل (0.5 cm/s) بحيث يظل حجمها دائماً مساوياً $(320\pi\ cm^3)$ جد معدل تغير نصف قطر القاعدة عندما يكون الارتفاع (5 cm).

الحل: $h = 5\ cm \quad , \frac{dr}{dt}\ ? \quad , \ v = 320\ \pi cm^2 \ , \frac{dh}{dt}\ 0.5\ cm/s$

$v = \pi r^2 h \Rightarrow 320\pi = \pi r^2 h \Rightarrow \boxed{320 = r^2 h}$ العلاقة

$if \quad h = 5 \Rightarrow 320 = 5r^2 \Rightarrow r^2 = 64 \Rightarrow r = 8\ cm$

$\bar{v} = r^2.\frac{dh}{dt} + h.2r.\frac{dr}{dt} \Rightarrow 0 = 64.(0.5) + 5.(16).\frac{dr}{dt}$

$80\frac{dr}{dt} = -32 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{-32}{80} = \frac{-2}{5}\ cm/s$

سؤال وزاري 2000/د2

خزان من الحديد ذو غطاء كامل على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة وحجمه $216m^2$ جد ابعاده لتكون مساحة الصفائح المستخدمة في صنعة أقل ما يمكن.

الارتفاع × محيط القاعدة

الحل: لتكن A المساحة الكلية $A = 4x.y + 2x^2$ .... القانون الرئيسي

نفرض طول المربع x، الارتفاع y

$V = x^2y \Rightarrow 216 = x^2y \Rightarrow y = \frac{216}{x^2}$ .... العلاقة

$\therefore A = 4x\left(\frac{216}{x^2}\right) + 2x^2 \Rightarrow A = 864x^{-1} + 2x^2 \Rightarrow \bar{A} = -864x^{-2} + 4x = \frac{-864}{x^2} + 4x$

$\bar{A} = 0 \Rightarrow \frac{-864}{x^2} + 4x = 0 \xRightarrow{(x^2)} -864 + 4x^3 = 0 \xrightarrow{(\div 4)} -216 + x^3 = 0 \Rightarrow x^3 = 216 \Rightarrow \boxed{x = 6}\,m$

$\therefore y = \frac{216}{36} = 6\ cm$

سؤال وزاري 2001/د1

جد بعدي علبة اسطوانية دائرية قائمة مسدودة من نهايتها، مساحتها السطحية تساوي $24\pi\ cm^2$ عندما يكون حجمها أكبر ما يمكن.

الحل: نفرض ابعاد الاسطوانة r , h

$V = \pi r^2 h$ .... القانون الرئيسي

$A = 2\pi rh + 2\pi r^2$

$24\pi = 2\pi rh + 2\pi r^2 \xRightarrow{(\div 2\pi)} 12 = rh + r^2 \Rightarrow 12 - r^2 = rh$

$\therefore h = \frac{12 - r^2}{r}$ .... العلاقة

$V = \pi r^2 . \frac{12 - r^2}{r} = \pi r(12 - r^2) = \pi(12r - r^3)$

$\bar{V} = \pi(12 - 3r^2) \Rightarrow \pi(12 - 3r^2) = 0 \xRightarrow{(\div \pi)} 12 - 3r^2 = 0 \xRightarrow{(\div 3)} 4 - r^2 = 0$

$\Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow \boxed{r = 2cm}$

$\therefore h = \frac{12 - 4}{2} = \frac{8}{2} \Rightarrow \boxed{h = 4cm}$

سؤال وزاري 2002/د1

لتكن $y^2 = 8x$ جد نقطة تنتمي إلى المنحني وتكون أقرب ما يمكن إلى النقطة (6,0)

الحل: نفترض النقطة (x ,y)

$S = \sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{x^2 - 12x + 36 + y^2}$............ القانون الرئيسي

$y^2 = 8x$ ……… . العلاقة

$S = \sqrt{x^2 - 12x + 36 + 8x} = \sqrt{x^2 - 4x + 36} = (x^2 - 4x + 36)^{\frac{1}{2}}$

$\acute{S} = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 36)^{\frac{-1}{2}}.(2x-4) = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+36}}$ (نجعل $\acute{S} = 0$)

$\Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow \quad x = 2$

$y^2 = 8(2) \Rightarrow y^2 = 16 \Rightarrow \quad y = \pm 4$

∴ النقاط (2,4) ، (2,-4)

سؤال وزاري 2002/د2

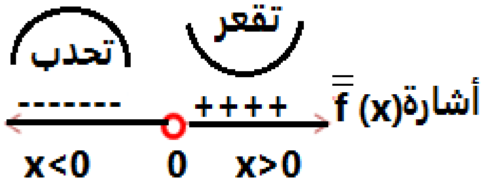
جد نقطة الانقلاب لمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 3x - 2$ ثم جد معادلة مماس المنحني عند نقطة انقلابه.

الحل:

$\acute{f}(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f''(x) = 6x$

$6x = 0 \overset{(\div 6)}{\Longrightarrow} x = 0 \qquad f(0) = -2$

∴ $(0,-2)$ نقطة انقلاب



ميل المماس $= \acute{f}(0) = 3(0)^2 - 3 = -3$

$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y + 2 = -3(x - 0)$

$\Rightarrow y + 2 = -3x \Rightarrow y + 3x + 2 = 0$ معادلة المماس

سؤال وزاري 2003/د2

المستقيم $3x - y = 7$ يمس المنحني $y = ax^2 + bx + c$ عند النقطة (2,-1) وللمنحني نهاية صغرى محلية عند $x = \frac{1}{2}$ جد قيمة $a, b, c \in R$

الحل:

$\grave{y} = 2ax + b$

الميل $= 2a(2) + b = 4a + b$

الميل $= \frac{\text{معامل } -x}{\text{معامل } y} = \frac{-3}{-1} = 3 \quad \Rightarrow \quad 4a + b = 3 \dots\dots\dots (1)$

$\grave{y} = 2a(0.5) + b \xrightarrow{(x=\frac{1}{2} \text{ عند})} \mp a \mp b = 0 \dots\dots\dots (2)$ بالطرح

$3a = 3 \Rightarrow a = 1$

$4(1) + b = 3 \Rightarrow b = 3 - 4 \Rightarrow b = -1$

∵ $(2,-1) \ni$ الدالة ∴ تحقق معادلتها

$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \Rightarrow \quad -1 = 4 + (-2) + c \quad \Rightarrow \quad -1 - 2 = c \Rightarrow c = -3$

سؤال وزاري 2004/د1

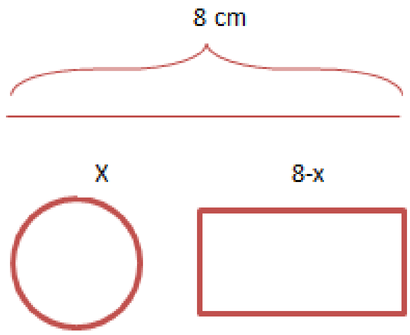
قطعة سلك طولها 8 cm قطعت إلى قطعتين بحيث صنع من الأولى دائرة ومن الثانية مستطيل طوله نصف عرضه جد طول كل قطعة ليكون مجموع مساحتي المستطيل والدائرة أقل ما يمكن.

الحل: ليكن محيط الدائرة x

نفرض عرض المستطيل y

∴ محيط المستطيل هو 8-x

∴ طول المستطيل = 2y



الارتفاع × محيط القاعدة

$A = (2y.y) + \pi r^2 = 2y^2 + \pi r^2$ .... القانون

$P = (2y + y).2$ محيط المستطيل

$8 - x = 6y \Rightarrow y = \frac{8-x}{6}$ .... العلاقة(1)

محيط الدائرة $= 2\pi r \Rightarrow x = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi}$ .... العلاقة (2)

$\therefore A = 2\left(\frac{8-x}{6}\right)^2 + \pi\left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \frac{(8-x)^2}{18} + \pi.\frac{x^2}{4\pi^2} = \frac{1}{18}(8-x)^2 + \frac{1}{4\pi}x^2$

$\therefore \acute{A} = \frac{1}{9}(8-x).(-1) + \frac{1}{4\pi}.(2x) = \frac{-1}{9}(8-x) + \frac{1}{2\pi}x$

$\acute{A} = 0 \quad \Rightarrow \frac{-1}{9}(8-x) + \frac{1}{2\pi}x = 0 \Rightarrow \frac{-8}{9} + \frac{1}{9}x + \frac{1}{2\pi}x = 0 \Rightarrow x\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{2\pi}\right) = \frac{8}{9}$

$\frac{2\pi + 9}{18\pi}x = \frac{8}{9} \Rightarrow x = \frac{\frac{8}{9}}{\frac{2\pi+9}{18\pi}} = \frac{16\pi}{2\pi + 9}cm$ طول القطعة الاولى

طول القطعة الثانية $= \left(8 - \frac{16\pi}{2\pi + 9}\right)cm$

سؤال وزاري 2005/د1

لتكن $f(x)=x^3+bx^2+cx+1$ ، (-1,2) نقطة نهاية عظمى محلية للدالة. جد قيمتي $b,c\in R$ هل توجد نقطة انقلاب للدالة؟.

الحل: $\because (-1,2)\in$ الدالة

$\therefore$ تحقق معادلتها

$2=-1+b-c+1$

$b-c=2\ldots\ldots\ldots(1)$

$\grave{f}(x)=3x^2+2bx+c \Rightarrow 3(-1)^2+2b(-1)+c=0 \Rightarrow 3-2b+c=0$

$-2b+c=-3\ldots\ldots\ldots(2)$

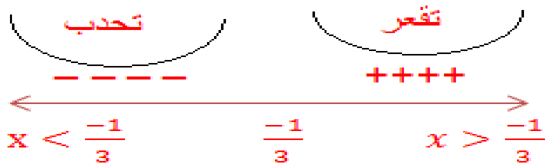
$b-c=2\ldots\ldots\ldots(1)$

$-b=-1 \Rightarrow b=1 \Rightarrow 1-c=2 \Rightarrow c=-1$

$f''(x)=6x+2b=6x+2 \Rightarrow 6x+2=0 \Rightarrow 6x=-2 \Rightarrow x=\frac{-1}{3}$

$f(x)=x^3+x^2-x+1$

$f\left(\frac{-1}{3}\right)=\frac{-1}{27}+\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+1=\frac{38}{27}$



$\therefore \left(\frac{-1}{3},\frac{38}{27}\right)$ تمثل نقطة انقلاب

سؤال وزاري 2007/د1

إذا كانت $y=ax^3+bx^2$ جد قيمة $a,b\in R$ إذا علمت أن المنحني الدالة نقطة انقلاب هي (1,2) .

الحل: $\because (1,2)\in$ الدالة $\therefore$ تحقق معادلتها

$2=a(1)^3+b(1)^2$

$2=a+b\ldots\ldots\ldots(1)$

$\grave{f}(x)=3ax^2+2bx \Rightarrow \grave{\grave{f}}(x)=6ax+2b$

$\because (1,2)$ نقطة انقلاب $\Leftarrow$ $\bar{\bar{f}}(x)=0$ **عندما** $(x=1)$

$\therefore 6a(1)+2b=0 \Rightarrow 6a+2b=0]\div 2$

$3a+b=0\ldots\ldots\ldots(2)$

$\mp a\mp b=\mp 2\ldots\ldots\ldots(1)$ بالطرح

$2a=-2 \Rightarrow a=-1 \Rightarrow -1+b=2 \Rightarrow b=3$

سؤال وزاري 2007/د2

عددان موجبان حاصل ضربهما (16) ومجموعهما اصغر ما يمكن. فما العددان؟.

الحل: نفرض العددان x, y

$Z = x + y$ ……… القانون الرئيسي

$16 = xy \Rightarrow y = \frac{16}{x}$ ……… العلاقة

$Z = x + \frac{16}{x} = x + 16x^{-1} \Rightarrow \acute{Z} = 1 - 16x^{-2} = 1 - \frac{16}{x^2}$

$1 - \frac{16}{x^2} = 0 \overset{(.x^2)}{\Longrightarrow} x^2 - 16 = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow \boxed{x = 4}$

$\therefore y = \frac{16}{4} = 4$

سؤال وزاري 2008/د2

جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل مثلث متساوي الاضلاع وارتفاعه $4\sqrt{3}cm$

الحل: نفرض أبعاد المستطيل 2x, y

A=2x y ………… القانون الرئيسي

في المثلث abc القائم الزاوية في b:

$\tan 60° = \frac{4\sqrt{3}}{bc} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{bc} \Rightarrow \sqrt{3}bc = 4\sqrt{3} \Rightarrow \boxed{b\,c = 4}$

من تشابه المثلثين abc ، dec نحصل على:

$\frac{4\sqrt{3}}{y} = \frac{4}{4-x} \Rightarrow 4y = 16\sqrt{3} - 4\sqrt{3}\,x \qquad (\div 4)$

$\therefore y = 4\sqrt{3} - \sqrt{3}x$ ……… العلاقة

$A = 2x(4\sqrt{3} - \sqrt{3}x)$

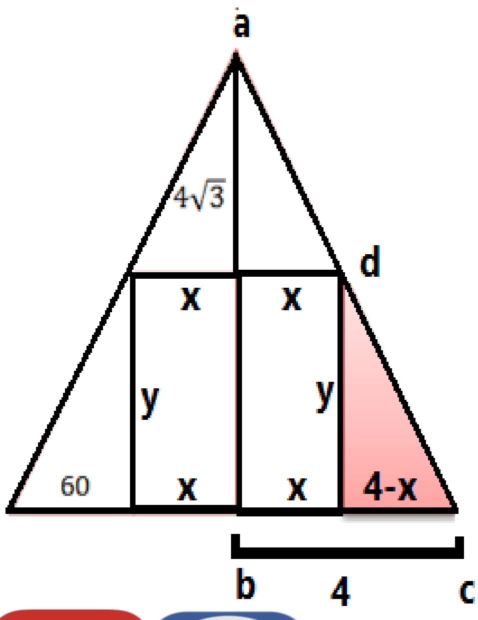
$A = 8\sqrt{3}x - 2\sqrt{3}x^2$

$\acute{A} = 8\sqrt{3} - 4\sqrt{3}x \Rightarrow 8\sqrt{3} - 4\sqrt{3}x = 0 \qquad (\div 4\sqrt{3})$

$\therefore 2 - x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 2\ cm}$

$\therefore y = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \boxed{2\sqrt{3}\ cm}$

$\therefore A = 2(2)(2\sqrt{3}) = 8\sqrt{3}\ cm^2$



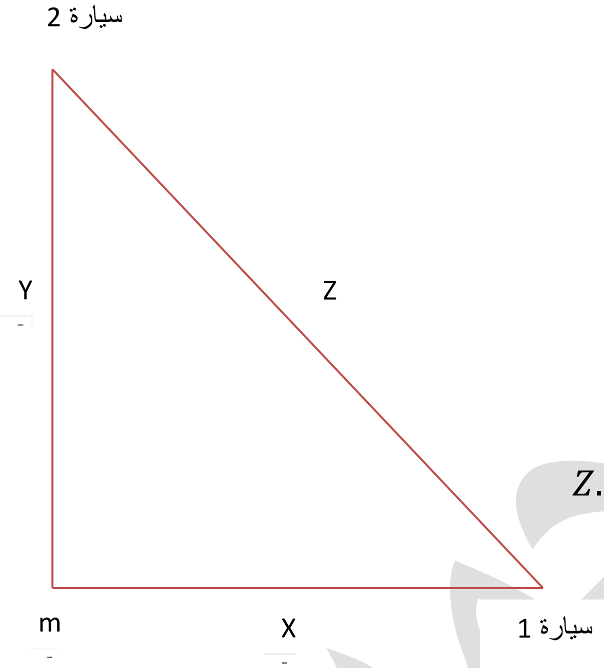
سؤال وزاري 2009/د1

طريقان متعامدان يلتقيان في m. تحركت سيارتان من نقطة m كل منهما في طريق وكان معدل سرعة السيارة الأول 80km/h ومعدل سرعة السيارة الثانية 60km/h. جد معدل الابتعاد بين السيارتين بعد ربع ساعة من بدء الحركة من m.

الحل: $\frac{dx}{dt} = 80\frac{km}{h}$, $\frac{dy}{dt} = 60\frac{km}{h}$ $\frac{dz}{dt}$?

المسافة التي قطعتها السيارة الأولى بعد ربع ساعة = $20km = 80.\left(\frac{1}{4}\right)$

المسافة التي قطعتها السيارة الثانية بعد ربع ساعة = $15km = 60.\left(\frac{1}{4}\right)$



$\therefore x = 20 \quad , \quad y = 15$

$Z^2 = X^2 + Y^2$ فيثاغورس

$Z^2 = (20)^2 + (15)^2 = 400 + 225 = 625$

$\therefore z = 25$

$2Z.\frac{dz}{dt} = 2x.\frac{dx}{dt} + 2y.\frac{dy}{dt}] \div 2$

$Z.\frac{dz}{dt} = x.\frac{dx}{dt} + y.\frac{dy}{dt} \Rightarrow 25\left(\frac{dz}{dt}\right) = 20(80) + 15(60)$

$25\frac{dz}{dt} = 1600 + 900$

$25\frac{dz}{dt} = 2500 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{2500}{25} = 100km/h$

سؤال وزاري 2009/د1

إذا كانت $f(x) = ax^2 - (x+b)^2$ والنقطة (1,-2) حرجة. جد قيمة b,a الموجبتين ثم بين نوع النقطة الحرجة.

الحل: $\because (1,2) \in$ الدالة $\therefore$ تحقق معادلتها

$-2 = a - (1+b)^2$

$-2 = a - (1 + 2b + b^2) \Rightarrow -2 = a - 1 - 2b - b^2$

$\therefore -1 = a - 2b - b^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$\grave{f}(x) = 2ax + 2(x+b) \Rightarrow 2a(1) - 2(1+b) = 0 \Rightarrow 2a - 2 - 2b = 0] \div 2$

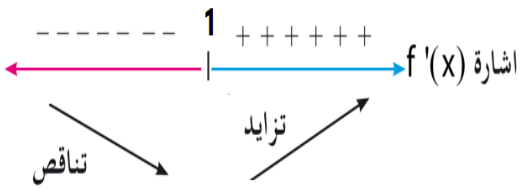
$a - b = 1 \Rightarrow a = 1 + b \dots\dots\dots\dots(2)$

$\therefore\ -1 = 1 + b - 2b - b^2 \Rightarrow b^2 + b - 2 = 0 \Rightarrow (b+2)(b-1) = 0$

$b + 2 = 0 \Rightarrow b = -2$ يهمل

$or\ \ b - 1 = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow a = 1 + 1 \Rightarrow a = 2$

$\acute{f}(x) = 4x + 2(x+1)$



$\therefore (1,-2)$ نهاية صغرى محلية

سؤال وزاري 2009/د2

إذا كان المستقيم $y + 9x = 28$ مماسا للدالة $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ عند النقطة (3,1) جد قيمة a, b.

الحل: $\because (3,1) \in$ الدالة $\therefore$ تحقق معادلتها $1 = a(3)^3 + b(3)^2 + 1$

$1 = 27a + 9b + 1 \Rightarrow 0 = 27a + 9b \quad (\div 9)$

$\therefore 3a + b = 0 \dots\dots\dots\dots(1)$

$\acute{f}(x) = 3ax^2 + 2bx \Rightarrow \acute{f}(3) = 3a(9) + 2b(3)$

$\acute{f}(3) = 27a + 6b$ (ميل المماس)

ميل المماس $= \dfrac{-\text{معامل } x}{\text{معامل } y} = \dfrac{-9}{1} = -9$

$\therefore 27a + 6b = -9 \overset{(\div 3)}{\Longrightarrow} 9a + 2b = -3 \dots\dots\dots\dots\dots(2)$

وبضرب المعادلة(1) بالعدد(2) نحصل : $\mp 6a \mp 2b = 0$

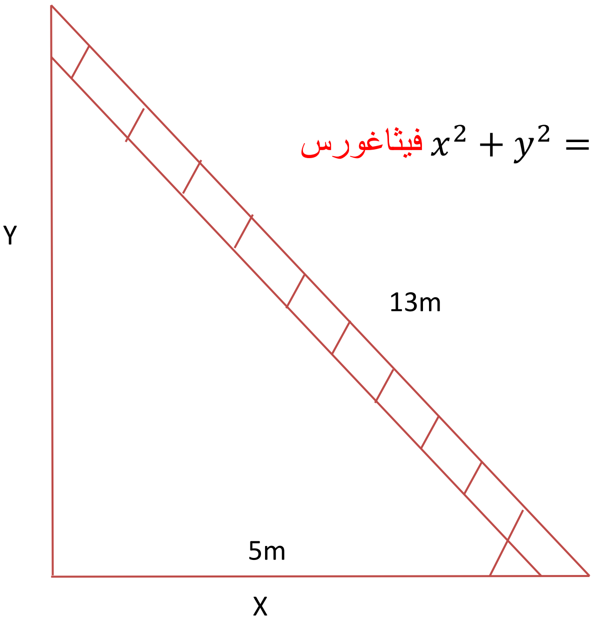
$3a = -3 \Rightarrow a = -1$

نعوض في المعادلة(1) لحساب قيمة (b)

$\therefore 3(-1) + b = 0 \Rightarrow -3 + b = 0 \Rightarrow b = 3$

سؤال وزاري 2009/د2

سلم طوله (13m) يرتكز على حائط شاقولي. فاذا تحرك الطرف الأسفل للسلم مبتعدا من الحائط بمعدل 4m/s جد معدل انزلاق الطرف الأعلى للسلم عن الأرض في اللحظة التي يكون فيها الطرف الأسفل على بعد 5m من الحائط.



الحل: $\frac{dx}{dt} = 4m/s \quad , \quad \frac{dy}{dt}?$

فيثاغورس $x^2 + y^2 = 169 \Rightarrow 25 + y^2 = 169 \Rightarrow y^2 = 144 \Rightarrow y = 12m$

$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \qquad (\div 2)$

$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad 5(4) + 12\frac{dy}{dt} = 0$

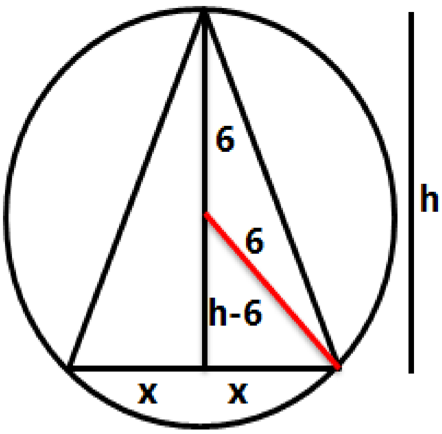
$\Rightarrow \quad 20 + 12\frac{dy}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dt} = \frac{-20}{12}$

$\therefore \frac{dy}{dt} = \frac{-5}{3}(m/s)$

سؤال وزاري 2010/د2

جد مساحة أكبر مثلث متساوي الساقين يمكن رسمه داخل دائرة نصف قطرها (6 cm).

الحل: نفرض ابعاد المثلث 2x, h



$A = \frac{1}{2}(2x).h$

$A = xh$ .... القانون الرئيسي

$36 = x^2 + (h-6)^2 \Rightarrow 36 = x^2 + h^2 - 12h + 36$

$x^2 = 12h - h^2 \Rightarrow x = \sqrt{12h - h^2}$ .... العلاقة

$A = h.\sqrt{12h - h^2} = \sqrt{12h^3 - h^4} = (12h^3 - h^4)^{\frac{1}{2}}$

$\bar{A} = \frac{1}{2}(12h^3 - h^4)^{\frac{-1}{2}}(36h^2 - 4h^3) = \frac{(36h^2 - 4h^3)}{2(12h^3 - h^4)^{\frac{1}{2}}}$

$\bar{A} = 0 \quad \Rightarrow \quad 36h^2 - 4h^3 = 0 \overset{(\div 4)}{\Longrightarrow} 9h^2 - h^3 = 0 \Rightarrow h^2(9-h) = 0$

$either \quad h^2 = 0 \Rightarrow h = 0$ يهمل

$or \quad 9 - h = 0 \Rightarrow h = 9\ cm$

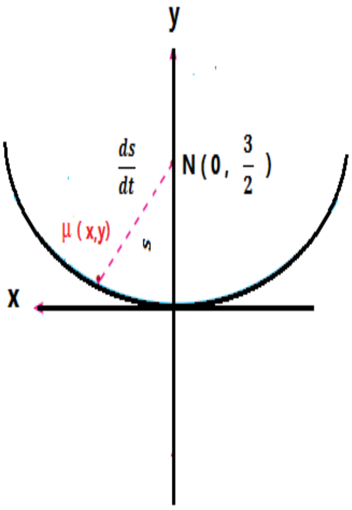
$\Rightarrow \quad x = \sqrt{(12)(9) - 81} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}cm$

$A = xh = (3\sqrt{3})(9) = 27\sqrt{3}cm^2$

سؤال وزاري 2014/د1

لتكن (μ) نقطة تتحرك على القطع المكافئ $y = x^2$ جد أحداثي النقطة (μ) عندما يكون المعدل الزمني لأبتعادها عن النقطة $\left(0, \frac{3}{2}\right)$ يساوي ثلث المعدل الزمني لتغيير الأحداثي الصا دي للنقطة (μ)

الحل /



$$\boxed{\frac{ds}{dt} = \frac{1}{3}\frac{dy}{dt}}$$

لتكن النقطة $\mu(x, y) \ni$ للقطع المكافئ

لتكن النقطة $N\left(0, \frac{3}{2}\right)$

S المسافة بين N, M

$$\overline{MN} = s = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$s = \sqrt{(x-0)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{y + \left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right)}$$

$$s = \left(y^2 - 2y + \frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$$ (نشتق بالنسبة للزمن)

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2}\left(y^2 - 2y + \frac{9}{4}\right)^{\frac{-1}{2}} \left(2y\frac{dy}{dt} - 2\frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{(2y-2)\frac{dy}{dt}}{2\left(y^2 - 2y + \frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} \Rightarrow \frac{1}{3}\frac{dy}{dt} = \frac{(2y-2)\frac{dy}{dt}}{2\left(y^2 - 2y + \frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{2(y-1)}{2\sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}}} \Rightarrow \sqrt{y^2 - 2y + \frac{9}{4}} = 3(y-1)$$ (تربيع الطرفين)

$$y^2 - 2y + \frac{9}{4} = 9(y^2 - 2y + 1) \qquad (\times 4)$$

$$4y^2 - 8y + 9 = 36y^2 - 72y + 36$$

$$32y^2 - 64y + 27 = 0 \xrightarrow{(\div 32)} y^2 - 2y + \frac{27}{32} = 0$$

$$y^2 - 2y = \frac{-27}{32}$$ (نضيف العدد (1) الى طرفي المعادلة لكي يصبح مربع كامل)

$$y^2 - 2y + 1 = \frac{-27}{32} + 1$$

$$(y-1)^2 = \frac{5}{32}$$ (جذر الطرفين)

$$y - 1 = \pm\sqrt{\frac{5}{32}} \Rightarrow y = 1 \pm \sqrt{\frac{5}{32}}$$

$$y = x^2 = 1 \pm \sqrt{\frac{5}{32}} \Rightarrow x = \pm\sqrt{1 \pm \sqrt{\frac{5}{32}}}$$

سؤال وزاري 2014/د3

جـــد معادلة المنحني $f(x) = ax^3 - bx^2 + cx$ حيث النقطة $(-1, 4)$ نقطة أنقلاب لـه وميل المماس عندها يساوي (1)

الحل / $\because$ $(-1,4) \in$ الدالة

$\therefore$ تحقق معادلتها

$f(x) = ax^3 - bx^2 + cx$

$4 = a(-1)^3 - b(-1)^2 + c(-1) \Rightarrow 4 = -a - b - c$ ……… (1)

$\because$ ميل المماس عند نقطة الأنقلاب يساوي (1)

$\therefore \acute{f}(-1) = 1$

$\acute{f}(x) = 3ax^2 - 2bx + c \Rightarrow \acute{f}(-1) = 3a(-1)^2 - 2b(-1) + c$

$1 = 3a + 2b + c$ ……… (2)

$4 = -a - b - c$ ……… (1)

تحل أنيا

$5 = 2a + b$ ……… (4)

$\because$ النقطة $(-1,4)$ نقطة أنقلاب $\Leftarrow$ $\acute{\acute{f}}(-1) = 0$

$\acute{\acute{f}}(x) = 6ax - 2b \Rightarrow \acute{\acute{f}}(-1) = 6a(-1) - 2b \Rightarrow 0 = -6a - 26$ $(\div 2)$

$0 = -3a - b$ ……… (5)

$5 = 2a + b$ ……… (4)

تحل أنيا

$5 = -a \Rightarrow \boxed{a = -5}$ نعوض في معادلة (4)

$5 = 2a + b \Rightarrow 5 = 2(-5) + b \Rightarrow \boxed{b = 15}$ نعوض في معادلة (1)

$1 = 3a + 2b + c \Rightarrow 1 = 3(-5) + 2(15) + c \Rightarrow \boxed{c = -14}$

$f(x) = -5x^3 - 15x^2 - 14x$

سؤال وزاري 2014/د3

جـــد العدد الذي أذا أضيف الى نظيره الضربي يكون الناتج أكبر ما يمكن .

الحل /

الفرضية : نفرض العدد = x

النظير الضربي للعدد = $\frac{1}{x}$

الدالة : العدد + نظيره الضربي

$f(x) = x + \frac{1}{x}$

الدراسة:

$\acute{f}(x) = 1 - x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2}$ (نجعل $\acute{f}(x) = 0$)

$1 - \frac{1}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$

$\acute{\acute{f}}(x) = 1 + 2x^{-3} = 1 + \frac{2}{x^3}$

$\acute{\acute{f}}(1) = 3 > 0$, $\acute{\acute{f}}(-1) = -1 < 0$

∴ توجد نهاية عظمى محلية عندما $x = -1$

سؤال وزاري 2014/د3

أرسم منحني الدالة $f(x) = \frac{3}{x^2}$ بأستخدام معلوماتك في التفاضل

الحل/

- **أوسع مجال للدالة** $= R / \{0\}$
- **التناظر / المنحني متناظر حول المحور الصادي لأن :**

$$\forall x \in R \ \exists(-x) \in R \ \Rightarrow \ f(-x) = f(x)$$

$$f(-x) = \frac{3}{(-x)^2} = \frac{3}{x^2} = f(x)$$

- **المحاذيات /**

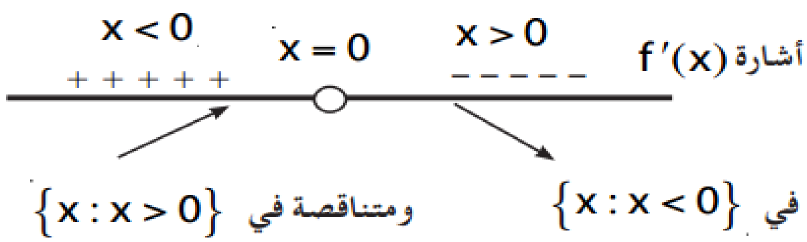
$x^2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{x = 0}$ المستقيم المحاذي الشاقولي

$y = \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{y} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{y = 0}$ المستقيم المحاذي الأفقي

- **نقط التقاطع مع المحورين / لا يوجد تقاطع مع المحورين لأن** $x \neq 0 \ , \ y \neq 0$
- **دراسة $\bar{f}(x)$ وما ينتج عنها**

$$f(x) = \frac{3}{x^2} = 3x^{-2} \quad \Longrightarrow \quad \bar{f}(x) = -6x^{-3} = \frac{-6}{x^3} \qquad (\bar{f}(x) \neq 0)$$

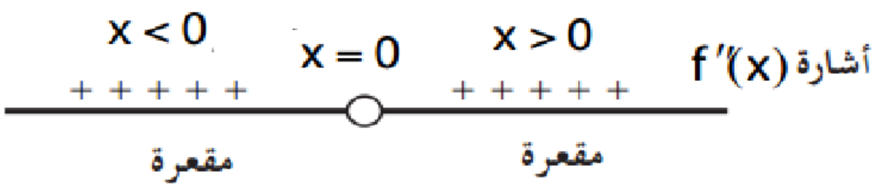
لا توجد نهايات



- **دراسة $\bar{\bar{f}}(x)$ وما ينتج عنها**

$$\bar{\bar{f}}(x) = 18\,x^{-4} = \frac{18}{x^4} \qquad (\bar{\bar{f}}(x) \neq 0)$$

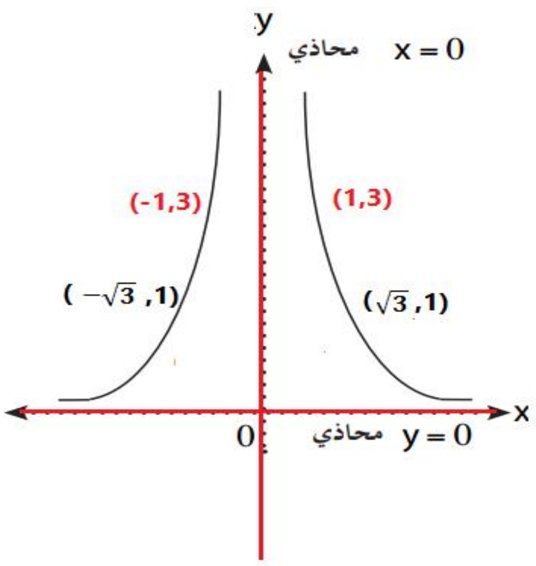
لا توجد نقطة انقلاب



الدالة مقعرة في الفترتين $\{x: x > 0\}$, $\{x: x < 0\}$

- تحديد النقط الخاصة بالرسم ومن ثم رسمها

x	y
$\pm\sqrt{3}$	1
$\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$	2
± 1	3



سؤال وزاري 2015 /د2

أذا كان $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ جد مقدار التغيير التقريبي للدالة أذا تغيرت x من 4 الى 4.01 ؟

الحل /

نفرض $(a = 4)$ معطى

نفرض $(b = 4.01)$ معطى

$$h = b - a = 4.01 - 4 = 0.01$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow f(x) = (x)^{\left(\frac{-1}{2}\right)} \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{-1}{2}(x)^{\left(\frac{-3}{2}\right)} \Rightarrow \bar{f}(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x^3}}$$

$$\bar{f}(a) = \frac{-1}{2\sqrt{a^3}} \Rightarrow \bar{f}(4) = \frac{-1}{2\sqrt{(4)^3}} \Rightarrow \bar{f}(4) = \frac{-1}{2(8)} = \frac{-1}{16} \Rightarrow \bar{f}(4) = -0.0625$$

$$h.\bar{f}(a) \cong h.\bar{f}(4) \cong (0.01)(-0.0625) = -0.000625$$ مقدار التغيير التقريبي

سؤال وزاري 2015 /د2

جد نقطة تنتمي للمنحني $y^2 - x^2 = 5$ لكي تكون أقرب ما يمكن من النقطة $(4,0)$

الحل/

الفرضية : نفرض أن النقطة $p(x,y)$ هي من نقط المنحني $y^2 - x^2 = 5$ بحيث تكن أقرب ما يمكن للنقطة $(4,0)$

الدالة: هي قانون المسافة

$$S = \sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2}$$

العلاقة: $(y^2 - x^2 = 5)$

$$S = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + y^2}$$

$$S = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + (x^2 + 5)}$$

$$S = \sqrt{2x^2 - 8x + 21}$$

الدراسة:

$$\frac{dS}{dy} = \frac{4x - 8}{(2)\sqrt{2x^2 - 8x + 21}} \qquad \left(\text{نجعل } \frac{dS}{dy} = 0\right)$$

$$\Rightarrow \frac{4x - 8}{(2)\sqrt{2x^2 - 8x + 21}} = 0$$

$$\Rightarrow 4x - 8 = 0 \qquad \Rightarrow x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 2}$$

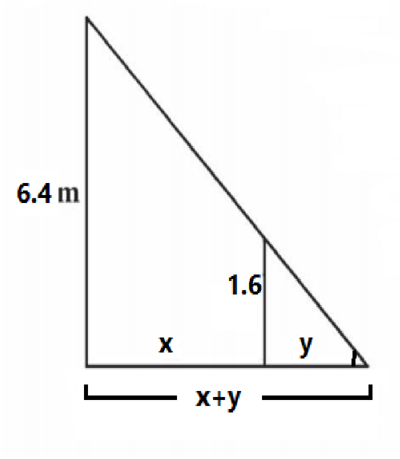
$$\Rightarrow y^2 = x^2 + 5 = 4 + 5 = 9 \qquad \Rightarrow \boxed{y = \pm 3}$$

النقاط هي $(2,-3)$, $(2,3)$

سؤال وزاري 2015/ د2

مصباح على أرتفاع 6.4 متر مثبت على عمود شاقولي وشخص طوله 1.6 متر يتحرك مبتعدا عن العمود وبسرعة $30\ m/min$ جد سرعة تغيير طول ظل الرجل

الحل /



نفرض بعد الرجل عن قاعدة المصباح $= x$
نفرض طول ظل الرجل $= y$
في أي زمن t حيث $\frac{dx}{dt} = 30$

العلاقة هي تشابه مثلثات او أستعمال (tan)

$\tan\theta = \frac{6.4}{x+y}$ في المثلث الكبير

$\tan\theta = \frac{1.6}{y}$ في المثلث الصغير

$\frac{6.4}{x+y} = \frac{1.6}{y} \xrightarrow{(\div 1.6)} \frac{4}{x+y} = \frac{1}{y}$

$4y = x + y \Rightarrow 3y = x$ (نشتق بدلالة t)

$3\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)}{3} = \frac{30}{3} = 10\ (m/min)$

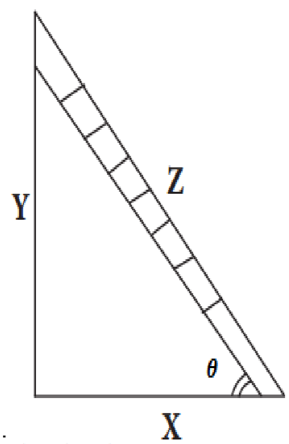
معدل تغيير طول ظل الرجل $= 10\ (m/min)$

سؤال وزاري 2015/ د3

سلم يرتكز طرفه الأعلى على حائط شاقولي وطرفه الأسفل على أرض أفقية ، فأذا كانت سرعة حركة طرفه الأسفل $\left(\frac{1}{5}\ m/sec\right)$، جد معدل أنزلاق طرفه الأعلى في اللحظة التي تكون الزاوية المحصورة بين السلم والأرض $\frac{\pi}{3}$

الحل /

الطريقة (1)



في أي زمن t:
- نفرض طول السلم $= Z$
- نفرض بعد قاعدة السلم عن الحائط $= x$
- نفرض بعد رأس السلم عن الأرض $= y$
- نفرض الزاوية بين السلم و الأرض $= \theta$

العلاقة هي فيثاغورس

$x^2 + y^2 = Z^2 \quad \rightarrow$ معادلة (1)

$\sin\theta = \frac{y}{Z} \Rightarrow \sin\frac{\pi}{3} = \frac{y}{Z} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2}Z$

$\cos\theta = \frac{x}{Z} \Rightarrow \cos\frac{\pi}{3} = \frac{x}{Z} \Rightarrow x = \frac{1}{2}Z$

الآن نشتق المعادلة ① بالنسبة للزمن

$$2x.\frac{dx}{dt}+2y.\frac{dy}{dt}=0 \quad \Rightarrow 2\left(\frac{1}{2}Z\right)\left(\frac{1}{5}\right)+2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}Z\right)\frac{dy}{dt}=0$$

$$\frac{1}{5}Z+\sqrt{3}\,Z\frac{dy}{dt}=0 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{-Z}{5\sqrt{3}\,Z}=\frac{-1}{5\sqrt{3}}(m/s)$$

معدل الانزلاق الطرف العلوي للسلم = $\frac{-2}{\sqrt{3}}$ m/s

الطريقة② /

$$\tan\theta=\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \tan\frac{\pi}{3}=\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \sqrt{3}=\frac{y}{x} \quad \Rightarrow \boxed{y=\sqrt{3}\,x}$$

الآن نشتق المعادلة ① بالنسبة للزمن

$$2x.\frac{dx}{dt}+2y.\frac{dy}{dt}=0 \quad \Rightarrow 2(x)\left(\frac{1}{5}\right)+2(\sqrt{3}\,x)\frac{dy}{dt}=0$$

$$\frac{2}{5}x+2\sqrt{3}\,x\frac{dy}{dt}=0 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{-2x}{10\sqrt{3}\,x}=\frac{-1}{5\sqrt{3}}(m/s)$$

سؤال وزاري 2015 /د3

أذا كانت $f(x)=\sqrt[3]{2x+6}$ جد بأستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة القيمة التقريبية لـ $f(1.02)$

الحل /

نفرض $a=1$ أقرب رقم للعدد المعطى يسهل حسابه

نفرض $b=1.02$ معطى

$$h=b-a=1.02-1=0.02$$

$$f(x)=\sqrt[3]{2x+6}=(2x+6)^{\frac{1}{3}} \quad \Rightarrow \quad f(1)=(2+6)^{\frac{1}{3}}=(8)^{\frac{1}{3}}=\left(2^3\right)^{\frac{1}{3}}=2$$

$$\bar{f}(x)=\frac{1}{3}(2x+6)^{\frac{-2}{3}}(2)=\frac{2}{3(2x+6)^{\frac{2}{3}}} \quad \Rightarrow \bar{f}(1)=\frac{2}{3(8)^{\frac{2}{3}}}=\frac{2}{3(2^3)^{\frac{2}{3}}}=\frac{2}{3(2)^2}=\frac{1}{6}=0.16666$$

$$f(a+h)\cong f(a)+h.\bar{f}(a)$$

$$f\big(1+(0.02)\big)\cong f(1)+(0.02).\bar{f}(1)$$

$$f(1.02)\cong 2+(0.02).(0.16666)=2+0.00333 \quad \Rightarrow \quad f(1.01)\cong 2.00333$$

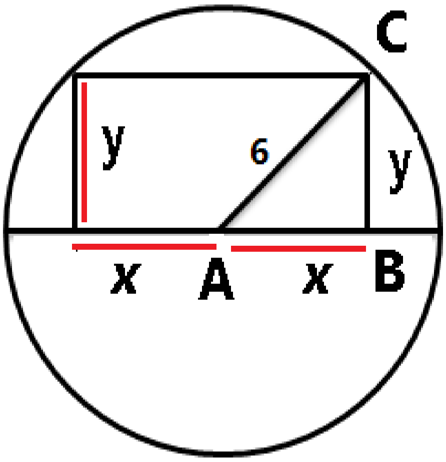
سؤال وزاري 2015 /د3

جد مساحة أكبر مستطيل يمكن رسمه داخل نصف دائرة نصف قطرها 6 سم

الحل/

الفرضية : نفرض طول المستطيل = $2x$ نفرض عرض المستطيل = y ونفرض مساحة المستطيل = A

الدالة: هي قانون مساحة المستطيل



$$A = 2x.y \qquad (\text{معادلة}①)$$

العلاقة: فيثاغورس في المثلث القائم (ABC)

$$x^2 + y^2 = (6)^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 36$$

$$x = \sqrt{36 - y^2} \qquad (\text{معادلة}②)$$

نعوض معادلة ② في معادلة ①

$$\therefore A = 2x.y = 2\left(\sqrt{36 - y^2}\right) y$$

$$A = 2\left(\sqrt{36y^2 - y^4}\right) = \sqrt{4(36y^2 - y^4)}$$

$$A = \sqrt{144y^2 - 4y^4}$$

الدراسة:

$$\frac{dA}{dy} = \frac{288y - 16y^3}{2\left(\sqrt{144y^2 - 4y^4}\right)} \qquad \left(\text{نجعل } \frac{dA}{dy} = 0\right)$$

$$\frac{288y - 16y^3}{2\left(\sqrt{144y^2 - 4y^4}\right)} = 0 \quad \Rightarrow 288y - 16y^3 = 0$$

$$\Rightarrow \quad 18y - y^3 = 0 \qquad \Rightarrow \quad y(18 - y^2) = 0$$

$either \quad y = 0$ (يهمل)

$or \quad y^2 = 18$

$\Rightarrow \quad y = \mp 3\sqrt{2}$ (يهمل السالب)

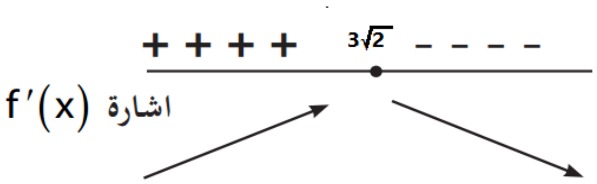
$\therefore \quad \boxed{y = 3\sqrt{2} \ cm}$ (عرض المستطيل)

$\therefore x = \sqrt{36 - y^2} = \sqrt{36 - 18} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \ cm$

$\therefore \ 2x = 2(3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} \ cm$ (طول المستطيل)

$\therefore \ A = 2x.y = (6\sqrt{2})(3\sqrt{2}) = 36 \ cm^2$ مساحة أكبر مستطيل

الأختبار: للأطلاع



سؤال وزاري 2015/ د3

المستقيم $3x - y = 7$ يمس المنحني $y = ax^2 + bx + c$ عند $(2,-1)$ وكان للمنحني نهاية محلية صغرى عند $x = 5$ جد قيمة $a, b, c \in R$

الحل/

النقطة $(2,-1)$ تحقق معادلة المنحني

$$y = ax^2 + bx + c \Rightarrow -1 = a(2)^2 + b(2) + c \Rightarrow 4a + 2b + c = -1 \rightarrow (\text{معادلة}①)$$

∵ للمنحني نهاية صغرى محلية عند $x = 5$ ⇐ $\bar{y} = 0$ عندما $x = 5$

$$\bar{y} = 2ax + b \Rightarrow 0 = 2a(5) + b \Rightarrow 10a + b = 0 \rightarrow (\text{معادلة}②)$$

نجد معادلة ميل المستقيم المماس من معادلته : $3x - y = 0$

$$M = \frac{-x \text{ معامل}}{y \text{ معامل}} = \frac{-3}{-1} = 3 \Rightarrow \boxed{M = 3}$$

نجد ميل منحني الدالة عند نقطة التماس (اي نجد $\bar{y}$ عندما $x = 2$)

$$\bar{y} = 2ax + b \Rightarrow \bar{y} = 4a + b$$

∵ **ميل المستقيم المماس = ميل منحني الدالة عند نقطة التماس**

$$\Rightarrow 3 = 4a + b \Rightarrow 4a + b = 3 \rightarrow (\text{معادلة}③)$$

بحل المعادلتين (2) و (3) أنياً نحصل على :

$$\begin{aligned} 10a + b &= 0 \quad (\text{معادلة}②) \\ \mp 4a \mp b &= \mp 3 \quad (\text{معادلة}③) \end{aligned} \quad \text{بالطرح}$$

$$6a = -3 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-1}{2}} \quad (\text{نعوض في معادلة}②)$$

$$b = -10a = -10\left(\frac{-1}{2}\right) \Rightarrow \boxed{b = 5} \quad (\text{نعوض في معادلة ① لأيجاد } c)$$

$$c = -1 - 4a - 2b = -1 - 4\left(\frac{-1}{2}\right) - 2(5) = -1 + 2 - 10 \Rightarrow \boxed{c = -9}$$

سؤال وزاري 2016/ د1
جد أبعاد أكبر أســـطوانة دائرية قائمـــة توضـــع داخل مخروط دائري قائم أرتفاعـــه $(6\ cm)$ وطول قطر قاعدته $(10\ cm)$

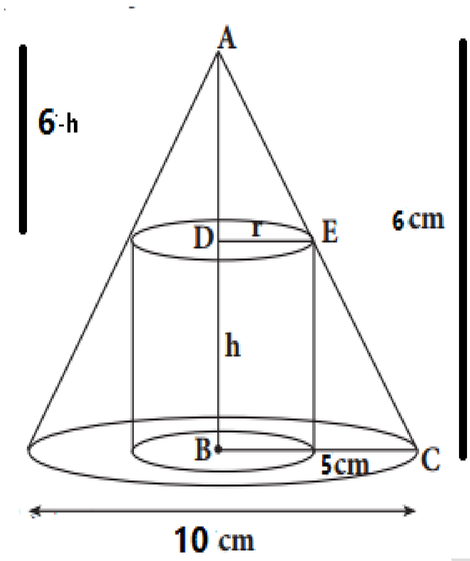
الحل/

الفرضية : نفرض نصف قطر قاعدة الأسطوانة =R ونفرض أرتفاع المخروط =h ونفرض حجم المخروط=V

الدالة: هي قانون حجم الاسطوانة

$$V = \pi R^2 h \quad (\text{معادلة } ①)$$

العلاقة: تشابه مثلثات (ADE , ABC)



$$\frac{6}{6-h} = \frac{5}{R}$$

$$\therefore 6R = 30 - 5h \quad \Rightarrow h = \frac{30-6R}{5} \quad (\text{معادلة } ②)$$

نعوض معادلة ② في معادلة ①

$$V = \pi R^2 h = \pi R^2 \left(\frac{30-6R}{5}\right) = \frac{\pi}{5}(30R^2 - 6R^3)$$

الدراسة:

$$\frac{dV}{dR} = \frac{\pi}{5}(60R - 18R^2) \quad \left(\text{نجعل } \frac{dV}{dR} = 0\right)$$

$$\frac{\pi}{5}(60R - 18R^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad 60R - 18R^2 = 0 \quad (\div 6)$$

$$\Rightarrow 10R - 3R^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad R(10 - 3R) = 0$$

$either\ \ R = 0$ (يهمل)

$$or\ \ 10 - 3R = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{10}{3}\ cm}$$

$$\Rightarrow h = \frac{30-6R}{5} = \frac{30 - 6\left(\frac{10}{3}\right)}{5} = \frac{30-20}{5} = \frac{10}{5}$$

$$\Rightarrow \boxed{h = 2\ cm}$$

∴ أبعاد أكبر أسطوانة هي : $2\ cm$ ، $\frac{10}{3}\ cm$

ملاحظة : يمكن كتابة العلاقة في السؤال السابق بالشكل التالي :

العلاقة: تشابه مثلثات (ADE , ABC)

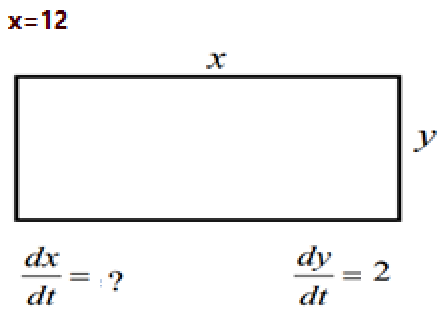
$$\frac{5}{6} = \frac{R}{6-h}$$

$$\therefore 6R = 30 - 5h \quad \Rightarrow h = \frac{30-6R}{5}$$

سؤال وزاري 2016 /د1

صــفيحة معدنية مستطيلة الشكل مساحتها $96\ cm^2$ يتمدد عرضها بمعدل $2\ cm/s$ بحيث تبقى مســاحتها ثابتة ، جد معدل تغيير الطول عندما يكون الطول مساوياً لـ $12\ cm$

الحل /



نفرض طول المستطيل $= x$
نفرض عرض المستطيل $= y$
في اي زمن t

العلاقة هي مساحة المستطيل (A) = $[x.y]$

$96 = xy \rightarrow$ معادلة ① (نحسب قيمة y)

$$96 = (12)y \quad \Rightarrow y = \frac{96}{12} \quad \Rightarrow y = 8\ cm$$

الأن نشتق معادلة ① بالنسبة للزمن

$$0 = x.\frac{dy}{dt} + y.\frac{dx}{dt} \quad \Rightarrow (12)(2) + (8)\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\therefore \frac{dx}{dt} = \frac{-24}{8} = -3\ (cm/s)$$

$\therefore$ معدل التناقص في طول المستطيل = $(-3\ \ cm/s)$

سؤال وزاري 2016 /د1

أذا كانت $f(x) = x^3 - 4x^2$ حيث $f: [0, n] \rightarrow R$ وكانت f تحقق مــبرهنة القيمة المتوسطة عـندما $c = \frac{2}{3}$ فجد قيمة n

الحل /

$$f(x) = x^3 - 4x^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = 3x^2 - 8x$$

$\because$ الدالة تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة

$$\therefore \ \bar{f}(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

(مـــيل الوتــــر = مــــيل المماس)

$$3c^2 - 8c = \frac{(n^3 - 4n^2) - (0)}{n}$$

$$3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{n(n^2 - 4n)}{n} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{3} - \frac{16}{3} = n^2 - 4n \quad \Rightarrow \quad \frac{-12}{3} = n^2 - 4n$$

$$-4 = n^2 - 4n \quad \Rightarrow \quad n^2 - 4n + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad (n-2)(n-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = 2}$$

قوانين مفيدة جدا

محيط المستطيل $= M = 2($الطول + العرض$)$

حجم المخروط $= V = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$

مساحة المستطيل $= A =$ الطول × العرض

حجم المكعب $= V = ($طول الضلع$)^3$

محيط المربع $= 4($طول الضلع$)$

المساحة السطحية للمكعب $= A = 6($طول الضلع$)^2$

مساحة المربع $= A = ($طول الضلع$)^2$

المساحة الجانبية لمتوازي المستطيلات = محيط القاعدة × الأرتفاع

محيط الدائرة $= M = 2\pi R$

المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات = المساحة الجانبية × مساحة القاعدتين

مساحة الدائرة $= A = \pi R^2$

حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة × الأرتفاع

مساحة الكرة $= A = 4\pi R^2$

محيط المثلث $= M =$ مجموع أطوال أضلاعه الثلاثة

حجم الأسطوانة $= \pi R^2 h$

مساحة المثلث $= A = \dfrac{1}{2}($القاعدة$)($الأرتفاع$)$

حجم الكرة $= V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$

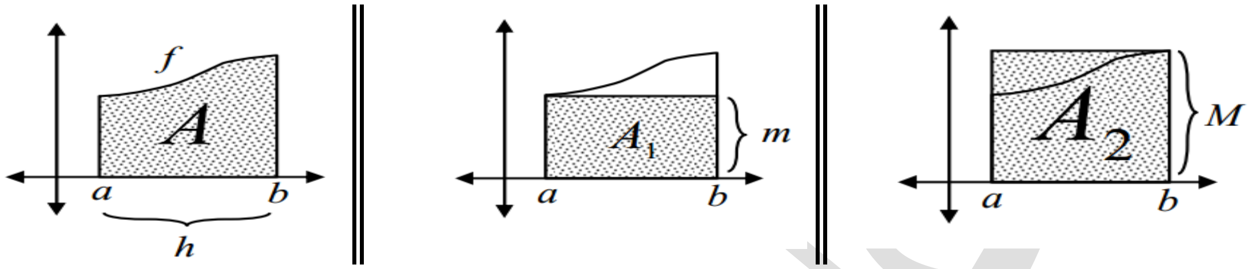
المسافة $= \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}$

الميل $= M = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$

الفصل الرابع/التكامل

ايجاد قيمة تقريبية لمساحة منطقة مستوية

أذا كانت f دالة (منحني) وكانت (A) المنطقة المحصورة بينها وبين الأحداثي السيني في الفترة $[a,b]$ كما هو مبين في الشكل أدناه ، فيمكننا أيجاد مساحة المنطقة (A) المحددة بالرسم .



ملاحظات :

① نرسم مستطيلاً من أدنى نقطة في المنحني ضمن الفترة $[a,b]$ ونرمز له بالرمز (A_1)
② نرسم مستطيلاً من أعلى نقطة في المنحني ضمن الفترة $[a,b]$ ونرمز له بالرمز (A_2)
③ نوجد مساحة المنطقتين المستطيلتين (A_1) و (A_2) .
④ المطلوب هو حساب القيمة التقريبية لمساحة المنطقة A بالاعتماد على القانون $A \approx \frac{A_1+A_2}{2}$
⑤ مساحة أي منطقة هي عدد حقيقي غير سالب
⑥ أذا كانت $A_1 \subseteq A \subseteq A_2$ فأن مساحة $A_1 \geq$ مساحة $A \geq$ مساحة A_2
⑦ يمكننا تحديد أبعاد المنطقتين المستطيلتين من خلال إحداثيات النقاط في نهايتي الفترة المذكورة في السؤال وتعويضها في الدالة الأصلية .
⑧ نرمز لأرتفاع المستطيل الصغير (A_1) بالرمز (m) حيث $m = f(a)$
⑨ نرمز لأرتفاع المستطيل الكبير (A_2) بالرمز (M) حيث $M = f(b)$

مثال (1)/ اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A حيث $A = \{(x,y): 2 \leq x \leq 5,\ \ 0 \leq y \leq f(x),\ \ \ y = f(x) = \sqrt{x-1}\}$

الحل /

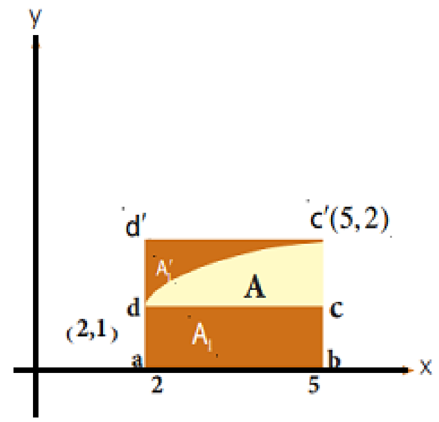
$h = 5 - 2 = 3$

$m = f(2) = \sqrt{2-1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m = 1}$
$A_1 = m.h = (1)(3) = 3$

$M = f(5) = \sqrt{5-1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{M = 2}$
$A_2 = M.h = (2)(3) = 6$

$$A = \frac{A_1 + A_2}{2} = \frac{3+6}{2} = \frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}\ \ (unit)^2$$

المساحة التقريبية للمنطقة $A \ = \ 4\frac{1}{2}\ \ (unit)^2$



مثال (2)/ اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A حيث $A = \{(x,y): 1 \le x \le 2, \quad y = f(x) = x^2 + 1\}$

الحل /

$h = 2 - 1 = 1$

$m = f(1) = (1)^2 + 1 \implies \boxed{m = 2}$

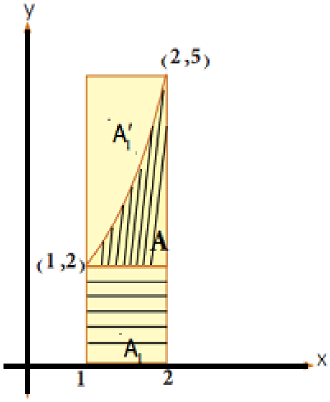
$A_1 = m.h = (2)(1) = 2$

$M = f(2) = (2)^2 + 1 \implies \boxed{M = 5}$

$A_2 = M.h = (5)(1) = 5$

$A = \frac{A_1 + A_2}{2} = \frac{2+5}{2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2} \ (unit)^2$

المساحة التقريبية للمنطقة $A = 3\frac{1}{2} \ (unit)^2$



مثال / اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A حيث $A = \{(x,y): 1 \le x \le 3, \ 0 \le y \le f(x), \quad y = f(x) = x^2 + 1\}$

الحل /

$h = 3 - 1 = 2$

$m = f(1) = (1)^2 + 1 \implies \boxed{m = 2}$

$A_1 = m.h = (2)(2) = 4$

$M = f(3) = (3)^2 + 1 \implies \boxed{M = 10}$

$A_2 = M.h = (10)(2) = 20$

$A = \frac{A_1 + A_2}{2} = \frac{4+20}{2} = \frac{24}{2} = 12 \ (unit)^2$ المساحة التقريبية للمنطقة A

مثال / اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A حيث $A = \{(x,y): 2 \le x \le 5 \ , \quad y = f(x) = 3x^2 - 2\}$

الحل /

$h = 5 - 2 = 3$

$m = f(2) = 3(2)^2 - 2 = 12 - 2 \implies \boxed{m = 10}$

$A_1 = m.h = (10)(3) = 30$

$M = f(5) = 3(5)^2 - 2 = 75 - 2 \implies \boxed{M = 73}$

$A_2 = M.h = (73)(3) = 219$

$A = \frac{A_1 + A_2}{2} = \frac{30+219}{2} = \frac{249}{2} = 124\frac{1}{2} \ (unit)^2$ المساحة التقريبية للمنطقة A

واجب :/ اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A حيث $A = \{(x,y): 1 \le x \le 4, \ 0 \le y \le f(x), \quad y = f(x) = x^2 + 1\}$

مساحة منطقة مستوية بدقة أكبر

① نجزأ الفترة المعطاة $[a,b]$ الى فترات حسب الطلب وليكن عدد الفترات هو (n) وبذلك يكون طول الفترة $h = \frac{b-a}{n}$

حيث يرمز للاعداد من (1,2,...,n) بالرمز (σ) (سكما) حيث أن $(\sigma = 1,2,3,4,\dots,n)$

② نحسب مساحة أكبر منطقة مستطيلة داخل A حيث تساوي $(A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n)$

③ نحسب مساحة أصغر منطقة مستطيلة داخل A حيث تساوي $(\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3 + \cdots + \overline{A}_n)$

④ نجد مساحة المنطقة A حسب القانون التالي $A = \frac{\sum A_n + \sum \overline{A}_n}{N}$ ونلاحظ أنه كلما زادت عدد نقاط التجزئة فأن المحصلة النهائية تقل وتصبح القيمة التقريبية لمساحة المنطقة (A) أكثر دقة .

مثال (3)/ اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A حيث $A = \{(x,y): 2 \le x \le 5 \ , \quad y = x^2 + 1\}$ وذلك باستخدام التجزئة

$(1) \quad \sigma_1 = (2,3,5)$

$(2) \ \sigma_2 = (2,3,4,5)$

الحل /

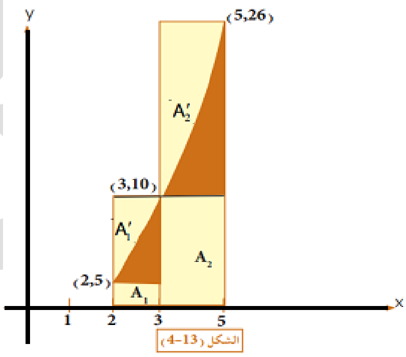
$(1)\sigma_1 = (2,3,5) = [2,3] + [3,5]$

$\therefore A_1 + A_2 = (3-2)m_1 + (5-3)m_2$
$= (1)(5) + (2)(10) = 5 + 20 = 25$

$\therefore \overline{A}_1 + \overline{A}_2 = (3-2)M_1 + (5-3)M_2$
$= (1)(10) + (2)(26) = 10 + 52 = 62$

$$\therefore A = \frac{(A_1 + A_2) + (\overline{A}_1 + \overline{A}_2)}{2} = \frac{25+62}{2} = \frac{87}{2} = 43\frac{1}{2}\ (unit)^2$$

$\therefore$ القيمة التقريبية لمساحة المنطقة $A = 43\frac{1}{2}\ (unit)^2$



الحل /

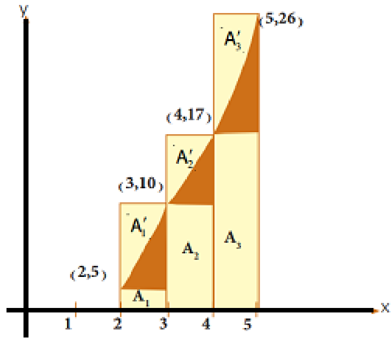
$(2)\sigma_2 = (2,3,4,5) = [2,3] + [3,4] + [4,5]$

$\therefore A_1 + A_2 + A_3 = (3-2)m_1 + (4-3)m_2 + (5-4)m_3$
$= (1)(5) + (1)(10) + (1)(17) = 5 + 10 + 17 = 32$

$\therefore \overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3 = (3-2)M_1 + (4-3)M_2 + (5-4)M_3$
$= (1)(10) + (1)(17) + (1)(26) = 10 + 17 + 26 = 53$

$$\therefore A = \frac{(A_1 + A_2 + A_3) + (\overline{A}_1 + \overline{A}_2 + \overline{A}_3)}{2} = \frac{32+53}{2} = \frac{85}{2}$$

$= 42\frac{1}{2}\ (unit)^2$ القيمة التقريبية لمساحة المنطقة A



واجب /: اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A حيث $A = \{(x,y): 2 \le X \le 5 \ , \ 0 \le y \le f(x), \quad y = f(x) = x^2 - 3\}$

وذلك باستخدام التجزئة $(2)\sigma_2 = (2,3,4,5)$ $\qquad (1)\sigma_1 = (2,3,5)$

المجاميـــع العليا والمجاميع السفلى

- يرمز للمجاميع العليا بالرمز $U(\sigma,f)$ ويرمز للمجاميع السفلى بالرمز $L(\sigma,f)$ حيث أن $U(\sigma,f) \geq L(\sigma,f)$
- سنعتبر الدالة : $f[a,b] \to R$ مستمرة على الفترة $[a,b]$ حيث يمكن أن تكون الدالة متزايدة أو متناقصة أو تحتوي على نقطة حرجة
- أذا كانت التجزيئات متساوية والدالة هي عبارة عن ثابت في هذه الحالة يتساوى المجموع الأعلى مع المجموع الأسفل
- اذا أردنا استخراج m نعوض الرقم الأصغر لبداية الفترة واذا اردنا استخراج M نعوض الرقم الأكبر الذي تنتهي به الفترة
- في حالة أحتواء الفترة الجزئية على نقطة حرجة نحسب قيم بداية الفترة ونهايتها وقيمة النقطة الحرجة وتكون القيمة الصغيرة هي (m) والقيمة الأكبر هي (M)
- أذا لم نشترط أن تكون $f(x) \geq 0$ فأن من المتوقع ظهور المجموعة السفلى $L(\sigma,f)$ عدد موجب أو سالب أو صفروبالمثل للمجموعة العليا $U(\sigma,f)$ والأن سنأخذ أمثلة لتوضيح النقاط السابقة بالتفصيــــــــــــــل

مثال (4)/ لتكن $f(x) = 5 + 2x$ ولتكن $f[1,4] \to R$ فأوجد المجموع الأسفل $L(\sigma,f)$ والمجموع الأعلى $u(\sigma,f)$

الحل /

$\because\ f(x) = 5 + 2x \implies \bar{f}(x) = 2$ (الدالة متزايدة)

$h = \frac{b-a}{3} = \frac{4-1}{3} = 1$ (ثلاث فترات) $\implies \sigma = [1,2],[2,3],[3,4]$

الفترة [a,b]	طول الفترة $h_i = b - a$	m_i	M_i	$L_i = (h_i)(m_i)$	$U_i = (h_i)(M_i)$
[1,2]	1	$m_1 = f(1) = 7$	$M_1 = f(2) = 9$	$L_1 = (1)(7) = 7$	$U_1 = (1)(9) = 9$
[2,3]	1	$m_2 = f(2) = 9$	$M_2 = f(3) = 11$	$L_2 = (1)(9) = 9$	$U_2 = (1)(11) = 11$
[3,4]	1	$m_3 = f(3) = 11$	$M_3 = f(4) = 13$	$L_3 = (1)(11) = 11$	$U_3 = (1)(13) = 13$

$\therefore L(\sigma,f) = \sum h_i\, m_i = 7 + 9 + 11 = 27$

$\therefore U(\sigma,f) = \sum h_i\, M_i = 9 + 11 + 13 = 33$

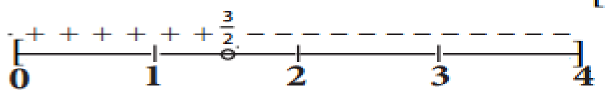
مثال (5)/ لتكن $f(x) = 3x - x^2$ ولتكن $f[0,4] \to R$ فأوجد المجموع الأسفل $L(\sigma, f)$ والمجموع الأعلى $U(\sigma, f)$ مستخدما أربعة تجزيئات منتظمة

الحل /

$\sigma = [0,1], [1,2], [2,3], [3,4]$

$\because\ f(x) = 3x - x^2 \quad \Rightarrow \bar{f}(x) = 3 - 2x \quad \Rightarrow 3 - 2x = 0 \quad \Rightarrow 2x = 3 \quad \Rightarrow x = \frac{3}{2} \in [0,4]$

أي أن العدد الحرج يوجد في الفترة $[1,2]$



اشارة $f'(x)$

$if \quad x = \frac{3}{2} \in [1,2] \quad \Rightarrow \boxed{f(1) = 2} \quad \boxed{f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}} \quad \boxed{f(2) = 2} \qquad M = 2\frac{1}{4} \quad , \quad m = 2$

الفترة [a,b]	طول الفترة $h_i = b - a$	m_i	M_i	$L_i = (h_i)(m_i)$	$U_i = (h_i)(M_i)$
[0,1]	1	$m_1 = f(0) = 0$	$M_1 = f(1) = 2$	$L_1 = (1)(0) = 0$	$U_1 = (1)(2) = 2$
[1,2]	1	$m_2 = f(1) = 2$	$M_2 = f(\frac{3}{2}) = 2\frac{1}{4}$	$L_2 = (1)(2) = 2$	$U_2 = (1)\left(2\frac{1}{4}\right) = 2\frac{1}{4}$
[2,3]	1	$m_3 = f(3) = 0$	$M_3 = f(2) = 2$	$L_3 = (1)(0) = 0$	$U_3 = (1)(2) = 2$
[3,4]	1	$m_4 = f(4) = -4$	$M_4 = f(3) = 0$	$L_4 = (1)(-4) = -4$	$U_4 = (1)(0) = 0$

$\therefore L(\sigma, f) = \sum h_i\, m_i = 0 + 2 + 0 - 4 = -2$

$\therefore U(\sigma, f) = \sum h_i\, M_i = 2 + 2\frac{1}{4} + 2 = 6\frac{1}{4}$

ملاحظة :

تحتوي الفترة الجزئية $[1,2]$ في المثال (5) السابق على نقطة حرجة لذا نحسب قيم بداية الفترة ونهايتها وقيمة النقطة الحرجة وتكون القيمة الصغيرة هي (m) والقيمة الأكبر هي (M)

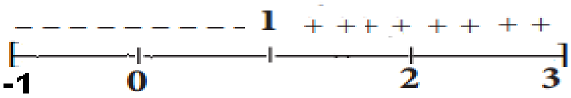
مثال / لتكن $f(x)=x^2-2x+3$ ولتكن $f[-1,3]\to R$ فأوجد المجموع الأسفل $L(\sigma,f)$ والمجموع الأعلى $u(\sigma,f)$ علما أن $(\sigma=-1,0,2,3)$

الحل /

$\sigma=[-1,0],[0,2],[2,3]$

$\because f(x)=x^2-2x+3 \quad \Rightarrow \bar{f}(x)=2x-2 \quad \Rightarrow 2x-2=0 \quad \Rightarrow 2x=2 \quad \Rightarrow x=1\in[0,2]$

أي أن العدد الحرج يوجد في الفترة $[1,2]$



$if \quad x=1\in[0,2] \quad \Rightarrow \boxed{f(0)=3} \quad \boxed{f(1)=2} \quad \boxed{f(2)=3} \quad m=2 \quad , \quad M=3$

الفترة [a,b]	طول الفترة $h_i=b-a$	m_i	M_i	$L_i=(h_i)(m_i)$	$U_i=(h_i)(M_i)$
[-1,0]	1	$m_1=f(0)=3$	$M_1=f(-1)=6$	$L_1=(1)(3)=3$	$U_1=(1)(6)=6$
[0,2]	2	$m_2=f(1)=2$	$M_2=f(0)=3$	$L_2=(2)(2)=4$	$U_2=(2)(3)=6$
[2,3]	1	$m_3=f(2)=3$	$M_3=f(3)=6$	$L_3=(1)(3)=3$	$U_3=(1)(6)=6$

$\therefore L(\sigma,f)=\sum h_i\, m_i=3+4+3=10$

$\therefore U(\sigma,f)=\sum h_i\, M_i=6+6+6=18$

ملاحظة :

في المثال الخارجي (أعلاه) تحتوي الفترة الجزئية $[0,2]$ على نقطة حرجة لذا نحسب قيم بداية الفترة ونهايتها وقيمة النقطة الحرجة وتكون القيمة الصغيرة هي (m) والقيمة الأكبر هي (M)

مثال / لتكن $f(x)=\cos x$ ولتكن $f[0,\pi]\to R$ فأوجد المجموع الأسفل $L(\sigma,f)$ والمجموع الأعلى $u(\sigma,f)$ علما أن $\left(\sigma=0,\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\ ,\ \pi\right)$

الحل /

$\because f(x)=\cos x \quad \Rightarrow \bar{f}(x)=-\sin x \quad \Rightarrow -\sin x=0 \quad \Rightarrow x=0,\pi\in[0,\pi]$

الفترة [a,b]	طول الفترة $h_i=b-a$	m_i	M_i	$L_i=(h_i)(m_i)$	$U_i=(h_i)(M_i)$
$[0,\frac{\pi}{3}]$	$\frac{\pi}{3}$	$m_1=f(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$	$M_1=f(0)=1$	$L_1=\left(\frac{\pi}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$	$U_1=\left(\frac{\pi}{3}\right)(1)=\frac{\pi}{3}$
$[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}]$	$\frac{\pi}{6}$	$m_2=f(\frac{\pi}{2})=0$	$M_2=f(\frac{\pi}{3})=\frac{1}{2}$	$L_2=\left(\frac{\pi}{6}\right)(0)=0$	$U_2=\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{12}$
$[\frac{\pi}{2},\pi]$	$\frac{\pi}{2}$	$m_2=f(\pi)=-1$	$M_2=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$	$L_3=\left(\frac{\pi}{2}\right)(-1)=\frac{-\pi}{2}$	$U_3=\left(\frac{\pi}{2}\right)(0)=0$

$\therefore L(\sigma,f)=\sum h_i\, m_i=\frac{\pi}{6}+0+\frac{-\pi}{2}=\frac{\pi-3\pi}{6}=\frac{-\pi}{3} \quad , \quad U(\sigma,f)=\sum h_i\, M_i=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12}=\frac{5\pi}{12}$

واجب /: لتكن $f(x) = 6x - 3x^2$ ولتكن $f[0,4] \to R$ فأوجد المجموع الأسفل $L(\sigma,f)$ والمجموع الأعلى $u(\sigma,f)$ مستخدما أربعة تجزيئات منتظمة

واجب /: لتكن $f(x) = sinx$ ولتكن $f[0,2\pi] \to R$ فأوجد المجموع الأسفل $L(\sigma,f)$ والمجموع الأعلى $u(\sigma,f)$ مستخدما فترتتين جزئيتين منتظمتين

تمارين $(1-4)$

اوجد كل من $L(\sigma,f)$, $U(\sigma,f)$ لكل مما يأتي :

(1) $f[-2,1] \to R$, $f(x) = 3 - x$

(a) $\sigma = (-2,0,1)$

(b) تقسيم الفترة $[-2,1]$ الى ثلاث فترات جزئية منتظمة

الحل / (a) الفترات هي [0,1] , [-2,0]

$f(x) = 3 - x \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow$ (لاتوجد نقط حرجة والدالة متناقصة)

الفترة [a,b]	طول الفترة $h_i = b - a$	m_i	M_i	$L_i = (h_i)(m_i)$	$U_i = (h_i)(M_i)$
[-2,0]	2	$m_1 = f(0) = 3$	$M_1 = f(-2) = 5$	$L_1 = (2)(3) = 6$	$U_1 = (2)(5) = 10$
[0,1]	1	$m_2 = f(1) = 2$	$M_2 = f(0) = 3$	$L_2 = (1)(2) = 2$	$U_2 = (1)(3) = 3$

$\therefore L(\sigma,f) = \sum h_i\, m_i = 6 + 2 = 8$

$\therefore U(\sigma,f) = \sum h_i\, M_i = 10 + 3 = 13$

الحل / (b) تقسم الفترة الى ثلاث فترات جزئية منتظمة

$$(b) \quad h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-(-2)}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$\because f(x) = 3 - x \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = -1 \neq 0 \quad \Rightarrow$ (لاتوجد نقط حرجة والدالة متناقصة)

الفترة [a,b]	طول الفترة $h_i = b - a$	m_i	M_i	$L_i = (h_i)(m_i)$	$U_i = (h_i)(M_i)$
[-2,-1]	1	$m_1 = f(-1) = 4$	$M_1 = f(-2) = 5$	$L_1 = (1)(4) = 4$	$U_1 = (1)(5) = 5$
[-1,0]	1	$m_2 = f(0) = 3$	$M_2 = f(-1) = 4$	$L_2 = (1)(3) = 3$	$U_2 = (1)(4) = 4$
[0,1]	1	$m_3 = f(1) = 2$	$M_3 = f(0) = 3$	$L_3 = (1)(2) = 2$	$U_3 = (1)(3) = 3$

$\therefore L(\sigma,f) = \sum h_i\, m_i = 4 + 3 + 2 = 9$

$\therefore U(\sigma,f) = \sum h_i\, M_i = 5 + 4 + 3 = 12$

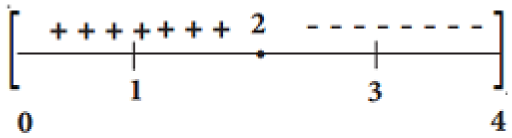
$(2)\quad f[0,4] \to R \quad , \quad f(x) = 4x - x^2$

أذا كان $\sigma = (0, 1, 2, 3, 4)$

الحل / الفترات هي [3,4] , [2,3] , [1,2] , [0,1]

$\because f(x) = 4x - x^2 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = 4 - 2x \quad \Rightarrow \quad 4 - 2x = 0 \quad \Rightarrow 2x = 4 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \in [1,2]$

$\therefore$ توجد نقطة حرجة هي (2,4) وهي نهاية عظمى محلية ولا تجزئ الفترة



الفترة [a,b]	طول الفترة $h_i = b - a$	m_i	M_i	$L_i = (h_i)(m_i)$	$U_i = (h_i)(M_i)$
[0,1]	1	$m_1 = f(0) = 0$	$M_1 = f(1) = 3$	$L_1 = (1)(0) = 0$	$U_1 = (1)(3) = 3$
[1,2]	1	$m_2 = f(1) = 3$	$M_2 = f(2) = 4$	$L_2 = (1)(3) = 3$	$U_2 = (1)(4) = 4$
[2,3]	1	$m_3 = f(3) = 3$	$M_3 = f(2) = 4$	$L_3 = (1)(3) = 3$	$U_3 = (1)(4) = 4$
[3,4]	1	$m_4 = f(4) = 0$	$M_3 = f(3) = 3$	$L_4 = (1)(0) = 0$	$U_4 = (1)(3) = 3$

$\therefore L(\sigma, f) = \sum h_i\, m_i = 0 + 3 + 3 + 0 = 6 \quad , \quad U(\sigma, f) = \sum h_i\, M_i = 3 + 4 + 4 + 3 = 14$

أحياناً يطلب أيجاد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة (A) وكما يلي :

أذا كان $f[0,4] \to R \quad , \quad f(x) = 4x - x^2$ جد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A تحت المنحني أذا كان $\sigma = (0, 1, 2, 3, 4)$

نفس الحل أعلاه ويضاف له

$let\ \boxed{A_1 = L(\sigma, f) = 6}\ \ \boxed{A_2 = U(\sigma, f) = 14} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{A_1 + A_2}{2} = \frac{6 + 14}{2} = \frac{20}{2} = 10$

$\therefore$ القيمة التقريبية لمساحة المنطقة A = $10\ (unit)^2$

$(3)\quad f[1,4] \to R \quad , \quad f(x) = 3x^2 + 2x$

$(a)\quad \sigma = (1,2,4)$

(b) أستخدام ثلاث تجزيئات متساوية

الحل / (a) الفترات هي [1,2] , [2,4]

$f(x) = 3x^2 + 2x \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = 6x + 2 \quad \Rightarrow \quad 6x = -2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-1}{3} \notin [1,4]$

الفترة [a,b]	طول الفترة $h_i = b - a$	m_i	M_i	$L_i = (h_i)(m_i)$	$U_i = (h_i)(M_i)$
[1,2]	1	$m_1 = f(1) = 5$	$M_1 = f(2) = 16$	$L_1 = (1)(5) = 5$	$U_1 = (1)(16) = 16$
[2,4]	2	$m_2 = f(2) = 16$	$M_2 = f(4) = 56$	$L_2 = (2)(16) = 32$	$U_2 = (2)(56) = 112$

$\therefore L(\sigma, f) = \sum h_i\, m_i = 5 + 32 = 37$

$\therefore U(\sigma, f) = \sum h_i\, M_i = 16 + 112 = 128$

الحل / (b) أستخدام ثلاث تجزيئات متساوية

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{3} = \frac{3}{3} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sigma = (1,2,3,4)$

الفترات هي [1,2] , [2,3] , [3,4]

$f(x) = 3x^2 + 2x \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = 6x + 2 \quad \Rightarrow \quad 6x = -2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-1}{3} \notin [1,4]$

الفترة [a,b]	طول الفترة $h_i = b - a$	m_i	M_i	$L_i = (h_i)(m_i)$	$U_i = (h_i)(M_i)$
[1,2]	1	$m_1 = f(1) = 5$	$M_1 = f(2) = 16$	$L_1 = (1)(5) = 5$	$U_1 = (1)(16) = 16$
[2,3]	1	$m_2 = f(2) = 16$	$M_2 = f(3) = 33$	$L_2 = (1)(16) = 16$	$U_2 = (1)(33) = 33$
[3,4]	1	$m_3 = f(3) = 33$	$M_3 = f(4) = 56$	$L_3 = (1)(33) = 33$	$U_3 = (1)(56) = 56$

$\therefore L(\sigma, f) = \sum h_i\, m_i = 5 + 16 + 33 = 54$

$\therefore U(\sigma, f) = \sum h_i\, M_i = 16 + 33 + 56 = 105$

أمثلة أضافية محلولة

مثــال / أذا كــان $f(x)=4x-x^2$, $f[1,5]\to R$ جــد قيمــة تقريبيــة لمســاحة المنطقــة A تحــت المنحنــي اذا $\sigma=(1,2,4,5)$

$f(x)=4x-x^2 \quad \Rightarrow \acute{f}(x)=4-2x \quad \Rightarrow 4-2x=0 \quad \Rightarrow 2x=4 \quad \Rightarrow x=2$

الفترة [a,b]	طول الفترة $h_i=b-a$	m_i	M_i	$L_i=(h_i)(m_i)$	$U_i=(h_i)(M_i)$
[1,2]	1	$m_1=f(1)=3$	$M_1=f(2)=4$	$L_1=(1)(3)=3$	$U_1=(1)(4)=4$
[2,4]	2	$m_2=f(4)=0$	$M_2=f(2)=4$	$L_2=(2)(0)=0$	$U_2=(2)(4)=8$
[4,5]	1	$m_3=f(5)=-5$	$M_3=f(4)=0$	$L_3=(1)(-5)=-5$	$U_3=(1)(0)=0$

$\therefore L(\sigma,f)=3+0-5=-2 \quad , \quad U(\sigma,f)=4+8+0=12$

$let\ \boxed{A_1=L(\sigma,f)=-2}\ \boxed{A_2=U(\sigma,f)=12} \Rightarrow A=\frac{A_1+A_2}{2}=\frac{-2+12}{2}=\frac{10}{2}=5\ (unit)^2$

مثال / أذا كان $f(x)=x^2+1$, $f[1,4]\to R$ جد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A تحت المنحني اذا

$(a)\ \sigma=(1,2,4)$ $\qquad (b)\ \sigma=(1,2,3,4)$

$(a)\ f(x)=x^2+1 \quad \Rightarrow \acute{f}(x)=2x \quad \Rightarrow 2x=0 \quad \Rightarrow x=0\notin[1,4]$ (الدالة متزايدة)

الفترة [a,b]	طول الفترة $h_i=b-a$	m_i	M_i	$L_i=(h_i)(m_i)$	$U_i=(h_i)(M_i)$
[1,2]	1	$m_1=f(1)=2$	$M_1=f(2)=5$	$L_1=(1)(2)=2$	$U_1=(1)(5)=5$
[2,4]	2	$m_2=f(2)=5$	$M_2=f(4)=17$	$L_2=(2)(5)=10$	$U_2=(2)(17)=34$

$\therefore L(\sigma,f)=2+10=12 \quad , \quad U(\sigma,f)=5+34=39$

$let\ \boxed{A_1=L(\sigma,f)=12}\ \boxed{A_2=U(\sigma,f)=39} \Rightarrow A=\frac{A_1+A_2}{2}=\frac{12+39}{2}=\frac{51}{2}=25\frac{1}{2}\ (unit)^2$

$(b)\ f(x)=x^2+1 \quad \Rightarrow \acute{f}(x)=2x \quad \Rightarrow 2x=0 \quad \Rightarrow x=0\notin[1,4]$ (الدالة متزايدة)

الفترة [a,b]	طول الفترة $h_i=b-a$	m_i	M_i	$L_i=(h_i)(m_i)$	$U_i=(h_i)(M_i)$
[1,2]	1	$m_1=f(1)=2$	$M_1=f(2)=5$	$L_1=(1)(2)=2$	$U_1=(1)(5)=5$
[2,3]	1	$m_2=f(2)=5$	$M_2=f(3)=10$	$L_2=(1)(5)=5$	$U_2=(1)(10)=10$
[3,4]	1	$m_3=f(3)=10$	$M_3=f(4)=17$	$L_3=(1)(10)=10$	$U_3=(1)(17)=17$

$\therefore L(\sigma,f)=2+5+10=17 \quad , \quad U(\sigma,f)=5+10+17=32$

$let\ \boxed{A_1=L(\sigma,f)=17}\ \boxed{A_2=U(\sigma,f)=32} \Rightarrow A=\frac{A_1+A_2}{2}=\frac{17+32}{2}=\frac{49}{2}=24\frac{1}{2}\ (unit)^2$

ملاحظة :

أذا ذكر في المثال السابق أستخدم ثلاث تجزيئات متساوية فالحل يكون نفس الفرع (b) السابق بالضبط

واجب //: أذا كان $f(x) = 2x^2 + 1$, $f[1,7] \to R$ جد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A تحت المنحني اذا

$(a)\ \sigma = (1,2,4,7)$ (b) أستخدم أربع تجزيئات متساوية

تعريف التكامــل

أذا كانت $f[a,b] \to R$ دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ فأنه يوجد عدد حقيقي وحيد k بحيث لأي تجزئة (σ) في الفترة $[a,b]$ فأن $L(\sigma,f) \le K \le U(\sigma,f)$

نسمي العدد K التكامل المحدد للدالة (f) على الفترة $[a,b]$ ونرمز له بالرمز $\int_a^b f(x)dx$ ويقرأ التكامل من a الى ل b للدالة (f) ونسمي a , b حدي التكامل المحدد

ملاحظات

① أذا كانت الدالة f مستمرة على الفترة $[a,b]$ فأن $\left\{L(\sigma,f) \le \int_a^b f(x)dx \le U(\sigma,f)\right\}$ وتكون القيمة التقريبية لهذا التكامل $\int_a^b f(x)dx = \frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2}$

② أذا كانت الدالة $f(x) \ge 0$ ، $\forall x \in [a,b]$ فأن $\int_a^b f(x)dx$ يعطي مساحة المنطقة A تحت المنحني f وهو عدد غير سالب ، dx تشير الى أن حدي التكامل ، أما a , b قيمتان للمتغير x

③ أذا كانت الدالة $f(x) \le 0$ ، $\forall x \in [a,b]$ فأن $\int_a^b f(x)dx \le 0$ وهذا لا يدل على المساحة ، أما مساحة المنطقة A فهي ستساوي

$$-\int_a^b f(x)dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

④أن قيمة $\int_a^b f(x)dx$ تتوقف على الفترة $[a,b]$ وعلى قيمة $f(x)$

مثال (1)/ لتكن $f[1,3] \to R$ حيث $f(x) = x^2$

أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^3 x^2 dx$ أذا جزئت الفترة $[1,3]$ الى تجزئتين

الحل / الدالة $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[1,3]$ لأنها كثيرة حدود

$\because f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \bar{f}(x) = 2x \quad \Rightarrow 2x = 0 \quad \Rightarrow x = 0 \notin [1,3]$

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \quad \Rightarrow \quad \sigma = (1,2,3)$

الفترة [a,b]	طول الفترة $h_i = b - a$	m_i	M_i	$L_i = (h_i)(m_i)$	$U_i = (h_i)(M_i)$
[1,2]	1	$m_1 = f(1) = 1$	$M_1 = f(2) = 4$	$L_1 = (1)(1) = 1$	$U_1 = (1)(4) = 4$
[2,3]	1	$m_2 = f(2) = 4$	$M_2 = f(3) = 9$	$L_2 = (1)(4) = 4$	$U_2 = (1)(9) = 9$

$\therefore L(\sigma,f) = \sum h_i m_i = 1 + 4 = 5 \quad , \quad U(\sigma,f) = \sum h_i M_i = 4 + 9 = 13$

$\therefore \int_1^3 x^2 dx = \frac{L(\sigma,f) + U(\sigma,f)}{2} = \frac{5+13}{2} = \frac{18}{2} = 9$ (تقريبا)

مثال (2)/ لتكن $f[2,5] \to R$ حيث $f(x) = 2x - 3$ ، أوجد $\int_2^5 f(x)dx$

الحل / الدالة $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[2,5]$ لأنها كثيرة حدود

$\because f(x) = 2x - 3 \quad \Rightarrow \bar{f}(x) = 2 \quad \Rightarrow 2 \neq 0$

$\because \sigma = (2,3,5) \quad \Rightarrow \quad \sigma = [2,3],[3,5]$

الفترة [a,b]	طول الفترة $h_i = b - a$	m_i	M_i	$L_i = (h_i)(m_i)$	$U_i = (h_i)(M_i)$
[2,3]	1	$m_1 = f(2) = 1$	$M_1 = f(3) = 3$	$L_1 = (1)(1) = 1$	$U_1 = (1)(3) = 3$
[3,5]	2	$m_2 = f(3) = 3$	$M_2 = f(5) = 7$	$L_2 = (2)(3) = 6$	$U_2 = (2)(7) = 14$

$\therefore L(\sigma,f) = \sum h_i m_i = 1 + 6 = 7 \quad , \quad U(\sigma,f) = \sum h_i M_i = 3 + 14 = 17$

$\therefore \int_1^3 (2x-3)dx = \frac{L(\sigma,f) + U(\sigma,f)}{2} = \frac{7+17}{2} = \frac{24}{2} = 12$ (تقريبا)

مثال (3)/ لتكن $f(x) = 3$ ، $f[1,5] \to R$ ، أوجد $\int_1^5 f(x)dx$

الحل / الدالة $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[1,5]$ لأنها كثيرة حدود

$\because\ f(x) = 3 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = 0$

$\because\ \sigma = (1,3,5) \quad \Rightarrow \quad \sigma = [1,3],[3,5]$

الفترة [a,b]	طول الفترة $h_i = b - a$	m_i	M_i	$L_i = (h_i)(m_i)$	$U_i = (h_i)(M_i)$
[1,3]	2	$m_1 = f(1) = 3$	$M_1 = f(3) = 3$	$L_1 = (2)(3) = 6$	$U_1 = (2)(3) = 6$
[3,5]	2	$m_2 = f(3) = 3$	$M_2 = f(5) = 3$	$L_2 = (2)(3) = 6$	$U_2 = (2)(2) = 6$

$\therefore L(\sigma,f) = \sum h_i m_i = 6 + 6 = 12 \quad , \quad U(\sigma,f) = \sum h_i M_i = 6 + 6 = 12$

$\therefore \int_1^5 3dx = \frac{L(\sigma,f) + U(\sigma,f)}{2} = \frac{12+12}{2} = \frac{24}{2} = 12$ (تقريبا)

تمارين $(2 - 4)$

س 1 / أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^3 \frac{3}{x} dx$ بأستخدام التجزئة $\sigma = (1,2,3)$

الحل / الدالة $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[1,3]$ لأنها كثيرة حدود

$\because f(x) = \frac{3}{x} \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = \frac{-3}{x^2} \quad \Rightarrow 0 = \frac{-3}{x^2} \quad \Rightarrow 0 \neq -3$

الفترة [a,b]	طول الفترة $h_i = b - a$	m_i	M_i	$L_i = (h_i)(m_i)$	$U_i = (h_i)(M_i)$
[1,2]	1	$m_1 = f(2) = \frac{3}{2}$	$M_1 = f(1) = 3$	$L_1 = (1)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$	$U_1 = (1)(3) = 3$
[2,3]	1	$m_2 = f(3) = 1$	$M_2 = f(2) = \frac{3}{2}$	$L_2 = (1)(1) = 1$	$U_2 = (1)\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$

$\therefore L(\sigma,f) = \sum h_i m_i = 1 + \frac{3}{2} = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2} \quad , \quad U(\sigma,f) = \sum h_i M_i = 3 + \frac{3}{2} = \frac{6+3}{2} = \frac{9}{2}$

$\therefore \int_1^3 \left(\frac{3}{x}\right) dx = \frac{L(\sigma,f) + U(\sigma,f)}{2} = \frac{\frac{5}{2}+\frac{9}{2}}{2} = \frac{\left(\frac{14}{2}\right)}{2} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2}$

س 2 / لتكن $f(x) = 3x - 3$ ، $f[1,4] \to R$ وزاري 2015 / د1

أوجد قيمة التكامل $\int_1^4 f(x)dx$ بأستخدام التجزئة $\sigma = (1,2,3,4)$

ثم تحقق هندسيا بحساب المنطقة تحت منحني الدالة F

الحل / الدالة $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[1,4]$ لأنها كثيرة حدود

$\because f(x) = 3x - 3 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = 3 > 0$ (لاتوجد نقطة حرجة و الدالة متزايدة)

الفترة [a,b]	طول الفترة $h_i = b - a$	m_i	M_i	$L_i = (h_i)(m_i)$	$U_i = (h_i)(M_i)$
[1,2]	1	$m_1 = f(1) = 0$	$M_1 = f(2) = 3$	$L_1 = (1)(0) = 0$	$U_1 = (1)(3) = 3$
[2,3]	1	$m_2 = f(2) = 3$	$M_2 = f(3) = 6$	$L_2 = (1)(3) = 3$	$U_2 = (1)(6) = 6$
[3,4]	1	$m_3 = f(3) = 6$	$M_3 = f(4) = 9$	$L_3 = (1)(6) = 6$	$U_3 = (1)(9) = 9$

$\therefore L(\sigma,f) = \sum h_i m_i = 0 + 3 + 6 = 9 \quad , \quad U(\sigma,f) = \sum h_i M_i = 3 + 6 + 9 = 18$

$$\therefore \int_1^4 (3x-3)dx = \frac{L(\sigma,f) + U(\sigma,f)}{2} = \frac{9+18}{2} = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2}$$

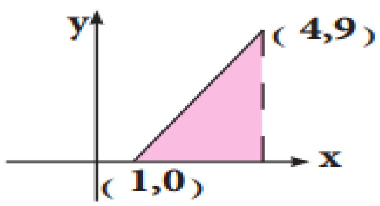
الحل الهندسي :

$f(1) = 3 - 3 = 0 \Rightarrow (1,0)$

$f(4) = 12 - 3 = 9 \quad \Rightarrow \quad (4,9)$

A مساحة $= \left(\frac{1}{2}\right)$ (طول القاعدة) (الأرتفاع)

A مساحة $= \left(\frac{1}{2}\right)(4-1)(9) = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2}$



س 3 / أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_2^4 (3x^2 - 3)dx$ بأستخدام التجزئة $\sigma = (2,3,4)$

الحل / الفترات $[2,3],[3,4]$

$\because f(x) = 3x^2 - 3 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = 6x \quad \Rightarrow 0 = 6x \quad \Rightarrow x = 0 \notin [2,4]$ (الدالة متزايدة)

الفترة [a,b]	طول الفترة $h_i = b - a$	m_i	M_i	$L_i = (h_i)(m_i)$	$U_i = (h_i)(M_i)$
[2,3]	1	$m_1 = f(2) = 9$	$M_1 = f(3) = 24$	$L_1 = (1)(9) = 9$	$U_1 = (1)(24) = 24$
[3,4]	1	$m_2 = f(3) = 24$	$M_2 = f(4) = 45$	$L_2 = (1)(24) = 24$	$U_2 = (1)(45) = 45$

$\therefore L(\sigma,f) = \sum h_i m_i = 9 + 24 = 33 \quad , \quad U(\sigma,f) = \sum h_i M_i = 24 + 45 = 69$

$$\therefore \int_2^4 (3x^2-3)dx = \frac{L(\sigma,f) + U(\sigma,f)}{2} = \frac{33+69}{2} = \frac{102}{2} = 51$$

س 4 / أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_{-3}^{2} f(x)dx$ حيث أن $f(x) = -4$

الحل / الدالة $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[-3,2]$ لأنها كثيرة حدود

$\because f(x) = -4 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = 0$

الفترة [a,b]	طول الفترة $h_i = b - a$	m_i	M_i	$L_i = (h_i)(m_i)$	$U_i = (h_i)(M_i)$
[-3,0]	3	$m_1 = f(-3) = -4$	$M_1 = f(0) = -4$	$L_1 = (3)(-4) = -12$	$U_1 = (3)(-4) = -12$
[0,2]	2	$m_2 = f(0) = -4$	$M_2 = f(2) = -4$	$L_2 = (2)(-4) = -8$	$U_2 = (2)(-4) = -8$

$\therefore L(\sigma, f) = \sum h_i m_i = -12 - 8 = -20 \quad , \quad U(\sigma, f) = \sum h_i M_i = -12 - 8 = -20$

أو نحل حسب التجزيئات التالية

الفترة [a,b]	طول الفترة $h_i = b - a$	m_i	M_i	$L_i = (h_i)(m_i)$	$U_i = (h_i)(M_i)$
[-3,-1]	2	$m_1 = f(-3) = -4$	$M_1 = f(-1) = -4$	$L_1 = (3)(-4) = -12$	$U_1 = (3)(-4) = -12$
[-1,2]	3	$m_2 = f(-1) = -4$	$M_2 = f(2) = -4$	$L_2 = (2)(-4) = -8$	$U_2 = (2)(-4) = -8$

$\therefore L(\sigma, f) = \sum h_i m_i = -12 - 8 = -20 \quad , \quad U(\sigma, f) = \sum h_i M_i = -12 - 8 = -20$

$$\therefore \int_{-3}^{2} -4dx = \frac{L(\sigma, f) + U(\sigma, f)}{2} = \frac{-20 - 20}{2} = \frac{-40}{2} = -20$$

س 5/ أوجد قيمة التكامل $\int_{1}^{5} x^3 dx$ بأستخدام أربعة تجزيئات ممكنة

الحل /

$\because \quad f(x) = x^3 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = 3x^2 > 0$ (لاتوجد نقطة حرجة و الدالة متزايدة)

$$h = \frac{b - a}{n} = \frac{5 - 1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

الفترات $[1,2], [2,3], [3,4], [4,5]$

الفترة [a,b]	طول الفترة $h_i = b - a$	m_i	M_i	$L_i = (h_i)(m_i)$	$U_i = (h_i)(M_i)$
[1,2]	1	$m_1 = f(1) = 1$	$M_1 = f(2) = 8$	$L_1 = (1)(1) = 1$	$U_1 = (1)(8) = 8$
[2,3]	1	$m_2 = f(2) = 8$	$M_2 = f(3) = 27$	$L_2 = (1)(8) = 8$	$U_2 = (1)(27) = 27$
[3,4]	1	$m_3 = f(3) = 27$	$M_3 = f(4) = 64$	$L_3 = (1)(27) = 27$	$U_3 = (1)(64) = 64$
[4,5]	1	$m_4 = f(4) = 64$	$M_4 = f(5) = 125$	$L_4 = (1)(64) = 64$	$U_4 = (1)(125) = 125$

$\therefore L(\sigma, f) = \sum h_i m_i = 1 + 8 + 27 + 64 = 100 \quad , \quad U(\sigma, f) = \sum h_i M_i = 8 + 27 + 64 + 125 = 224$

$$\therefore \int_{1}^{5} x^3 dx = \frac{L(\sigma, f) + U(\sigma, f)}{2} = \frac{100 + 224}{2} = \frac{324}{2} = 162$$

أمثلة أضافية محلولة

مثـال/ لـتكن $f(x) = 3x^2 - 4x$ ولـتكن $f[0,3] \to R$ أوجـد قيمـة تقريبية للتكامل باستخدام التجزئة $\sigma = (0,1,2,3)$ أو بأستخدام ثلاث تجزيئات متساوية

الحل /

$$\because\ f(x) = 3x^2 - 4x \quad \Rightarrow \bar{f}(x) = 6x - 4 \quad \Rightarrow 6x = 4 \quad \Rightarrow x = \frac{2}{3} \in [0,1]$$

$$if\ \ x = \frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}\ \boxed{f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-4}{3}}\ \boxed{f(1) = -1} \Rightarrow \boxed{m_i = \frac{-4}{3}\ \text{أصغر قيمة}}\ \boxed{M_i = 0\ \text{أكبر قيمة}}$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

الفترات $[0,1], [1,2], [2,3]$

الفترة [a,b]	طول الفترة $h_i = b - a$	m_i	M_i	$L_i = (h_i)(m_i)$	$U_i = (h_i)(M_i)$
[0,1]	1	$m_1 = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-4}{3}$	$M_1 = f(0) = 0$	$L_1 = (1)\left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{-4}{3}$	$U_1 = (1)(0) = 0$
[1,2]	1	$m_2 = f(1) = -1$	$M_2 = f(2) = 4$	$L_2 = (1)(-1) = -1$	$U_2 = (1)(4) = 4$
[2,3]	1	$m_3 = f(2) = 4$	$M_3 = f(3) = 15$	$L_3 = (1)(4) = 4$	$U_3 = (1)(15) = 15$

$$\therefore L(\sigma, f) = \sum h_i m_i = \frac{-4}{3} - 1 + 4 = \frac{5}{3} \quad , \quad U(\sigma, f) = \sum h_i M_i = 0 + 4 + 15 = 19$$

$$\therefore \int_0^3 f(x)dx = \frac{L(\sigma,f) + U(\sigma,f)}{2} = \frac{\left(\frac{5}{3}\right) + 19}{2} = \frac{\left(\frac{5+57}{3}\right)}{2} = \frac{\left(\frac{62}{3}\right)}{2} = \left(\frac{62}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{31}{3}$$

مثال / لتكن $f(x) = \sin x$ ولتكن $f[0,\pi] \to R$ أوجد قيمة تقريبية للتكامل بأستخدام تجزئتين متساويتان

الحل /

$\because f(x) = \sin x \quad \Rightarrow \bar{f}(x) = \cos x \quad \Rightarrow 0 = \cos x \quad \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} \in [0,\pi]$

$if \;\; x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{f(0) = 0} \; \boxed{f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1} \; \boxed{f(\pi) = 0} \Rightarrow$ $\boxed{m_i = 0}$ أصغر قيمة $\boxed{M_i = 1}$ أكبر قيمة

الفترة [a,b]	طول الفترة $h_i = b - a$	m_i	M_i	$L_i = (h_i)(m_i)$	$U_i = (h_i)(M_i)$
$[0,\frac{\pi}{2}]$	$\frac{\pi}{2}$	$m_1 = f(0) = 0$	$M_1 = f(\frac{\pi}{2}) = 1$	$L_1 = \left(\frac{\pi}{2}\right)(0) = 0$	$U_1 = \left(\frac{\pi}{2}\right)(1) = \frac{\pi}{2}$
$[\frac{\pi}{2},\pi]$	$\frac{\pi}{2}$	$m_2 = f(\pi) = 0$	$M_2 = f(\frac{\pi}{2}) = 1$	$L_2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)(0) = 0$	$U_2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)(1) = \frac{\pi}{2}$

$\therefore L(\sigma,f) = \sum h_i m_i = 0 + 0 = 0 \quad , \quad U(\sigma,f) = \sum h_i M_i = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$

$\therefore \int_0^{\pi} \sin x \, dx = \frac{L(\sigma,f) + U(\sigma,f)}{2} = \frac{0+\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

****

واجبات

س 1 : أوجد قيمة التكامل $\int_0^1 x^2\, dx$ بأستخدام التجزئة $\sigma = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\right)$ أي بأستخدام أربع تجزيئات منتظمة

س 2 : أوجد قيمة التكامل $\int_0^1 x^2\, dx$ بأستخدام التجزئة $\sigma = \left(0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{9}{10}, 1\right)$

س 3 : لتكن $f(x) = \sin x$ ولتكن $f[-\pi,\pi] \to R$ أوجد قيمة تقريبية للتكامل بأستخدام أربع تجزيئات منتظمة

س 4 : لتكن $f(x) = \sin x$ ولتكن $f\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right] \to R$ أوجد قيمة تقريبية للتكامل باستخدام $\sigma = \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{6}, 0, \frac{\pi}{6}\right)$

النظرية الأساسية للتكامـــــــــل – الدالة المقابلة

أذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ فأنه توجد دالة F مستمرة على الفترة $[a,b]$ بحيث :

$$\overline{F}(x) = f(x) \quad , \quad \forall x \in (a,b)$$

ويكون $\int_a^b f(x) = F(b) - F(a)$ حيث تسمى F الدالة المقابلة للدالة f على الفترة $[a,b]$

مثال (1)/ أذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[1,5]$ بحيث $F(x) = 3x^2$ دالة مقابلة للدالة f فجد قيمة $\int_1^5 f(x)dx$

الحل /

$$\int_1^5 f(x) = F(5) - F(1) = 3(25) - 3(1) = 75 - 3 = 72$$

ويمكن أن نكتب ذلك بالصورة الأتية :

$$\int_1^5 f(x) = [F(X)]_1^5 = [3x^2]_1^5 = 75 - 3 = 72$$

مثال (2)/ أذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ و أن الدالة المقابلة للدالة f هي :

$F(x) = \sin x \quad , \quad F:\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \to R$

فأوجد قيمة $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

الحل /

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) = [F(X)] = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1 - 0 = 0$$

مثال (3)/ أثبت أن الدالة $F(x) = x^3 + 2$ ، $F:[1,3] \to R$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x) = 3x^2$

الحل / $\because$ $F(x) = x^3 + 2$ هي دالة مستمرة وقابلة للأشتقاق على R (لأنها كثيرة حدود)

$\therefore$ F هي دالة مستمرة على $[1,3]$ و قابلة للأشتقاق على $(1,3)$

$\because \overline{F}(X) = 3x^2 = f(x) \qquad \forall x \in (1,3)$

$\therefore$ F هي دالة مقابلة للدالة f على $[1,3]$

مثال (4)/ أثبت أن الدالة $F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ ، $F: R \to R$ هي دالة مقابلة للدالة

$f(x) = cos2x \quad , \quad f: R \to R$

ثم جد قيمة $\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos2xdx$

الحل /

$\because$ $f(x) = cos2x$ هي دالة مستمرة و قابلة للأشتقاق

$F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$ هي دالة مستمرة وقابلة للأشتقاق أيضا

$\overline{F}(x) = \frac{1}{2}cos2x\,(2) = cos2x = f(x) \qquad \forall\, x \in R$

$\therefore$ F هي دالة مقابلة للدالة f

$$\because \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{4}} cos2xdx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left[\frac{1}{2}\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - \left[\frac{1}{2}\sin 2(0)\right] = \left[\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] - \left[\frac{1}{2}\sin 0\right] = \frac{1}{2}(1) - \frac{1}{2}(0) = \frac{1}{2}$$

والجدول أدناه يوضح العلاقة بين f والدالة المقابلة لها F

الدالة $f(x)$	الدالة المقابلة لها $F(X)$
a	ax
$x^n \quad , \quad n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$ax^n \quad , \quad n \neq -1$	$\frac{a\,x^{n+1}}{n+1}$
$[f(x)]^n \,.\, \overline{f}(x) \quad , \quad n \neq -1$	$\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$
$\sin(ax+b)$	$\frac{-1}{a}\cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$\sec^2(ax+b)$	$\frac{1}{a}tan(ax+b)$
$csc^2(ax+b)$	$\frac{-1}{a}cot(ax+b)$
$\sec ax \tan ax$	$\frac{1}{a}sec\,ax$
$\csc ax \cot ax$	$\frac{-1}{a}csc\,ax$

من الجدول نستنتج $\int f(x)dx = F(x) + c$

مجموعة الدوال المقابلة لأية دالة f كما في الجدول أعلاه هي F+C حيث أن C عدد ثابت حقيقي

مثال (5)/ أوجد $\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^2\, x\, dx$

الحل /

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx = [tan\ x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1 - 0 = 1$$

مثال (6)/ أوجد $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x\, dx$

الحل /

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x dx = -[cot\ x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\left[\cot\frac{\pi}{2} - \cot\frac{\pi}{4}\right] = -[0 - 1] = 1$$

مثال (7)/ أوجد $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x\ \tan x\ dx$

الحل /

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec x\ \tan x\ dx = [sec\ x]_0^{\frac{\pi}{3}} = \sec\frac{\pi}{3} - \sec 0 = \frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}} - \frac{1}{\cos 0} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)} - 1 = 2 - 1 = 1$$

مثال (8)/ أوجد $\int_1^3 x^3\ dx$

الحل /

$$\int_1^3 x^3\ dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \left[\frac{81}{4} - \frac{1}{4}\right] = \frac{80}{4} = 20$$

خواص التكامـــل المحدد

أولاً: ① أذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$ وكانت $\boldsymbol{f(x) \geq 0 \ , \ \forall x \in [a,b]}$ فأن $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ مثلاً :

$(a) \quad f(x) = x^2 \geq 0 \quad , \quad \forall x \epsilon [-1,2]$ لأن : $\int_{-1}^{2} x^2\,dx \geq 0$

$(b) \quad f(x) = 3 > 0 \quad , \quad \forall x \epsilon [-2,3]$ لأن : $\int_{-2}^{3} (3)\,dx > 0$

$(c) \quad f(x) = (x+1) > 0 \quad , \quad \forall x \epsilon [2,3]$ لأن : $\int_{2}^{3} (x+1)\,dx > 0$

② أذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$ وكانت $\boldsymbol{f(x) \leq 0 \ , \ \forall x \in [a,b]}$ فأن $\int_a^b f(x) \leq 0$ مثلاً :

$(a) \quad f(x) < 0 \quad , \quad \forall x \epsilon [1,2]$ لأن : $\int_{1}^{2} (-2)\,dx < 0$

$(b) \quad f(x) < 0 \quad , \quad \forall x \epsilon [-2,-1]$ لأن : $\int_{-2}^{-1} x\,dx < 0$

ثانيا: أذا كانت f دالة مستمرة على $[a,b]$ وكان C عدد حقيقي ثابت فأن

$$\int_a^b Cf(x) = C\int_a^b f(x)$$

مثال (9)/ أذا كان $\int_2^5 f(x)dx = 8$ فأوجد $\int_2^5 5f(x)dx$

الحل /

$$\int_2^5 5f(x)dx = 5\int_2^5 f(x)dx = 5(8) = 40$$

ثالثا: أذا كانت f_1 , f_2 دالتين مستمرة على $[a, b]$ فأن $\int_a^b (f_1 \pm f_2) = \int_a^b f_1 \pm \int_a^b f_2$

ويمكننا تعميم هذه الخاصية على مجموع أي عدد محدد من الدوال المستمرة على $[a, b]$

مثال (10)/ أذا كانت $\int_1^3 f_2(x)dx = 17$ ، $\int_1^3 f_1(x)dx = 15$ فأوجد كلا من :

$$\int_1^3 (f_1(x) - f_2(x))dx \quad , \quad \int_1^3 (f_1(x) + f_2(x))dx$$

الحل /

$$\int_1^3 (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_1^3 f_1(x)dx + \int_1^3 f_2(x)dx = 15 + 17 = 32$$

$$\int_1^3 (f_1(x) - f_2(x))dx = \int_1^3 f_1(x)dx - \int_1^3 f_2(x)dx = 15 - 17 = -2$$

مثال (11)/ أذا كانت $f(x) = 3x^2 + 2x$ فأوجد $\int_1^2 f(x)dx$

الحل /

$$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 (3x^2 + 2x)dx = \int_1^2 3x^2dx + \int_1^2 2xdx$$

$$= [x^3]_1^2 + [x^2]_1^2 = (8 - 1) + (4 - 1) = 7 + 3 = 10$$

رابعا: أذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على $[a, b]$ وكانت $c \in (a, b)$ فأن :

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

مثال (12)/ أذا كانت $\int_3^7 f(x)dx = 8$ ، $\int_1^3 f(x)dx = 5$ فأوجد $\int_1^7 f(x)dx$

الحل /

$$\int_1^7 f(x)dx = \int_1^3 f(x)dx + \int_3^7 f(x)dx = 5 + 8 = 13$$

مثال (13)/ أذا كان $f(x)=|x|$ أوجد $\int_{-3}^{4} f(x)dx$

الحل / f دالة مستمرة على $[-3,4]$ ولها قاعدتان هما :

$$f(x)=\begin{cases} x & \forall x\ge 0 \\ -x & \forall x<0 \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-3}^{4} f(x)dx = \int_{-3}^{0}(-x)dx + \int_{0}^{4}(x)dx = \left[\frac{-x^2}{2}\right]_{-3}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{4}$$

$$= \left[0-\left(\frac{-9}{2}\right)\right] + \left[\frac{16}{2}-0\right] = \frac{9+16}{2} = \frac{25}{2}$$

مثال (14)/ أذا كان $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \forall x\ge 1 \\ 3 & \forall x<1 \end{cases}$ فأوجد $\int_{0}^{5} f(x)dx$

الحل / الدالة f مستمرة على الفترة $[0,5]$ وذلك لأنها مستمرة عند $(x=1)$ لأن

$(i)\ f(1)=2(1)+1=3$ معرفة

$$(ii)\ \lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to(+)} (2x+1) = 3 = L_1 \\ \lim_{x\to(-)} 3 = 3 = L_2 \end{cases}$$

$\because L_1 = L_2$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(x) = 3$ موجودة $\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

$\therefore$ الدالة f مستمرة على كل من $\{x: x>1\}$, $\{x: x<1\}$

$\because$ الدالة f مستمرة على الفترة $[0,5]$

$$\therefore \int_0^5 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx = \int_0^1 3dx + \int_1^5 (2x+1)dx$$

$$= [3x]_0^1 + [x^2+x]_1^5 = [3-0]+[30-2] = 3+28 = 31$$

مثال / أذا كان $f(x)=\begin{cases}3x^2+2x & \forall x\geq 1\\ 6x-1 & \forall x<1\end{cases}$ فأوجد $\int_{-2}^{3} f(x)dx$

الحل / الدالة f مستمرة على الفترة $[-2,3]$ وذلك لأنها مستمرة عند $(x=1)$ لأن

$(i)\ f(1)=3(1)^2+2(1)=5$ معرفة

$$(ii)\ \lim_{x\to 1} f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to(+)}(3x^2+2x)=5=L_1\\ \lim_{x\to(-)}(6x-1)=5=L_2\end{cases}$$

$\because L_1=L_2$

$\therefore\ \lim_{x\to 1} f(x)=5$ موجودة $\Rightarrow\ \lim_{x\to 1} f(x)=f(1)$

$\therefore$ الدالة f مستمرة على كل من $\{x: x>1\}$, $\{x: x<1\}$

$\because$ الدالة f مستمرة على الفترة $[-2,3]$

$$\therefore \int_{-2}^{3} f(x)dx=\int_{-2}^{1} f(x)dx+\int_{1}^{3} f(x)dx = \int_{-2}^{1}(6x-1)dx+\int_{1}^{3}(3x^2+2x)dx$$

$$=[3x^2-x]_{-2}^{1}+[x^3+x^2]_{1}^{3}=[2-14]+[36-2]=-12+34=22$$

مثال / أذا كان $f(x)=|x|+3$ فأوجد $\int_{-3}^{4} f(x)dx$

الحل / نفس طريقة أثبات الحل في السؤال السابق

$$f(x)=\begin{cases}x+3 & \forall x\geq 0\\ -x+3 & \forall x<0\end{cases}$$

$$\int_{-3}^{4} f(x)dx=\int_{-3}^{0}(3-x)dx+\int_{0}^{4}(x+3)dx=\left[3x-\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}+3x\right]_{0}^{4}$$

$$=\left[0-\left(-9-\frac{9}{2}\right)\right]+\left[\left(\frac{16}{2}+12\right)-0\right]=\frac{27+40}{2}=\frac{67}{2}$$

خامسا:

$$(a)\int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad , \quad (b)\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)dx$$

مثلاً :

$$(a)\int_3^3 x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_3^3 = \frac{9}{2}-\frac{9}{2} = 0$$

$$(b)\int_3^2 3x^2\,dx = -\int_2^3 3x^2\,dx$$

$$= -[x^3]_2^3 = -[27-8] = -27+8 = -19$$

تمارين (3 – 4)

س 1/ أحسب كلا من التكاملات التالية :

$$(a)\int_{-2}^{2}(3x-2)\,dx = \left[3\frac{x^2}{2}-2x\right]_{-2}^{2} = \left[\frac{3(4)}{2}-4\right]-\left[\frac{3(4)}{2}+4\right] = (6-4)-(6+4) = 2-10 = -8$$

$$(b)\int_1^2(x^{-2}+2x+1)\,dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{2x^2}{2}+x\right]_1^2 = \left[\frac{-1}{x}+x^2+x\right]_1^2$$

$$= \left(\frac{-1}{2}+4+2\right)-(-1+1+1) = 5\frac{1}{2}-1 = 4\frac{1}{2}$$

$$(c)\int_1^3(x^4+4x)\,dx = \left[\frac{x^5}{5}+2x^2\right]_1^3 = \left[\frac{243}{5}+18\right]-\left[\frac{1}{5}+2\right] = \frac{242}{5}+16 = \frac{242+80}{5} = \frac{322}{5}$$

$(d)\ \int_0^2 |x-1|\ dx$

$\because |x-1| = \begin{cases} x-1 & \forall x \geq 1 \\ 1-x & \forall x < 1 \end{cases}$

$\therefore \int_0^2 |x-1|\ dx = \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 (x-1)\,dx = \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2$

$= \left[\left(1-\frac{1}{2}\right) - 0\right] + \left[(2-2) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

$(e)\ \int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} (x + \cos x)\ dx = \left[\frac{x^2}{2} + \sin x\right]_{\frac{-\pi}{2}}^{0} = \left[\frac{(0)^2}{2} + \sin(0)\right] - \left[\frac{\left(\frac{-\pi}{2}\right)^2}{2} + \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right]$

$= [0+0] - \left[\frac{\left(\frac{\pi^2}{4}\right)}{2} - 1\right] = \frac{-\pi^2}{8} + 1 = 1 - \frac{\pi^2}{8}$

ملاحظة $\sin(-x) = -\sin x$

$(f)\ \int_3^2 \frac{x^3-1}{x-1}\ dx = -\int_2^3 \frac{x^3-1}{x-1}\ dx = -\int_2^3 \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = -\int_2^3 (x^2+x+1)$

$= -\left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_2^3 = -\left(\left[\frac{27}{3} + \frac{9}{2} + 3\right] - \left[\frac{8}{3} + \frac{4}{2} + 2\right]\right) = -\left(\frac{54+27+18-16-12-12}{6}\right) = \frac{-59}{6}$

$(g)\ \int_1^3 \frac{2x^3 - 4x^2 + 5}{x^2}\ dx = \int_1^3 (2x - 4 + 5x^{-2})\ dx = \left[x^2 - 4x + \frac{5x^{-1}}{-1}\right]_1^3 = \left[x^2 - 4x - \frac{5}{x}\right]_1^3$

$= \left[9 - 12 - \frac{5}{3}\right] - [1 - 4 - 5] = -3 - \frac{5}{3} + 8 = 5 - \frac{5}{3} = \frac{15-5}{3} = \frac{10}{3}$

س 2/ أثبت أن الدالة $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة f(x) حيث

$F:\left[0,\frac{\pi}{6}\right] \to R$ حيث $F(x) = \sin x + x$

$f:\left[0,\frac{\pi}{6}\right] \to R$ حيث $f(x) = 1 + cosx$ ثم أحسب $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx$

الحل / لـكي نثبت أن $F(x)$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$

نثبت أن $F(x)$ مستمرة على الفترة $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$

$$\lim_{x\to a} F(x) = \lim_{x\to a}[\sin x + x] = sin\, a + a \quad , \quad \forall\, a \in \left[0,\frac{\pi}{6}\right]$$

$$F(a) = \sin a + a$$

$$\lim_{x\to a} F(x) = F(a)$$

$\therefore$ $f(x)$ مستمرة في مجالها

$$F(x) = \sin x + x \quad \Rightarrow \quad \bar{F}(x) = \cos x + 1 = f(x)$$

$\therefore$ $F(x)$ دالة مقابلة للدالة $f(x)$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx = F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F(0) = \left[\sin\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}\right] - [\sin 0 - 0] = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} = \frac{3+\pi}{6}$$

س 3/ أوجد كلا من التكاملات التالية :

$$(a)\quad \int_1^4 (x-2)(x+1)^2\, dx = \int_1^4 (x-2)(x^2+2x+1)\,dx = \int_1^4 (x^3+2x^2+x-2x^2-4x-2)dx$$

$$= \int_1^4 (x^3-3x-2)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} - 2x\right]_1^4 = [64-24-8] - \left[\frac{1}{4} - \frac{3}{2} - 2\right]$$

$$= 32 - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} + 2 = 34 + \frac{5}{4} = \frac{136+5}{4} = \frac{141}{4}$$

$(b)\ \int_{-1}^{1} |x+1|\ dx$

$$f(x) = |x+1| = \begin{cases} x+1 & \forall x \geq -1 \\ 1-x & \forall x < -1 \end{cases}$$ (خارج الفترة)

$$\therefore \int_{-1}^{1} |x+1|\,dx = \int_{-1}^{1} (x+1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{2}+1\right) - \left(\frac{1}{2}-1\right) = 1+1 = 2$$

$(c)\ \int_{2}^{3} \frac{x^4-1}{x-1}\ dx = \int_{2}^{3} \frac{(x^2-1)(x^2+1)}{x-1}\ dx = \int_{2}^{3} \frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x-1} dx = \int_{2}^{3} (x+1)(x^2+1) dx$

$$= \int_{2}^{3} (x^3+x^2+x+1)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right]_{2}^{3} = \left[\frac{81}{4} + 9 + \frac{9}{2} + 3\right] - \left[4 + \frac{8}{3} + 2 + 2\right]$$

$$= \frac{81}{4} + \frac{9}{2} + 12 - 8 - \frac{8}{3} = 4 + \frac{81}{4} + \frac{9}{2} - \frac{8}{3} = \frac{48+243+54-32}{12} = \frac{313}{12}$$

$(d)\ \int_{0}^{1} \sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2\ dx = \int_{0}^{1} \sqrt{x}(x+4\sqrt{x}+4)\ dx = \int_{0}^{1} x^{\left(\frac{1}{2}\right)} \left(x + 4x^{\left(\frac{1}{2}\right)} + 4\right) dx$

$$= \int_{0}^{1} \left(x^{\left(\frac{3}{2}\right)} + 4x + 4x^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right) dx = \left[\frac{x^{\left(\frac{5}{2}\right)}}{\left(\frac{5}{2}\right)} + 2x^2 + 4\frac{x^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{\left(\frac{3}{2}\right)}\right]_{0}^{1} = \left[\frac{2}{5} + 2 + \frac{8}{3}\right] - 0 = \frac{6+30+40}{15} = \frac{76}{15}$$

س 4/ أذا كانت $f(x) = \begin{cases} 2x & \forall x \geq 3 \\ 6 & \forall x < 3 \end{cases}$ فأوجد $\int_{1}^{4} f(x)dx$

الحل / نبرهن أن الدالة $f(x)$ مستمرة على الفترة $[1,4]$

$(i)\ \ f(3) = 2(3) = 6 \quad \Rightarrow$ (الدالة معرفة عندما $x = 3$)

$$(ii)\ \ \lim_{x\to(3)} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to(+)} (2x) = 2(3) = 6 = L_1 \\ \lim_{x\to(-)} (6) = 6 = L_2 \end{cases} \Rightarrow L_1 = L_2$$

$(iii)\ \ \lim_{x\to(3)} f(x) = f(3) = 6 \quad \Rightarrow$ (الدالة مستمرة عندما $x = 3$)

$$\therefore \int_{1}^{4} f(x)dx = \int_{1}^{3} 6dx + \int_{3}^{4} 2xdx = [6x]_{1}^{3} + [x^2]_{3}^{4} = [18-6] + [16-9] = 12 + 7 = 19$$

س 5/ أذا كان $f(x)=\begin{cases}3x^2 & \forall x\geq 0\\ 2x & \forall x<0\end{cases}$ فأوجد $\int_{-1}^{3} f(x)dx$ وزاري 2014 / د1

الحل / نبرهن أن الدالة $f(x)$ مستمرة على الفترة $[-1,3]$ وذلك بأثبات أنها مستمرة عند $(x=0)$

$(i)\quad f(0)=3(0)^2=0 \qquad \Rightarrow$ (الدالة معرفة عندما $x=0$)

$$(ii)\quad \lim_{x\to(0)} f(x)=\begin{cases}\lim_{x\to0^+}(3x^2)=3(0)^2=0=L_1\\ \lim_{x\to0^-}(2x)=2(0)=0=L_2\end{cases} \Rightarrow L_1=L_2$$

$(iii)\quad \lim_{x\to(0)} f(x)=f(0)=6 \qquad \Rightarrow$ (الدالة مستمرة عندما $x=0$)

$$\therefore \int_{-1}^{3} f(x)dx=\int_{-1}^{0}2xdx+\int_{0}^{3}3x^2dx=[x^2]_{-1}^{0}+[x^3]_{0}^{3}=[0-1]+[27-0]=-1+27=26$$

****

التكامـــل الغيـــر المحدد

أذا كانت للدالة f المستمرة على الفترة $[a,b]$ دالة مقابلة F فأنه يوجد عدد لا نهائي من الدوال المقابلة للدالة f وكل منها يساوي F + C حيث C يمثل عدد ثابت والفرق بين أكثر من أثنين منها يساوي عدد ثابت

- تســـمى مجموعـــة الدوال المقابلـــة على الصورة F+C بالتكامل غير المحدد للدالـة f المستمرة على الفترة $[a,b]$ ويرمز لها بالرمز $\int f(x)dx$ أذا كان رمز متغير الدالة هو x
- يصطلح على كتابة التكامل غير المحدد بالصورة $\int f(x)dx=F(x)+C\ ,\ C\in R$
- عملية التكامل غير المحدد هو العملية المعاكسة لعملية التفاضل أي أحداهما تنهي دور الأخرى

مثال (1)/ أوجد التكامل للدوال التالية :

$(a)\quad \int(3x^2+2x+1)dx=3\frac{x^3}{3}+2\frac{x^2}{2}+x+c=x^3+x^2+x+c$

$(b)\quad \int(\cos x+x^{-2})dx=\sin x+\frac{x^{-1}}{-1}+c=\sin x-\frac{1}{x}+c$

$(c)\quad \int(x+\sec x\tan x)dx=\frac{x^2}{2}+secx+c$

$(d)\quad \int \sin(2x+4)\,dx=\frac{-1}{2}\cos(2x+4)+c$

مثال (2)/ جد التكاملات لكل مما يأتي :

$$(a)\quad \int (x^2+3)^2(2x)dx = \frac{(x^2+3)^3}{3} + c$$

$$(b)\quad \int (3x^2+8x+5)^6(3x+4)dx = \left(\frac{1}{2}\right)\int (3x^2+8x+5)^6\,(2)(3x+4)dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(3x^2+8x+5)^7}{7} + c = \frac{1}{14}(3x^2+8x+5)^7 + c$$

$$(c)\quad \int \sin^4 x\cos x\,dx = \frac{\sin^5 x}{5} + c$$

$$(d)\quad \int \tan^6 x\,\sec^2 x\,dx = \frac{\tan^7 x}{7} + c$$

بعض العلاقات في الدوال المثلثية

$(1)\ \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$(2)\ \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$(3)\ \cos 2\theta = (1-\sin^2\theta) - \sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$(4)\ \cos 2\theta = \cos^2\theta - (1-\cos^2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$

$(5)\ \sin^2\theta = \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)$

$(6)\ \cos^2\theta = \frac{1}{2}(1+\cos 2\theta)$

$(7)\ \sec^2\theta = \tan^2\theta + 1$

$(8)\ \sin Ax\,.\cos Bx = \frac{1}{2}[\sin(A-B)x + \sin(A+B)x]$

$(9)\ \cos Ax\,.\cos Bx = \frac{1}{2}[\cos(A-B)x + \cos(A+B)x]$

$(10)\ \sin Ax\,.\sin Bx = \frac{1}{2}[\cos(A-B)x - \cos(A+B)x]$

$(11)\ \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

تكاملات الدوال المثلثية التربيعية

$(1)\int \sec^2\theta\, d\theta = \tan\theta + c$

$(2)\int \csc^2\theta\, d\theta = -\cot\theta + c$

$(3)\int \tan^2\theta\, d\theta = \int(\sec^2\theta - 1)d\theta = \int \sec^2\theta\, d\theta - \int d\theta = \tan\theta - \theta + c$

$(4)\int \cot^2\theta\, d\theta = \int(\csc^2\theta - 1)d\theta = \int \csc^2\theta\, d\theta - \int d\theta = -\cot\theta - \theta + c$

$(5)\int \sin^2\theta\, d\theta = \int \frac{1-\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{1}{2}\left(\int d\theta - \frac{1}{2}\int \cos 2\theta(2)d\theta\right) = \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + c$

$= \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta + c$

$(6)\int \cos^2\theta\, d\theta = \int \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta = \frac{1}{2}\left(\int d\theta + \frac{1}{2}\int \cos 2\theta(2)d\theta\right) = \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right) + c$

$= \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + c$

أمثلة (من الكتاب صفحة 185 وصفحة 186)

$(1)\int 9\sin 3x\, dx = 3\int 3\sin 3x\, dx = -3\cos 3x + c$

$(2)\int x^2\sin x^3\, dx = \frac{1}{3}\int 3x^2\sin x^3\, dx = \frac{-1}{3}\cos x^3 + c$

$(3)\int \sqrt{1-\sin 2x}\, dx = \int \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x\cos x}\, dx$

$= \int \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x}\, dx = \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\, dx$

$= \int \pm(\sin x - \cos x)\, dx = \pm(-\cos x - \sin x) + c = \mp(\cos x + \sin x) + c$

وزاري 2012 / د3

$(4)\int \sin^4 x\, dx = \int (\sin^2 x)^2\, dx = \int \left[\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right]^2 dx = \int \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx$

$= \frac{1}{4}\left(\int 1 - \int 2\cos 2x + \int \cos^2 2x\right)dx = \frac{1}{4}\left(\int 1 - \int 2\cos 2x + \int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)\right)dx$

$= \frac{1}{4}\left(x - \sin 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + c = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{1}{8}\sin 4x\right) + c$

$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x) + c$

(5) $\int (\sin x - \cos x)^7 (\cos x + \sin x)dx = \frac{(\sin x - \cos x)^8}{8} + c$

(6) $\int \frac{1 + \tan^2 x}{\tan^3 x} dx = \int \tan^{-3} x \sec^2 x \, dx = \frac{\tan^{-2} x}{-2} + c = \frac{-1}{2\tan^2 x} + c$

(7) $\int \cos^3 x dx = \int \cos x \cos^2 x \, dx = \int \cos x (1 - \sin^2 x) dx$

$= \int \cos x dx - \int \sin^2 x \cos x \, dx = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + c$

وزاري 2014 / د2

(8) $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx = \int \tan x (\sec^2 x) \, dx = \frac{\tan^2 x}{2} + c$

وزاري 2016 / د1 **وزاري 2014 / د3**

(9) $\int \sin 6x \cos^2 3x \, dx = \int (2\sin 3x \cos 3x) \cos^2 3x \, dx = 2\int \cos^3 3x (\sin 3x) dx$

$= \frac{2}{-3} \int \cos^3 3x (\sin 3x)(-3) dx = \left(\frac{-2}{3}\right) \frac{\cos^4 3x}{4} + c = \frac{-1}{6} \cos^4 3x + c$

ملاحظة

$\cos^4 3x = (\cos 3x)^4$

وزاري 2014 / د1

(10) $\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x - \sin 2x} dx = \int \frac{\cos^2 2x - \sin^2 2x}{\cos 2x - \sin 2x} dx = \int \frac{(\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x)}{\cos 2x - \sin 2x} dx$

$= \int (\cos 2x + \sin 2x) dx = \frac{1}{2} \int (\cos 2x + \sin 2x)(2) dx = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x + c$

(11) $\int \sin^2 3x \, dx = \int \left[\frac{1}{2}(1 - \cos 6x)\right] dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{6}\sin 6x\right) + c = \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + c$

(12) $\int \cot^2 5x \, dx = \int (\csc^2 5x - 1) dx = \int \csc^2 5x \, dx - \int dx = \frac{-1}{5}\cot 5x - x + c$

(13) $\int \tan^2 7x \, dx = \int (\sec^2 7x - 1) dx = \int \sec^2 7x \, dx - \int dx = \frac{1}{7}\tan 7x - x + c$

أمثلة أضافية محلولة

مثال / أوجد التكاملات الأتية :

(1) $\int x\sqrt[3]{3x^2+1}\ dx = \int x\,(3x^2+1)^{\left(\frac{1}{3}\right)}\ dx = \left(\frac{1}{6}\right)\frac{(3x^2+1)^{\left(\frac{4}{3}\right)}}{\left(\frac{4}{3}\right)} + c = \frac{1}{8}(3x^2+1)^{\left(\frac{4}{3}\right)} + c$

(2) $\int tan^5(2x)\sec^2(2x)\,dx = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{tan^6(2x)}{6} + c = \frac{tan^6(2x)}{12} + c$

(3) $\int \cos^3(4x)\,sin(4x)dx = \left(\frac{-1}{4}\right)\frac{\cos^4(4x)}{4} + c = \frac{-\cos^4(4x)}{16} + c$

(4) $\int x^2\cos^5(x^3)\,dx = \left(\frac{1}{3}\right)\frac{\cos^6(x^3)}{6} + c = \frac{\cos^6(x^3)}{18} + c$

(5) $\int \frac{\sin^3(2x)}{sec(2x)}dx = \int \frac{\sin^3(2x)}{\left(\frac{1}{cos(2x)}\right)}dx = \int \sin^3(2x)\,cos(2x)dx = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{\sin^4(2x)}{4} + c = \frac{\sin^4(2x)}{8} + c$

(6) $\int x\sqrt{x^2+9}\ dx = \int x\,(x^2+9)^{\left(\frac{1}{2}\right)}\ dx = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{(x^2+9)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{\left(\frac{3}{2}\right)} + c = \frac{(x^2+9)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{3} + c = \frac{\sqrt{(x^2+9)^3}}{3} + c$

(7) $\int sin^3x\cos^3x\,dx = \int sin^3x\cos x\ \cos^2x\,dx = \int sin^3x\,cosx\,(1-sin^2x)dx$

$= \int (sin^3x\,cosx - sin^5x\,cosx)dx = \frac{sin^4x}{4} - \frac{sin^6x}{6} + c$

(8) $\int sec^5x\,tan\,x\,dx = \int sec^4x\,sec\,x\,tanx\,dx = \frac{sec^5x}{5} + c$

(9) $\int \sqrt[3]{x^5-2x^3}\ dx = \int (x)\ \sqrt[3]{x^2-2}\ dx = \int (x)\ (x^2-2)^{\left(\frac{1}{3}\right)}\ dx = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{(x^2-2)^{\left(\frac{4}{3}\right)}}{\left(\frac{4}{3}\right)} + c$

$= \left(\frac{3}{8}\right)(x^2-2)^{\left(\frac{4}{3}\right)} + c$

(10) $\int \sqrt{x^2-10x+25}\ dx = \int \sqrt{(x-5)^2}\ dx = \int \pm(x-5)dx = \pm\left(\frac{x^2}{2} - 5x\right) + c$

(11) $\int \frac{3}{(x^2-2x+1)}\ dx = \int \frac{3}{(x-1)^2}\ dx = 3\int (x-1)^{-2}dx = \frac{3(x-1)^{-1}}{-1} + c = \frac{-3}{(x-1)} + c$

(12) $\int \frac{x^2+1}{\sqrt[5]{x^3+3x+1}}\,dx = \int (x^2+1)(x^3+3x+1)^{\left(\frac{-1}{5}\right)}\,dx = \left(\frac{1}{3}\right)\frac{(x^3+3x+1)^{\left(\frac{4}{5}\right)}}{\left(\frac{4}{5}\right)} + c$

$= \frac{5}{12}(x^3+3x+1)^{\left(\frac{4}{5}\right)} + c$

(13) $\int \sin 2x \cos^2 x\, dx = \int 2\sin x \cos x \cos^2 x\, dx = 2\int \sin x \cos^3 x\, dx = (-2)\frac{\cos^4 x}{4} + c$

(14) $\int 9\sin 2x\, dx = 9\left(\frac{-1}{2}\right)\cos 2x + c = \frac{-9\cos 2x}{2} + c$

مثال / أوجد التكاملات للدوال الأتية :

(1) $\int \tan^2 3x\, dx = \int (\sec^2 3x - 1)dx = \int \sec^2 3x\, dx - \int dx = \frac{1}{3}\tan 3x - x + c$

(2) $\int \cot^2 7x\, dx = \int (\csc^2 7x - 1)dx = \int \csc^2 7x\, dx - \int dx = \frac{-1}{7}\cot 7x - x + c$

(3) $\int \sin 2x \cos x\, dx = \int (2\sin x \cos x)\cos x\, dx = 2\int \sin x \cos^2 x\, dx$

$= -2\int -\sin x \cos^2 x\, dx = \frac{-2}{3}\cos^3 x + c$

(4) $\int (\csc x \cot x + 1)^2\, dx = \int (\csc^2 x \cot^2 x + 2\csc x \cot x + 1)\, dx$

$= \int \csc^2 x \cot^2 x\, dx + 2\int \csc x \cot x\, dx + \int dx = \frac{-\cot^3 x}{3} - 2\csc x + x + c$

(5) $\int \sqrt{1+\sin 2x}\, dx = \int \sqrt{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x}\, dx = \int \sqrt{(\sin x + \cos x)^2}\, dx$

$= \int \pm(\sin x + \cos x)\, dx = \pm(-\cos x + \sin x) + c = \mp(\cos x - \sin x) + c$

(6) $\int \csc^6 x \cot x\, dx = \int \csc^5 x\,(\cot x \csc x)\, dx = \frac{-\csc^6 x}{6} + c$

(7) $\int (\sin 2x - \cos 3x)(\sin 2x + \cos 3x)dx = \int (\sin^2 2x - \cos^2 3x)dx$

$= \int \sin^2 2x\, dx - \int \cos^2 3x\, dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 4x)\, dx - \frac{1}{2}\int (1+\cos 6x)\, dx$

$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{6}\sin 6x\right) + c = \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{12}\sin 6x + c$

$= \frac{-1}{8}\sin 4x - \frac{1}{12}\sin 6x + c$

(8) $\int (sin5x \, . \, cosx)\, dx = \frac{1}{2}\int [sin(5-1)x + \ sin(5+1)x]\, dx = \frac{1}{2}\int [sin4x + \ sin6x]\, dx$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{4}cos4x - \frac{1}{6}cos6x\right) + c = \frac{-1}{8}cos4x - \frac{1}{12}cos6x + c$

(9) $\int tan^4 x\, dx = \int tan^2 x \ tan^2 x\, dx = \int tan^2 x\,(\ sec^2 x - 1)\, dx = \int tan^2 x\, sec^2 x \ dx - \int tan^2 x\, dx$

$= \int tan^2 x\, sec^2 x \ dx - \int (sec^2 x - 1)\, dx = \frac{tan^3 x}{3} - tanx + x + c$

(10) $\int sec^6 x\, dx = \int sec^2 x (sec^2 x)^2\, dx = \int sec^2 x\,(tan^2 x + 1)^2 \ dx$

$= \int sec^2 x\,(tan^4 x + 2\, tan^2 x + 1)\ dx$

$= \int (tan^4 x\, sec^2 x)\ dx + 2\int tan^2 x\, sec^2 x \ dx + \int sec^2 x \ dx = \frac{tan^5 x}{5} + 2\frac{tan^3 x}{3} + tanx + c$

واجب : حل السؤال(10) ولكن أجعل الأس(4) بدل من(6)

(11) $\int \frac{x^5 + x^4 + 1}{x^3 + x + 1}\, dx = \int (x^2 + x + 1)\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c$ (نقسم البسط على المقام ثم نكامل)

(12) $\int cos^2 2x\, dx = \int \left[\frac{1}{2}(1 + cos4x)\right] dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}sin4x\right) + c = \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}sin4x + c$

(13) $\int x^2 \ csc\, x^3 \, . \ cotx^3\, dx = \frac{1}{3}\int (3)x^2 \ csc\, x^3 \, . \ cotx^3\, dx = \frac{-1}{3}csc\, x^3 + c$

(14) $\int x \ sec\, x^2 \, . \ tan\, x^2\, dx = \frac{1}{2}\int x \ sec\, x^2 \, . \ tan\, x^2 \ (2) dx = \frac{1}{2}sec\, x^2 + c$

(15) $\int csc^2 \ 7x\, dx = \frac{1}{7}\int csc^2 \ 7x \ (7) dx = \frac{-1}{7}cot\, 7x + c$

(16) $\int \frac{x^2 - 9}{x - 3}\, dx = \int \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} dx = \int (x+3)\, dx = \frac{x^2}{2} + 3x + c$

(17) $\int \frac{x^4 - 16}{x - 2}\, dx = \int \frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x-2} dx = \int \frac{(x-2)(x+2)(x^2+4)}{x-2} dx$

$= \int (x+2)(x^2+4)\, dx = \int (x^3 + 4x + 2x^2 + 8)\, dx = \frac{x^4}{4} + 2x^2 + 2\frac{x^3}{3} + 8x + c$

(18) $\int \frac{x^3 + 1}{x + 1}\, dx = \int \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x+1} dx = \int (x^2 - x + 1)\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + c$

(19) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-5}}\,dx = \int x^2(x^3-5)^{\frac{-1}{2}}\,dx = \frac{1}{3}\int (3)x^2(x^3-5)^{\frac{-1}{2}}\,dx = \frac{1}{3}\times\frac{(x^3-5)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c$

$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3-5}+c$

(20) $\int \cot^3 9x\,.\,\csc^2 9x\,dx = \frac{-1}{9}\int \cot^3 9x\,.\,\csc^2 9x\,(-9)dx = \frac{-1}{9}\times\frac{\cot^4 9x}{4}+c$

(21) $\int \sin 9x\,dx = \frac{1}{9}\int \sin 9x\,(9)\,dx = \frac{-1}{9}\cos 9x + c$

(22) $\int \cos 7x\,dx = \frac{1}{7}\int \cos 7x\,(7)\,dx = \frac{1}{7}\cos 7x + c$

وزاري 2012 / د2

(23) $\int \cot x\,.\csc^3 x\,dx = \int \cot x\,.\csc x\ \csc^2 x\,dx = -\int (-\cot x\,.\csc x\ )\csc^2 x dx$

$= \frac{-1}{3}\csc^3 x + c$

(24) $\int \tan 3x\,.\sec^5 3x\,dx = \int \tan 3x\,.\sec 3x\ \sec^4 3x\,dx$

$= \frac{1}{3}\int 3(\tan 3x\,.\sec 3x\ )\sec^4 3x\,dx = \frac{1}{3}\times\frac{\sec^5 3x}{5}+c = \frac{1}{15}\sec^5 3x + c$

مثال : جد معادلة المنحني الذي ميله $\left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)$ ويمر بالنقطة $(0\,,1)$

الحل /

$y = \int (\text{الميل})\,dx = \int \bar{y}\,dx = \int \left(2x-\frac{1}{2}x^2\right)dx = x^2-\frac{1}{6}x^3+c$ (نعوض النقطة $(0\,,1)$)

$1 = 0-0+c \quad \Rightarrow c = 1 \quad \Rightarrow \boxed{y = x^2-\frac{1}{6}x^3+1}$ معادلة المنحني

مثال : جد معادلة المنحني الذي ميله $(3\cos^2 x \ \sin x)$ ويمر بالنقطة (0 , 1)

الحل /

$y = \int (\text{الميل})\, dx = \int \bar{y}\, dx = \int (3\cos^2 x \ \sin x)\, dx = -3\frac{\cos^3 x}{3} + c = -\cos^3 x + c$ (نعوض النقطة$(0\,,1)$)

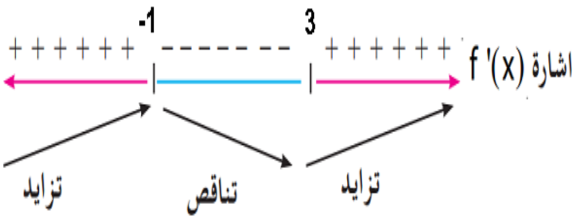
$1 = -1 + c \quad \Rightarrow c = 2 \quad \Rightarrow \boxed{y = -\cos^3 x + 2}$ معادلة المنحني

مثال : جد معادلة المنحني الذي ميله $(3\,x^2 - 6x - 9)$ والمنحني يمتلك نهاية عظمى محلية تساوي (15)

الحل /

$\bar{y} = 3\,x^2 - 6x - 9$ (نجعل $\bar{y} = 0$) $\Rightarrow 3\,x^2 - 6x - 9 = 0 \overset{(\div 3)}{\Longrightarrow} x^2 - 2x - 3 = 0$

$(x - 3)(x + 1) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{x = 3} \quad \boxed{x = -1}$



النقطة $(-1, 15)$ نهاية عظمى محلية

$y = \int (\text{الميل})\, dx = \int \bar{y}\, dx = \int (3\,x^2 - 6x - 9)\, dx = x^3 - 3x^2 - 9x + c$ (نعوض النقطة$(-1\,,15)$)

$15 = -1 - 3 + 9 + c \quad \Rightarrow c = 10 \quad \Rightarrow \boxed{y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10}$ معادلة المنحني

مثال : جد معادلة المنحني $\left(\bar{\bar{y}} = 6x\right)$ والمنحني يمتلك نقطة حرجة عند (-1,4)

الحل /

$\bar{y} = \int \bar{\bar{y}}\, dx = \int (6x)\, dx = 3x^2 + c$ (نجعل $\bar{y} = 0$ عندما $x = -1$) $\Rightarrow 3x^2 + c = 0 \Rightarrow \boxed{c = -3}$

$y = \int (\text{الميل})\, dx = \int \bar{y}\, dx = \int (3x^2 - 3)\, dx = x^3 - 3x + p$ (نعوض النقطة$(-1\,,4)$)

$4 = -1 + 3 + p \quad \Rightarrow p = 2 \quad \Rightarrow \boxed{y = x^3 - 3x + 2}$ معادلة المنحني

مثال : جد معادلة المنحني الذي ميله $(2x+a)$ والمستقيم $3x-y=7$ مماسا له عندما $x=2$

الحل /

① نعوض قيمة (x) في معادلة المستقيم لاستخراج قيمة (y) ثم أيجاد نقطة التماس

$3x-y=7 \quad \Rightarrow 3(2)-y=7 \quad \Rightarrow \boxed{y=-1} \quad \Rightarrow (2,-1)$ نقطة التماس

② نشتق معادلة المستقيم لإيجاد الميل أي بمعنى أخر المشتقة الأولى

$3x-y=7 \quad \Rightarrow \quad y=3x-7 \quad \Rightarrow \boxed{\bar{y}=3}$

③ نجد قيمة المجاهيل في معادلة ميل المنحني حيث $(\bar{y}=3)$

$\bar{y}=2x+a \quad \Rightarrow 3=2(2)+a \quad \Rightarrow a=-4+3=-1$ $\boxed{\bar{y}=2x-1}$ معادلة ميل المنحني

④ نكامل معادلة ميل المنحني ثم نجد قيمة ثابت التكامل (C) فيتم الحصول على معادلة المنحني المطلوبة

$y=\int(\text{الميل})\,dx=\int \bar{y}\,dx=\int(2x-1)\,dx=x^2-x+c$ (نعوض النقطة$(2,-1)$)

$-1=4-2+c \quad \Rightarrow c=-3 \quad \Rightarrow \boxed{y=x^2-x-3}$ معادلة المنحني

ملاحظات :

- **لا تكامل ميل منحني وفيه ثابت مجهول مثل (C) او (P) حتى تجد قيمة المجهول .**
- **لأيجاد معادلة منحني دالة يفضل أن تجد أولا نقطة كاملة من معلومات السؤال لأستخدمها في أيجاد ثوابت التكامل المجهولة**

تمارين (4 – 4)

جد تكاملات كل مما يأتي ضمن مجال الدالة :

(1) $\int \frac{(2x^2-3)^2-9}{x^2}dx = \int \frac{(4x^4-12x^2+9)-9}{x^2}dx = \int \frac{(4x^4-12x^2)}{x^2}dx = \int \frac{x^2(4x^2-12)}{x^2}dx = \frac{4x^3}{3} - 12x + c$

(2) $\int \frac{\left(3-\sqrt{5x}\right)^7}{\sqrt{7x}}dx = \int \frac{\left(3-\sqrt{5}\,(\sqrt{x})\right)^7}{\sqrt{7}\,(\sqrt{x})}dx = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{\left(3-\sqrt{5}\,(\sqrt{x})\right)^7}{(\sqrt{x})}dx$ (نوفر المشتقة)

$= \frac{1}{\sqrt{7}}\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)\int \left(\frac{-\sqrt{5}}{2}\right)\frac{\left(3-\sqrt{5}\,(\sqrt{x})\right)^7}{(\sqrt{x})}dx = \frac{1}{\sqrt{7}}\left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)\frac{\left(3-\sqrt{5}\,(\sqrt{x})\right)^8}{8} + c = \frac{-1}{4\sqrt{35}}\left(3-\sqrt{5x}\right)^8 + c$

(3) $\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x}dx = \int \frac{\cos x\cos^2 x}{1-\sin x}dx = \int \frac{\cos x(1-\sin^2 x)}{1-\sin x}dx = \int \frac{\cos x(1-\sin x)(1+\sin x)}{1-\sin x}dx$

$= \int \cos x(1+\sin x)\,dx = \int (\cos x + \cos x\sin x)\,dx = \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + c$

وزاري 2013 / د1

(4) $\int \csc^2 x\cos x\,dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\cos x\,dx = \int \sin^{-2}x\,(\cos x)\,dx = \frac{\sin^{-1}x}{-1} + c = \frac{-1}{\sin x} + c = -\csc x + c$

حل أخر :

$\int \csc^2 x\cos x\,dx = \int \frac{1}{\sin^2 x}\cos x\,dx = \int \frac{1}{\sin x}\frac{\cos x}{\sin}dx = \int \csc x\cot x\,dx = -\csc x + c$

(5) $\int \frac{x}{(3x^2+5)^4}dx = \int x\,(3x^2+5)^{-4}dx = \frac{1}{6}\int (6)x\,(3x^2+5)^{-4}dx = \frac{1}{6}\frac{(3x^2+5)^{-3}}{-3} + c$

$= \frac{-1}{18\,(3x^2+5)^3} + c$

(6) $\int \sqrt[3]{x^2+10x+25}\,dx = \int \sqrt[3]{(x+5)^2}\,dx = \int (x+5)^{\left(\frac{2}{3}\right)}dx = \frac{(x+5)^{\left(\frac{5}{3}\right)}}{\left(\frac{5}{3}\right)} + c = \frac{3}{5}(x+5)^{\left(\frac{5}{3}\right)} + c$

(7) $\int \sin^3 x\,dx = \int \sin x\sin^2 x\,dx = \int \sin x\,(1-\cos^2 x)\,dx = \int (\sin x - \cos^2 x\sin x)\,dx$

$= \int \sin x\,dx + \int \cos^2 x\,(-\sin x)\,dx = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c$

(8) $\int \frac{\cos\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}dx = (-2)\int \left(\frac{-1}{2}\right)\frac{\cos\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}dx = -2\sin\sqrt{1-x} + c$

(لو كان المثال)

$$\int \frac{\sin\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}dx = (-2)\int\left(\frac{-1}{2}\right)\frac{\sin\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}dx = 2\cos\sqrt{1-x}+c$$

(9) $\int (3x^2+1)^2 dx = \int (9x^4+6x^2+1)dx = \frac{9}{5}x^5+2x^3+x+c$

(10) $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx = \int \left(x^{\frac{-3}{4}}\right)\sqrt{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}\,dx = \int \left(x^{\frac{-3}{4}}\right)\left(\sqrt{\sqrt{x}}\right)\sqrt{(1-\sqrt{x})}\,dx$

$$= \int \left(x^{\frac{-3}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\sqrt{(1-\sqrt{x})}\,dx = \int \left(x^{\frac{-2}{4}}\right)\sqrt{(1-\sqrt{x})}\,dx = \int \left[x^{\left(\frac{-1}{2}\right)}\right]\left(1-x^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}dx$$

$$= (-2)\int\left[\frac{-1}{2}x^{\left(\frac{-1}{2}\right)}\right]\left(1-x^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}dx = -2\frac{\left(1-x^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{\left(\frac{3}{2}\right)}+c = \frac{-4}{3}\left(1-x^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)}+c$$

$$= \frac{-4}{3}\sqrt{(1-\sqrt{x})^3}+c$$

(لو كان المثال)

$$\int \frac{\sqrt{x-\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x^3}}dx = \int \left(x^{\frac{-3}{4}}\right)\sqrt{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}\,dx = \int \left(x^{\frac{-3}{4}}\right)\left(\sqrt{\sqrt{x}}\right)\sqrt{(\sqrt{x}-1)}\,dx$$

$$= \int \left(x^{\frac{-3}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\sqrt{(\sqrt{x}-1)}\,dx = \int \left(x^{\frac{-2}{4}}\right)\sqrt{(\sqrt{x}-1)}\,dx = \int \left[x^{\left(\frac{-1}{2}\right)}\right]\left(x^{\left(\frac{1}{2}\right)}-1\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}dx$$

$$= (2)\int\left(\frac{1}{2}\right)\left[x^{\left(\frac{-1}{2}\right)}\right]\left(x^{\left(\frac{1}{2}\right)}-1\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)}dx = 2\frac{\left(x^{\left(\frac{1}{2}\right)}-1\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{\left(\frac{3}{2}\right)}+c = \frac{4}{3}\left(x^{\left(\frac{1}{2}\right)}-1\right)^{\left(\frac{3}{2}\right)}+c$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{(\sqrt{x}-1)^3}+c$$

وزاري 2013 / د2

(11) $\int (1+\cos3x)^2\,dx = \int (1+2\cos3x+\cos^2 3x)\,dx = \int dx + 2\int \cos3x\,dx + \int \cos^2 3x\,dx$

$$= x+2\left(\frac{1}{3}\right)\sin3x + \int \cos^2 3x\,dx = x+\frac{2}{3}\sin3x+\int\left[\frac{1}{2}(1+\cos6x)\right]dx$$

$$= x+\frac{2}{3}\sin3x+\int\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos6x\right)dx = x+\frac{2}{3}\sin3x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)\sin6x$$

$$= \frac{3}{2}x+\frac{2}{3}\sin3x+\frac{1}{12}\sin6x+c$$

(12) $\int \sec^2 4x\,dx = \left(\frac{1}{4}\right)\int (4)\sec^2 4x\,dx = \frac{1}{4}\tan4x+c$

(13) $\int \csc^2 2x\,dx = \left(\frac{1}{2}\right)\int (2)\csc^2 2x\,dx = \frac{-1}{2}\cot2x+c$

(14) $\int \tan^2 8x\,dx = \int (\sec^2 8x-1)\,dx = \frac{1}{8}\tan8x-x+c$

وزاري 2016 / د1

(15) $\int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{1-\cos^2 2x}dx = \int \frac{(\cot 2x)^{\frac{1}{2}}}{\sin^2 2x}dx = \int \frac{1}{\sin^2 2x}(\cot 2x)^{\frac{1}{2}}dx = \int \csc^2 2x\,(\cot 2x)^{\frac{1}{2}}dx$

$= \frac{-1}{2}\int(-2)\csc^2 2x\,(\cot 2x)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{-1}{2}.\frac{(\cot 2x)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{3}{2}\right)} + c = \frac{-1}{3}.(\cot 2x)^{\frac{3}{2}} + c$

(16) $\int \cos^2 2x\;dx = \frac{1}{2}\int(1+\cos 4x) = \frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{4}\sin 4x\right)+c = \frac{1}{2}x+\frac{1}{8}\sin 4x + c$

(17) $\int \sin^2 8x\;dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos 16x) = \frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{16}\sin 16x\right)+c = \frac{1}{2}x-\frac{1}{32}\sin 16x + c$

(18) $\int \cos^4 3x\;dx = \int(\cos^2 3x)^2dx = \int\left(\frac{1}{2}[1+\cos 6x]\right)^2dx = \int\frac{1}{4}[1+2\cos 6x+\cos^2 6x]dx$

$= \frac{1}{4}\left(\int dx + \int 2\cos 6x\,dx + \int \cos^2 6x\,dx\right) = \frac{1}{4}\left[x+\frac{2}{6}\sin 6x+\int\frac{1}{2}(1+\cos 12x)\,dx\right]$

$= \frac{1}{4}\left[x+\frac{1}{3}\sin 6x+\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{12}\sin 12x\right)\right]+c = \frac{1}{4}x+\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{96}\sin 12x + c$

$= \frac{3}{8}x+\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{96}\sin 12x + c$

****

أمثلة أضافية محلولة

مثال/ جد التكاملات التالية:

(1) $\int 2\sec 4x\tan 4x\;dx = 2\left(\frac{1}{4}\right)\sec 4x + c = \frac{1}{2}\sec 4x + c$

(2) $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = (2)\int\left(\frac{1}{2}\right)\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = -2\cos\sqrt{x} + c$

(3) $\int \frac{1-\cos ax}{1+\sin ax}dx = \int \frac{2\sin^2\left(\frac{a}{2}\right)x}{2\cos^2\left(\frac{a}{2}\right)x}dx = \int \tan^2\left(\frac{a}{2}\right)x\,dx = \int\left[\sec^2\left(\frac{a}{2}\right)x-1\right]dx$

$= \frac{2}{a}\tan\left(\frac{a}{2}\right)x - x + c$

(4) $\int \sin 6x\cos 3x\,dx = \int(2\sin 3x\cos 3x)\cos 3x\,dx = 2\int(\cos 3x)^2\sin 3x dx$

$= \frac{-2}{3}\int(\cos 3x)^2(-3\sin 3x)dx = \frac{-2}{3}\times\frac{(\cos 3x)^3}{3}+c = \frac{-2}{9}(\cos 3x)^3 + c$

(5) $\int \sqrt{1+\sin 4x}\ \cos 4x\ dx = \int (1+\sin 4x)^{\left(\frac{1}{2}\right)} \cos 4x\ dx = \frac{1}{4}\int (1+\sin 4x)^{\left(\frac{1}{2}\right)} (4\cos 4x)\ dx$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)\frac{(1+\sin 4x)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{\left(\frac{3}{2}\right)} + c = \frac{(1+\sin 4x)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{6} + c$$

(6) $\int \frac{dx}{1+\cos x} dx = \int \frac{\left(\frac{1}{2}\right)dx}{\left(\frac{1}{2}\right)(1+\cos x)} dx = \int \frac{\left(\frac{1}{2}\right)dx}{\cos^2\left(\frac{1}{2}\right)x} = \int \left(\frac{1}{2}\right)\sec^2\left(\frac{1}{2}\right)x dx = \tan\left(\frac{1}{2}\right)dx + c$

(7) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} dx = \int (1+\sin^2 x)^{\frac{-1}{2}}(\sin 2x)dx = \int (1+\sin^2 x)^{\frac{-1}{2}}(2\sin x\cos x)dx$

$$= \frac{(1+\sin^2 x)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)} + c = 2\sqrt{1+\sin^2 x} + c$$

(8) $\int \frac{3}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right) dx = (-3)\int \frac{-1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right)dx = -3\sin\left(\frac{1}{x}\right) + c$

(9) $\int \frac{1+\cos x}{\sin^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right)dx = \int \left(\csc^2 x + \cot x\frac{1}{\sin x}\right)dx = \int (\csc^2 x + \cot x\csc)dx$

$$= -\cot x - \csc x + c$$

(10) $\int \frac{(\tan^2 x - 1)^2}{(\cot^2 x - 1)^2} dx = \int \frac{(\sec^2 x)^2}{(\csc^2 x)^2} dx = \int \left(\frac{\sec x}{\csc x}\right)^4 dx = \int \left(\frac{\left[\frac{1}{\cos x}\right]}{\left[\frac{1}{\sin}\right]}\right)^4 dx = \int \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^4 dx$

$$= \int \tan^4 x\, dx$$

ثم نكمل الحل كما في المثال (9) في الصفحة (36)

(11) $\int \left(\frac{5}{x^3} - \frac{7}{x^2}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)} x\,dx = \int \left(\frac{5-7x}{x^3}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)} x\,dx = \int \frac{(5-7x)^{\left(\frac{1}{3}\right)}}{x} x\,dx = \frac{-1}{7}\frac{(5-7x)^{\left(\frac{4}{3}\right)}}{\left(\frac{4}{3}\right)} + c$

$$= \frac{-3}{28}(5-7x)^{\left(\frac{4}{3}\right)} + c$$

(12) $\int \frac{7x^4}{(x+5)^6} dx = \int \frac{7x^4}{(x+5)^4(x+5)^2} dx = 7\int \frac{x^4}{(x+5)^4}(x+5)^{-2}dx = 7\int \left(\frac{x}{x+5}\right)^4 (x+5)^{-2}dx$

$$= \left(\frac{7}{5}\right)\int (5)\left(\frac{x}{x+5}\right)^4 \left[\frac{1}{(x+5)^2}\right]dx = \frac{7}{5}\frac{\left(\frac{x}{x+5}\right)^5}{5} + c = \frac{7}{25}\left(\frac{x}{x+5}\right)^5 + c$$

(13) $\int \sqrt[3]{x^5 + x^3}\ dx = \int (x)\sqrt[3]{x^2+1}\ dx = \int (x)(x^2+1)^{\left(\frac{1}{3}\right)} dx = \left(\frac{1}{2}\right)\int (2x)(x^2+1)^{\left(\frac{1}{3}\right)} dx$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)\frac{(x^2+1)^{\left(\frac{4}{3}\right)}}{\left(\frac{4}{3}\right)} + c = \frac{3}{8}(x^2+1)^{\left(\frac{4}{3}\right)} + c$$

(14) $\int \sqrt{5x^4-3x^2}\ dx = \int x\sqrt{5x^2-3}\ dx = \int x(5x^2-3)^{\left(\frac{1}{2}\right)}\ dx = \left(\frac{1}{10}\right)\int (10)x(5x^2-3)^{\left(\frac{1}{2}\right)}\ dx$

$$= \left(\frac{1}{10}\right)\frac{(5x^2-3)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{\left(\frac{3}{2}\right)} + c = \frac{1}{15}(5x^2-3)^{\left(\frac{3}{2}\right)} + c$$

(15) $\int \frac{\sqrt[3]{5-7\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int \left(5-7x^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)} (x)^{\left(\frac{-1}{2}\right)} dx = \left[\frac{-2}{7}\right]\int\left[\frac{-7}{2}\right]\left(5-7x^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{\left(\frac{1}{3}\right)} (x)^{\left(\frac{-1}{2}\right)} dx$

$$= \left[\frac{-2}{7}\right]\frac{\left(5-7x^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{\left(\frac{4}{3}\right)}}{\left(\frac{4}{3}\right)} + c = \frac{-3}{14}\left(5-7x^{\left(\frac{1}{2}\right)}\right)^{\left(\frac{4}{3}\right)} + c$$

(16) $\int x^6\left(5-\frac{3}{x}\right)^6 dx = \int \left(x\left[5-\frac{3}{x}\right]\right)^6 \mathrm{dx} = \int (5x-3)^6 \mathrm{dx} = \left(\frac{1}{5}\right)\frac{(5x-3)^7}{7} + c = \frac{1}{35}(5x-3)^7 + c$

(17) $\int x^2(x^6-6x^3+9)^5\ dx = \int x^2([x^3-3]^2)^5\ dx = \int x^2(x^3-3)^{10}\ dx = \frac{1}{3}\int 3x^2(x^3-3)^{10}\ dx$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)\frac{(x^3-3)^{11}}{11} + c = \frac{1}{33}(x^3-3)^{11} + c$$

(18) $\int 7x^2\sqrt{x^6+x^2}\ dx = \int 7x^2\sqrt{x^2(x^4+1)}\ dx = \int 7x^3\sqrt{x^4+1}\ dx = \left(\frac{7}{4}\right)\int (4)x^3(x^4+1)^{\left(\frac{1}{2}\right)}\ dx$

$$= \left(\frac{7}{4}\right)\frac{(x^4+1)^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{\left(\frac{3}{2}\right)} + c = \frac{7}{6}(x^4+1)^{\left(\frac{3}{2}\right)} + c$$

اللوغاريتم الطبيعـــي

لـــتكن u دالـــة موجبـــة قابلـــة للاشــــتقاق بالنســــبة الـــى x فـــأن مشــــتقة اللوغـــاريتم الطبيعـــي للدالـــة u هـــي $\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{\text{مشتقة الدالة}}{\text{الدالة}} = \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{u}$ وعليه فأن $\int \frac{1}{u} du = \ln|u| + c$ شرط أن تكون الدالة (u) موجبة وتستخدم هذه الدالة في توفير المشتقة الأولى في بعض الدوال التي يصعب اشتقاقها وهي تمتلك مجموعة من الخصائص الخاصة مثل :

$\ln 1 = 0$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$, $\ln(x^y) = y\ln x$, $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$

مثال (1)/ اذا كان $y = \ln(3x^2 + 4)$ فأوجد $\frac{dy}{dx}$

$$y = \ln(3x^2 + 4) \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{6x}{3x^2 + 4}$$

مثال (2)/ جد $\int \frac{\cos\theta \, d\theta}{1+\sin\theta}$

$$let \quad u = 1 + \sin\theta$$

$$\frac{du}{d\theta} = \cos\theta \quad \Rightarrow \quad du = \cos\theta \, d\theta$$

$$\therefore \int \frac{\cos\theta \, d\theta}{1 + \sin\theta} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|1 + \sin\theta| + c$$

مثال / : جد مشتقة الدوال التالية :

① $y = \ln(x \sin x) \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x\cos x + \sin x}{x \sin x}$

② $y = \ln(x\, y^2) \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x\, y + y^2}{x\, y^2}$

③ $y = (\sin x)^x \quad \Rightarrow \ln y = \ln(\sin x)^x \quad \Rightarrow \ln y = x \ln(\sin x) \quad \Rightarrow \frac{\bar{y}}{y} = x\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) + \ln(\sin x)$

$$\Rightarrow \bar{y} = xy\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right) + y\ln(\sin x)$$

④ $y = \ln(\sin x) \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$

مثال / جد التكامل لكل مما يأتي :

① $\int \frac{lnx}{x} dx \quad = \int lnx \left(\frac{dx}{x}\right) = \frac{(lnx)^2}{2} + c$

② $\int \frac{x}{x^2+1} \quad = \left(\frac{1}{2}\right) \int \frac{(2)x}{x^2+1} \quad = \frac{1}{2} \, ln|x^2+1| + c$

③ $\int \frac{1}{x} \, dx \quad = ln|x| + c$

④ $\int tan\, x \, dx \quad = \int \frac{sin\, x}{cos\, x} dx = -\int \frac{-sin\, x}{cos\, x} dx = -ln|cos\, x| + c$

⑤ $\int cot\, x \, dx \quad = \int \frac{cos\, x}{sin\, x} dx = \ ln|sin\, x| + c$

⑤ $\int \frac{sec^2 3x}{1 + tan\, 3x} dx \quad = \frac{1}{3} \int \frac{3\, sec^2 3x}{1 + tan\, 3x} dx = \frac{1}{3} ln|1 + tan\, 3x| + c$

دالة اللوغاريتم الطبيعي

الدالــة الأسـية e^u هـي دالــة عكسـية لدالــة اللوغـاريتم الطبيعـي بمعنـى أخـر هنـاك بعـض الـدوال عنـدما نشـتقها أو نكاملهـا نـدخل عليهـا الدالــة الأسـية ثـم عنـدما ننتهـي نقـوم بألغـاء الدالــة الأسـية عـن طريـق أدخـال دالــة اللوغـاريتم الطبيعي الهدف من هذه العملية هي لتغيير شكل الدالة المراد العمل عليها

لـذا فـأن مشـتقة اي دالـة أسـية مرفوعـة للقـوة u هـي $\boxed{\frac{d}{dx}(e^u) = (\text{الدالة})(\text{مشتقة الاس}) = (e^u)\frac{du}{dx}}$ وعليـه فـأن $\boxed{\int (e^u)\, du = e^u + c}$ وهي تمتلك مجموعة من الخصائص الخاصة مثل

$\boxed{\frac{1}{e^x} = e^{-x}}$ $\quad \boxed{e^0 = 1}$ $\quad \boxed{\frac{e^x}{e^y} = e^x - e^y}$ $\quad \boxed{e^x . e^y = e^{(x+y)}}$ $\quad \boxed{e = 2.71828}$

مثال (3)/ لتكن $y = e^{tanx}$ فجد $\frac{dy}{dx}$

$y = e^{tanx} \quad \Longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = e^{tanx}.(sec^2 x)$

مثال (4)/ جد $\int xe^{x^2} dx$ وزاري 2013 / د3

$\int xe^{x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int 2xe^{x^2} \, dx = \frac{1}{2} \, e^{x^2} + c$

الدالة الأسيـــة (الأساس عدد ثابت)

نفــرض أن (a) عـــدد ثابــت يمثــل أســاس الدالـــة الأســية فـــأن مشـــتقة اي دالـــة أســـية مرفوعـــة للقـــوة u هـــي $\frac{d}{dx}(a^u) = (\text{الدالة})(ln\ \text{الأساس})(\text{مشتقة الاس}) = (a^u)(ln\ a)\frac{du}{dx}$ وعليـــــــه فـــــــأن $\int (a^u)\, du = \frac{1}{(ln\ a)} e^u + c$

وتتميز ببعض الخصائص التي ذكرناها في الدالة الأسية السابقة وسوف نوضح ذلك في المثال التالي .

مثال (5)/ جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

① $y = 3^{2x-5} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3^{2x-5}.(ln3)(2) = (2ln3).3^{2x-5}$

② $y = 2^{-x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2^{-x^2}.(\ln 2)(-2x) = (-2x\ ln2)(2^{-x^2})$

③ $y = 5^{sinx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5^{sinx}(ln5)(cosx)$

****

أمثلة أضافية محلولة

مثال / جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

① $y = e^{x^2+2x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{x^2+2x}.(2x+2)$

② $y = lnx\, .\, e^x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = lnx\, .\, e^x + e^x.\frac{1}{x}$

③ $y = sin\,(xe^x) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = cos(xe^x)[xe^x + e^x] = [xe^x + e^x]cos(xe^x)$

④ $y = 3^{(2+4^x)} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3^{(2+4^x)}(ln3)[4^x(ln4)(1)]$

⑤ $y = x^2\, e^x dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^2\, e^x + 2x\, e^x$

⑥ $y = cot\, e^{2\,x} dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -csc^2\, e^{2x}\,(2e^{2x})$

⑦ $y = e^{sin\,2\,x} dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{sin\,2\,x}\,(2cos\,2x)$

⑧ $y = 3^{2x-5} dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3^{2x-5}\,(2ln3) = 2ln3.\ 3^{2x-5}$

⑨ $y = 5^{sin\,x} dx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5^{sin\,x}\,(cos\,x\ \ ln5)$

مثال / جد التكامل لكل مما يأتي :

① $\int e^{7x} dx = \frac{1}{7} e^{7x} + c$

② $\int e^{sinx}(cosx)\, dx = e^{sinx} + c$

③ $\int \frac{e^{lnx}}{x} dx = e^{lnx} + c = x + c$

④ $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = (2) \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{(2)\sqrt{x}} dx = 2e^{\sqrt{x}} + c$

مثال / جد التكامل لكل مما يأتي :

① $\int 4^x dx = 4^x \left(\frac{1}{ln4}\right) + c$

② $\int 2^{sinx}(cosx)\, dx = 2^{sinx}\left(\frac{1}{ln2}\right) + c$

③ $\int cos\, 3x\, e^{sin3x}\, dx = \frac{1}{3} \int (3) cos\, 3x\, e^{sin3x}\, dx = \frac{1}{3} e^{sin3x} + c$

④ $\int 3^{tan7x}(sec^2 7x) dx = \left(\frac{1}{7}\right) \int (7) 3^{tan7x}(sec^2 7x) dx = \left(\frac{1}{7}\right) 3^{tan7x}\left(\frac{1}{ln3}\right) + c$

⑤ $\int \frac{2^{3x+3} + 4^{2x-1}}{2^{x+3}} dx = \int \frac{2^{3x+3} + 2^{4x-2}}{2^{x+3}} dx = \int \left(\frac{2^{3x+3}}{2^{x+3}} + \frac{2^{4x-2}}{2^{x+3}}\right) dx$

$= \int \left(2^{(3x+3-x-3)} + 2^{(4x-2-x-3)}\right) dx = \int 2^{2x}\, dx + \int 2^{3x-5}\, dx$

$= \left(\frac{1}{2}\right) \int (2) 2^{2x}\, dx + \left(\frac{1}{3}\right) \int (3) 2^{3x-5}\, dx = \left(\frac{1}{2}\right) 2^{2x} \left(\frac{1}{ln2}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) 2^{3x-5} \left(\frac{1}{ln2}\right) + c$

⑥ $\int sec^2 x\ e^{tan\, x}\, dx = e^{tan\, x} + c$

تمارين(5 – 4)

س 1/ جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

$(a)\quad y = ln3x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{3}{3x} = \frac{1}{x}$

$(b)\quad y = \ln\left(\frac{x}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)} = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{1}{x}$

$(c)\quad y = ln(x^2) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$

$(d)\quad y = (lnx)^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2\,lnx\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2}{x}\,\text{lnx}$

$(e)\quad y = ln\left(\frac{1}{x}\right)^3 \Rightarrow \quad y = ln\ x^{-3} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \left(\frac{-3x^{-4}}{x^{-3}}\right) = -3x^{-1} = \frac{-3}{x}$

$(f)\quad y = ln(2 - cosx) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-(-sinx)}{2 - cosx} = \frac{sinx}{2 - cosx}$

$(g)\quad y = e^{(-5x^2+3x+5)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = e^{(-5x^2+3x+5)}.[-10x + 3] = (-10x + 3).e^{(-5x^2+3x+5)}$

$(h)\quad y = 9^{\sqrt{x}} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 9^{\sqrt{x}}.(ln9)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = \frac{9^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}(ln9)$

$(i)\quad y = 7^{\left(\frac{-x}{4}\right)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 7^{\left(\frac{-x}{4}\right)}.(ln7)\left(\frac{-1}{4}\right) = \frac{-\,ln7}{4}7^{\left(\frac{-x}{4}\right)}$

$(j)\quad y = x^2e^x \quad \Rightarrow \quad \frac{\text{dy}}{\text{dx}} = x^2e^x + 2e^xx = xe^x(\text{x} + 2)$

س 2/ جد التكاملات الأتية :

(a) $\int_0^3 \frac{1}{x+1}dx = [ln|x+1|]_0^3 = ln|3+1| - ln|0+1| = ln4 - ln1 = ln4 - 0 = ln4 = ln2^2 = 2ln2$

(b) $\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9}dx = [ln|x^2+9|]_0^4 = ln|16+9| - ln|0+9| = ln25 - ln9 = ln5^{(2)} - ln3^{(2)}$

$= 2ln5 - 2ln3 = 2ln\frac{5}{3}$

وزاري 2012 / د1 **وزاري 2014 / د2**

(c) $\int_{ln3}^{ln5} e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}[e^{2x}]_{ln\,3}^{ln\,5} = \frac{1}{2}[e^{2(ln5)} - e^{2(ln3)}] = \frac{1}{2}[e^{ln(5)^2} - e^{ln(3)^2}] = \frac{1}{2}[25-9] = \frac{1}{2}[16] = 8$

(d) $\int_0^{ln2} e^{-x}\,dx = -[e^{-x}]_0^{ln\,2} = -[e^{-ln2} - e^0] = -[e^{ln(2)^{-1}} - 1] = -[2^{-1} - 1] = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

وزاري 2013 / د2 **وزاري 2011 / د1**

(e) $\int_0^1 (1+e^x)^2 e^x\,dx = \left[\frac{(1+e^x)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}[(1+e^x)^3]_0^1 = \frac{1}{3}\left[(1+e^1)^3 - (1+e^0)^3\right]$

$= \frac{1}{3}[(1+e)^3 - (1+1)^3] = \frac{1}{3}[(1+e)^3 - (2)^3] = \frac{1}{3}(1+e)^3 - \frac{8}{3}$

لو كان السؤال :

$\int_0^1 (1+e^x)e^x\,dx = \int_0^1 (e^x + e^{2x})\,dx = \left[e^x + \frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1 = \left[e^1 + \frac{e^2}{2}\right] - \left[e^0 + \frac{e^0}{2}\right] = e^1 + \frac{e^2}{2} - \frac{3}{2}$

وزاري 2013 / د1 **وزاري 2011 / د2**

(f) $\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1}dx = [ln(x^3+4x+1)]_0^1 = ln6 - ln1 = ln6 - 0 = ln6$

وزاري 2012 / د2 **وزاري 2015 / د2**

(g) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}dx = [e^{\sqrt{x}}]_0^4 = [e^{\sqrt{4}} - e^{\sqrt{1}}] = e^2 - e^1$

وزاري 2011 / د1

(h) $\int_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{sec^2x}{2+tanx}\right)dx = [\,ln|2+tanx|\,]_{\frac{-\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = ln\left|2+tan\frac{\pi}{4}\right| - ln\left|2+tan\frac{-\pi}{4}\right| = ln3 - ln1 = ln3 - 0 = ln3$

$$(i)\quad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{\sqrt{sinx}}dx = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} (sinx)^{\left(\frac{-1}{2}\right)} cosx\, dx = \left[\frac{(sinx)^{\left(\frac{1}{2}\right)}}{\left(\frac{1}{2}\right)}\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = [2\sqrt{sinx}\ ]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 2\sqrt{sin\frac{\pi}{2}} - 2\sqrt{sin\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{\frac{1}{2}} = 2 - \frac{2}{\sqrt{2}} = \boxed{2-\sqrt{2}}$$

$$(j)\ \int cot^3 5x\, dx = \int (cot^2 5x)\cot 5x\ \ dx = \int (csc^2 5x - 1)\cot 5x\ \ dx$$

$$= \int (csc^2 5x \cot 5x\ - \cot 5x\,)\, dx\ = \int \cot 5x\ csc^2 5x\, dx - \int \cot 5x\ dx$$

$$= \left(\frac{-1}{5}\right)\frac{cot^2 5x}{2} - \int \frac{\cos 5x}{\sin 5x}dx = \frac{-1}{10}cot^2 5x - \frac{1}{5}\ ln|sin\ 5x| + c$$

وزاري 2015 / د1

$$(k)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{cosx}(sinx)\, dx = -\ [e^{cosx}]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\left[e^{\left(cos\frac{\pi}{2}\right)} - e^{(0)}\right] = -[e^0 - e^1] = -1 + e$$

$$(L)\ \int_1^2 xe^{-lnx}\, dx = \int_1^2 xe^{ln(x)^{-1}}\, dx = \int_1^2 x(x)^{-1}\, dx = \int_1^2 dx = [x\ ]_1^2 = 2 - 1 = 1$$

س 3/ أثبت أن :

$$(a)\ \int_1^8 \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x} - 1}}{\sqrt[3]{x^2}} dx = 2$$

$$\text{الأيسر} = \int_1^8 x^{\frac{-2}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}} - 1\right)^{\frac{1}{2}} dx = \ 3\int_1^8 \left(\frac{1}{3}\right)x^{\frac{-2}{3}}\left(x^{\frac{1}{3}} - 1\right)^{\frac{1}{2}} dx =\ 3\left[\frac{\left(x^{\frac{1}{3}} - 1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^8$$

$$=\ 2\left[\left(x^{\frac{1}{3}} - 1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_1^8 =\ 2\left[\left(8^{\frac{1}{3}} - 1\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1^{\frac{1}{3}} - 1\right)^{\frac{3}{2}}\right]$$

$$=\ 2\left[(2-1)^{\frac{3}{2}} - (1-1)^{\frac{3}{2}}\right] = 2\left[(1)^{\frac{3}{2}} - 0\right] = 2(1) = 2 = \text{الأيمن}$$

$(b)\ \int_{-2}^{4} |3x-6|\, dx = 30$

ملاحظة $\boxed{x=2} \Rightarrow 3x = 6$

$$|3x-6| = \begin{cases} 3x-6 & \forall x \geq 2 \\ 6-3x & \forall x < 2 \end{cases}$$

الطرف الأيسر $= \int_{-2}^{4} |3x-6|\, dx = \int_{-2}^{2} (6-3x)\, dx + \int_{2}^{4} (3x-6)\, dx = \left[6x - \frac{3x^2}{2}\right]_{-2}^{2} + \left[\frac{3x^2}{2} - 6x\right]_{2}^{4}$

$= ([12-6]-[-12-6]) + ([24-24]-[6-12]) = 6 + 18 + 6 = 30 =$ الطرف الأيمن

وزاري 2016 / د1

س 4/ $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[-2,6]$ فأذا كان $\int_{1}^{6} f(x) = 6$ وكان $\int_{-2}^{6}[f(x)+3]\ dx = 32$ فجـــد $\int_{-2}^{1} f(x)\, dx$

$$\because \int_{-2}^{6} [f(x)+3]\ dx = 32$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^{6} f(x)\ dx + \int_{-2}^{6} 3\ dx = 32$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^{6} f(x)\ dx + |3x|_{-2}^{6} = 32$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^{6} f(x)\ dx + [18-(-6)] = 32$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^{6} f(x)\ dx + 24 = 32$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^{6} f(x)\ dx = 8$$

$$\because \int_{-2}^{6} f(x)\ dx = \int_{-2}^{1} f(x)\ dx + \int_{1}^{6} f(x)\ dx$$

$$\therefore\ 8 = \int_{-2}^{1} f(x)\ dx + 6$$

$$\Rightarrow \int_{-2}^{1} f(x)\ dx = 8-6 \quad \Rightarrow \int_{-2}^{1} f(x)\ dx = 2$$

س 5/ جد قيمة $a \in R$ أذا علمت أن $\int_1^a \left(x+\frac{1}{2}\right)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^2x\,dx$

الحل /

$$\int_1^a \left(x+\frac{1}{2}\right)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^2x\,dx \Rightarrow \left[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}x\right]_1^a + 2[tanx]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a^2}{2}+\frac{a}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right) = 2\left[tan\,\frac{\pi}{4} - tan\,0\right] \Rightarrow \frac{a^2}{2}+\frac{a}{2}-1 = 2[1-0]$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{2}+\frac{a}{2}-1 = 2 \Rightarrow \frac{a^2}{2}+\frac{a}{2} = 3 \overset{(\times 2)}{\Longrightarrow} a^2+a-6=0 \Rightarrow (a+3)(a-2)=0$$

$either \quad a=-3 \quad or \quad a=2$

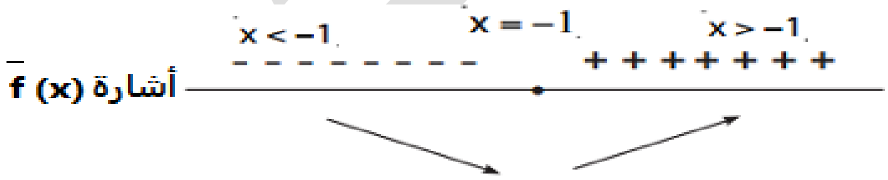
س 6/ لتكن $f(x) = x^2+2x+k$ حيث $k \in R$ دالة نهايتها الصغرى تساوي (-5) فجد $\int_1^3 f(x)dx$

الحل / $\because$ للدالة نهاية صغرى

$\therefore \quad \bar{f}(x) = 0$

$$f(x) = x^2+2x+k$$

$$\bar{f}(x) = 2x+2 \Rightarrow 0 = 2x+2 \Rightarrow 2x=-2 \overset{(\div 2)}{\Longrightarrow} x=-1$$



$\therefore$ النقطة $(-1,-5)$ نقطة نهاية صغرى محلية وهي تحقق معادلة الدالة $f(x)$

$$-5 = (-1)^2+2(-1)+k \Rightarrow -5 = 1-2+k \Rightarrow k=-4$$

$$\therefore \quad f(x) = x^2+2x-4$$

$$\therefore \int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 (x^2+2x-4)dx = \left[\frac{x^3}{3}+x^2-4x\right]_1^3$$

$$= (9+9-12)-\left(\frac{1}{3}+1-4\right) = 6-\left(\frac{1}{3}-3\right)$$

$$= 6-\left(\frac{1-9}{3}\right) = 6-\left(\frac{-8}{3}\right) = \frac{18+8}{3} = \frac{26}{3}$$

س 7/ أذا كـان للمنحنــي $f(x) = (x-3)^3 + 1$ نقطـة انقـــــلاب (a, b) جـد القيمــة العدديــة للمقـدار $\int_0^b \bar{f}(x)\ dx - \int_0^a \bar{\bar{f}}(x)\ dx$

وزاري 2015 / د3

الحل / ∵ للدالة نقطة أنقلاب

$\therefore \quad \bar{\bar{f}}(x) = 0$

$f(x) = (x-3)^3 + 1$

$\bar{f}(x) = 3(x-3)^2$

$\bar{\bar{f}}(x) = 6(x-3) \quad \Rightarrow \quad 6(x-3) = 0 \quad \overset{(\div 6)}{\Longrightarrow} \quad x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

$f(3) = (3-3)^3 + 1 = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1$

∴ نقطة الأنقلاب (a, b) هي $(3, 1)$ أي أن $\boxed{b = 1}$, $\boxed{a = 3}$

أشارة $\bar{\bar{f}}(x)$:

$x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
- - - - - - - - -	•	+ + + + + + +
تحدب		تقعر

$$\int_0^b \bar{f}(x)\ dx - \int_0^a \bar{\bar{f}}(x)\ dx = \int_0^1 3(x-3)^2\ dx - \int_0^3 6(x-3)\,dx$$

$$= 3\left[\frac{(x-3)^3}{3}\right]_0^1 - 6\left[\frac{(x-3)^2}{2}\right]_0^3$$

$$= 3\left[\frac{(1-3)^3}{3} - \frac{(0-3)^3}{3}\right] - 6\left[\frac{(3-3)^2}{2} - \frac{(0-3)^2}{2}\right]$$

$$= 3\left[\frac{-8}{3} + \frac{27}{3}\right] - 6\left[0 - \frac{9}{2}\right]$$

$$= 3\left[\frac{19}{3}\right] - 6\left[\frac{-9}{2}\right]$$

$$= 19 + 27 = 46$$

أمثلة أضافية محلولة

مثال / جد التكاملات التالية :

(1) $\int \sec x\, dx = \int \frac{\sec x(\sec x + \tan x)}{(\sec x + \tan x)}\, dx = \int \frac{\sec^2 x + \sec x \tan x}{\sec x + \tan x}\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$

(2) $\int e^{\ln(x^2+5)} dx = \int (x^2 + 5) dx = \frac{x^3}{3} + 5x + c$

(3) $\int_{-2}^{2} e^{|x|}\, dx = \int_{-2}^{0} e^{-x}\, dx + \int_{0}^{2} e^{x}\, dx = -[1 - e^2] + [e^2 - 1] = 2e^2 - 2$

(4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 + \ln x}} = \int \frac{(1 + \ln x)^{\frac{-1}{2}} dx}{x} = \frac{(1 + \ln x)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)} + c = 2\sqrt{1 + \ln x} + c$

(5) $\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\ln|\cos x| + c = \ln|\sec x| + c$

(6) $\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx = \ln|\sin x| + c$

(7) $\int \csc x\, dx = \int \frac{\csc x(\csc x + \cot x)}{(\csc x + \cot x)}\, dx = \int \frac{\csc^2 x + \csc x \cot x}{\csc x + \cot x}\, dx = -\ln|\csc x + \cot x| + c$

(8) $\int \frac{\sec\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = 2\int \frac{\sec\sqrt{x}}{(2)\sqrt{x}} dx = 2\ln|\sec\sqrt{x} + \tan\sqrt{x}| + c$

(9) $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}\right) dx = \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{\ln x}{x} dx = \ln x + \frac{(\ln x)^2}{2} + c$

(10) $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\, dx = \frac{(\ln x)^4}{4} + c$

(14) $\int \frac{e^x}{(e + e^x)^2} dx = \int e^x (e + e^x)^{-2} dx = \frac{(e + e^x)^{-1}}{-1} + c = \frac{-1}{e + e^x} + c$

مثال / جد $\frac{dy}{dx}$ للدوال التالية :

(1) $y = (x)^x \Rightarrow lny = lnx^x \Rightarrow lny = xlnx \Rightarrow \frac{\bar{y}}{y} = x\left(\frac{1}{x}\right) + lnx(1)$

$\Rightarrow \frac{\bar{y}}{y} = 1 + lnx \Rightarrow \bar{y} = y(1 + lnx) \Rightarrow \bar{y} = (x)^x(1 + lnx)$

(2) $y = (x)^{lnx} \Rightarrow lny = ln(x)^{lnx} \Rightarrow lny = (lnx)(lnx) = (lnx)^2 \Rightarrow \frac{\bar{y}}{y} = 2lnx\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow \frac{\bar{y}}{y} = \frac{2lnx}{x} \Rightarrow \bar{y} = y\left(\frac{2lnx}{x}\right) \Rightarrow \bar{y} = (x)^{lnx}\left(\frac{2lnx}{x}\right)$

(3) $e^y = cosx \Rightarrow ln\, e^y = ln(cosx) \Rightarrow y = \ln(cosx) \Rightarrow \bar{y} = \frac{-sinx}{cosx} = -tanx$

(4) $xe^y = tan(x + y) \Rightarrow xe^y.\bar{y} + e^y = sec^2(x + y).[1 + \bar{y}]$

$\Rightarrow xe^y.\bar{y} + e^y = sec^2(x + y) + sec^2(x + y)\bar{y}$

$\Rightarrow xe^y.\bar{y} - sec^2(x + y)\bar{y} = sec^2(x + y) - e^y$

$\Rightarrow \bar{y}\,[xe^y - sec^2(x + y)] = sec^2(x + y) - e^y$

$\Rightarrow \bar{y} = \frac{sec^2(x + y) - e^y}{xe^y - sec^2(x + y)}$

(5) $y = \frac{x}{3^x - 1} \Rightarrow \bar{y} = \frac{(3^x - 1)(1) - (x)(ln3.3^x)}{(3^x - 1)^2} = \frac{(3^x - 1) - (xln3.3^x)}{(3^x - 1)^2}$

مثال / جد معادلة المماس للمنحني للدوال التالية :

(a) $y = e^x$ عندما $x = 0$

$y = e^x \Rightarrow y = e^0 = 1 \Rightarrow (0, 1)$ نقطة التماس

ميل المماس $= \bar{y} = e^x = e^0 = 1$

$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow 1 = \frac{y - 1}{x - 0} \Rightarrow y - 1 = x \Rightarrow y - x - 1 = 0$ (معادلة المماس)

(b) $y = 2^x$ عندما $x = 1$

$y = 2^x \Rightarrow y = 2^1 = 2 \quad \Rightarrow (1,2)$ نقطة التماس

ميل المماس $= \bar{y} = (2^x)\, ln2 = (2^1)ln2 = ln2^2 = ln4$

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow ln4 = \frac{y-2}{x-1} \Rightarrow y - 2 = ln4(x-1) \quad (\text{معادلة المماس})$$

(c) $y = xlnx$ عندما $x = e$

$y = xlnx \Rightarrow y = e(lne) = e(1) = e \quad \Rightarrow (e,e)$ نقطة التماس

ميل المماس $= \bar{y} = x\left(\frac{1}{x}\right) + lnx(1) = 1 + lnx = 1 + lne = 1 + 1 = 2$

$$m = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow 2 = \frac{y-e}{x-e} \Rightarrow y - e = 2(x-e) \quad (\text{معادلة المماس})$$

مثال / أثبت أن الدالة $F(x) = ln(secx + tanx)$ ، $F: \left[0, \frac{\pi}{4}\right] R \to R$ دالة مقابلة للدالة $f(x) = secx$ ثم جد قيمة $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$

الحل /

$f(x)$ هي دالة مستمرة و قابلة للأشتقاق وكذلك $\bar{F}(x)$ هي دالة مستمرة وقابلة للأشتقاق أيضا

$$\because \bar{F}(x) = \frac{secx\, tanx + sec^2x}{secx + tanx} = \frac{secx(secx + tanx)}{secx + tanx} = secx = f(x)$$

$\Rightarrow \forall\, x \in R \quad$ (F هي دالة مقابلة للدالة f)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} secxdx = [ln(secx + tanx)] = ln(\sqrt{2} + 1) - ln(1 + 0) = ln(\sqrt{2} + 1)$$

ملاحظة:

أذا كان ميل المنحني يحتوي على المتغير (y) نستخدم $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للميل ثم نضع كل متغير على جهة ثم نكامل الطرفين

****

واجبات

س 1 : جد منحني الدالة الذي يمس المستقيم $3x + y = 7$ وميله عند كل نقطة من نقاطه يساوي $3x^2 - 6y$

س 2 : أذا كانت المشتقة الثانية $\bar{\bar{y}} = 6x$ وكان للدالة النقطة $(-1, 4)$ نقطة نهاية عظمى محلية جد منحني الدالة ثم بأستخدام التفاضل أرسم منحني الدالة

س 3 : جد معادلة منحني الدالة الذي ميله عند كل نقطة من نقطه يساوي $(ax^2 - 6x)$ وله نهاية صغرى محلية قيمتها (-3) وكان المنحني مقعر $(\forall x > 1)$ ومحدب لكل $(\forall x < 1)$

س 4 : جد معادلة المنحني المار بالنقطة $(-1, 2)$ وميله عند كل نقطة من نقطه يساوي $\frac{3x^2-2x+1}{3y^2+2y-3}$

س 5 : جد معادلة المنحنيات أذا علمت أن ميلها عند كل نقطة من نقطها (x, y) هو $\frac{y^2}{sec^2 x}$

****

ايجاد مساحة المنطقة المستوية

مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحني ومحور الســينات

لتكن $y = f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a, b]$ ولتكن A مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $f(x)$ ومحور السينات والمستقيمين $x = a\ ,\ x = b$ فأن $A = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$

خطوات الحل :

لايجاد المساحة بين منحني ومحور السينات نتبع ما يلي :

① نجعل $f(x) = 0$ لايجاد نقاط التقاطع مع محور السينات فأذا كان الناتج ينتمي للفترة $[a, b]$ فنجزي الفترة كما تعلمنا سابقا واذا كان الناتج لاينتمي للفترة فيهمل وتؤخذ الفترة المعطاة فقط .

② اذا لم تعطى مع الدالة فترة فالفترة يتم تحديدها من خلال نقاط تقاطع الدالة مع محور السينات

③ المساحة = مجموع القيم المطلقة للتكاملات المجزئة

مثـــال (1)/ جـــد مســـاحة المنطقـــة المحـــددة بمنحنـــي الدالـــة $f(x) = x^3 - 4x$ ومحـــور الســـينات وعلـــى الفترة $[-2,2]$

الحل /

نجعل $f(x) = 0$ لايجاد نقط التقاطع

$$x^3 - 4x = 0 \quad \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \quad \Rightarrow x(x-2)(x+2) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{x=0} \ \boxed{x=2} \ \boxed{x=-2}$$

$\therefore$ فترات التكامل هي $(0,2)$, $(-2,0)$

$$A = \left|\int_{-2}^{0}(x^3-4x)\,dx\right| + \left|\int_{0}^{2}(x^3-4x)\,dx\right| = \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{-2}^{0} + \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2\right]_{0}^{2}$$

$$A = |(0)-(4-8)| + |(4-8)-(0)| = 4 + |-4| = 8$$ (وحدة مربعة)

وزاري 2013 / د3

مثـــال (2)/ جـــد مســـــــاحة المنطقـــة المحـــــــددة بمنحنـــي الدالـــــة $y = x^2$ ومحـــور الســـينات والمستقيمين $x = 3\ ,\ x = 1$

الحل /

نجعل $y = 0$ لايجاد نقط التقاطع

$$x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \notin [1,3]$$

$$A = \left|\int_{1}^{3} x^2\,dx\right| = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{1}^{3} = \left|\left[\frac{27}{3}\right] - \left[\frac{1}{3}\right]\right| = \frac{26}{3}$$ (وحدة مساحة)

وزاري 2013 / د1

مثال (3)/ جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات

الحل /

نجعل $f(x) = 0$ لايجاد نقط التقاطع

$$x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow x(x-1)(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{x=0} \ \boxed{x=1} \ \boxed{x=2}$$

$$A = \left|\int_{0}^{1}(x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx\right| + \left|\int_{1}^{2}(x^3 - 3x^2 + 2x)\,dx\right| = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_{0}^{1} + \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_{1}^{2}$$

$$A = \left|\left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) - (0)\right| + \left|(4-8+4) - \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right)\right| = \frac{1}{4} + \left|\frac{-1}{4}\right| = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$ (وحدة مساحة)

مثـــال (4)/ جـد مســاحة المنطقـة المحـددة بمنحنــي الدالــة $f(x) = x^2 - 1$ ومحـور السـينات وعلـى الفترة $[-2, 3]$

الحل / نجعل $f(x) = 0$ لايجاد نقط التقاطع

$$x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow (x-1)(x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \pm 1 \quad \in [-2, 3]}$$

$$A = \left|\int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)\, dx\right| + \left|\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\, dx\right| + \left|\int_{1}^{3} (x^2 - 1)\, dx\right|$$

$$A = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{3}$$

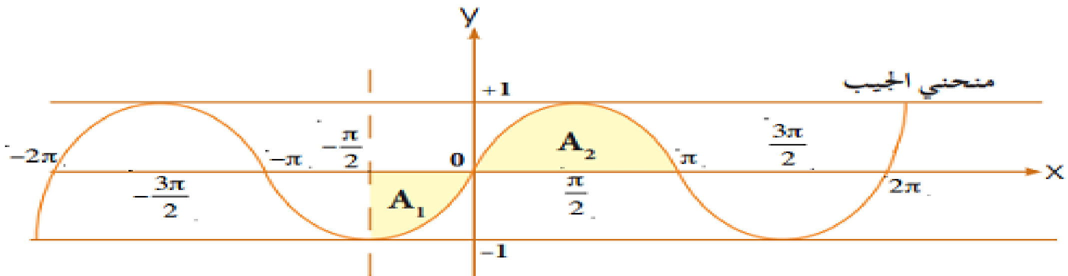
$$A = \left|\left[\left(\frac{-1}{3} + 1\right) - \left(\frac{-8}{3} + 2\right)\right]\right| + \left|\left[\left(\frac{1}{3} - 1\right) - \left(\frac{-1}{3} + 1\right)\right]\right| + \left|\left[(9 - 3) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right]\right|$$

$$A = \left|\frac{7}{3} - 1\right| + \left|\frac{2}{3} - 2\right| + \left|7 - \frac{1}{3}\right| = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$$ (وحدة مساحة)

مثـــال (5)/ جـد مســــاحة المنطقـة المحـددة بمنحنــي الدالــة $f(x) = sinx$ ومحـور السـينات وعلـى الفترة $\left[\frac{-\pi}{2}, \pi\right]$

الحل / نجعل $f(x) = 0$ لايجاد نقط التقاطع

$$sinx = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 0 \quad \in \left[\frac{-\pi}{2}, \pi\right]}$$



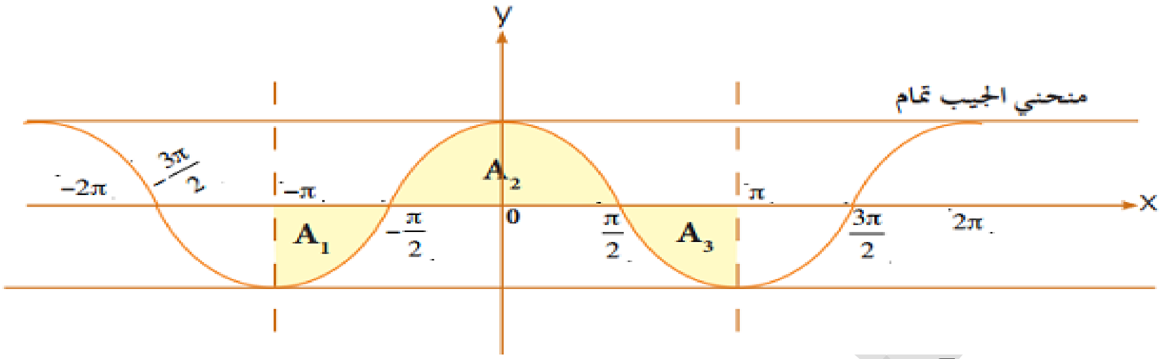
$$A = \left|\int_{\frac{-\pi}{2}}^{0} sinx\, dx\right| + \left|\int_{0}^{\pi} sinx\, dx\right| = \left|\ [-\cos x]_{\frac{-\pi}{2}}^{0}\right| + \left|\ [-\cos x]_{0}^{\pi}\right|$$

$$A = \left|-cos(0) + cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right| + |-cos(\pi) + cos(0)| = [-1 + 0] + [1 + 1] = |-1| + 2 = 3$$ (وحدة مساحة)

مثـــال (6)/ جـد مســـــاحة المنطقــة المحــددة بمنحنـــي الدالـــــة $y = cosx$ ومحــور الســينات وعلــى الفترة $[-\pi, \pi]$

الحل / نجعل $f(x) = 0$ لايجاد نقط التقاطع

$$cosx = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pm\pi}{2} \quad \in [-\pi, \pi]}$$



$$A = \left|\int_{-\pi}^{\frac{-\pi}{2}} cosx\, dx\right| + \left|\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cosx\, dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} cosx\, dx\right| = \left|[sinx]_{-\pi}^{\frac{-\pi}{2}}\right| + \left|[sinx]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\right| + \left|[sinx]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right|$$

$$A = \left|sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) - sin(-\pi)\right| + \left|sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right| + \left|sin(\pi) - sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|$$

$A = |-1 - 0| + |1 + 1| + |0 - 1| = |-1| + 2 + |-1| = 1 + 2 + 1 = 4$ (وحدة مساحة)

****

أمثلة أضافية محلولة

مثـــال / جـد مســـــاحة المنطقــة المحــددة بمنحنـــي الدالـــة $f(x) = x^2 - 4$ ومحــور الســينات وعلــى الفترة $[-1, 3]$

الحل / نجعل $f(x) = 0$ لايجاد نقط التقاطع

$x^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow (x-2)(x+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 2 \quad \in [-1, 3]}$ (يهمل السالب)

$$A = \left|\int_{-1}^{2} (x^2 - 4)\, dx\right| + \left|\int_{2}^{3} (x^2 - 4)\, dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-1}^{2}\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{2}^{3}\right|$$

$$A = \left|\left(\frac{8}{3} - 8\right) - \left(\frac{-1}{3} + 4\right)\right| + \left|(9 - 12) - \left(\frac{8}{3} - 8\right)\right| = \left|\frac{9}{3} - 8 - 4\right| + \left|-3 - \frac{8}{3} + 8\right|$$

$A = |3 - 12| + \left|5 - \frac{8}{3}\right| = |-9| + \left|\frac{15 - 8}{3}\right| = 9 + \frac{7}{3} = \frac{27 + 7}{3} = \frac{34}{3}$ (وحدة مساحة)

مثال / جد مســـــاحة المنطقة المحددة بمنحني الدالـــة $f(x)=e^x$ ومحور الســـينات وعلى الفترة $[0,2]$

الحل / نجعل $f(x)=0$ لايجاد نقط التقاطع

$e^x=0$ (لايمكن لأنه دائما عدد موجب أكبر من الصفر)

$$A=\left|\int_0^2 e^x\,dx\right|=\left|e^2-e^0\right|=(e^2-1) \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

مثـــال / جـــد مســـاحة المنطقـــة المحـــددة بمنحنـــي الدالـــة $f(x)=cos^2x-sin^2x$ ومحـــور الســـينات وعلى الفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

الحل / نجعل $f(x)=0$ لايجاد نقط التقاطع

$$cos^2x-sin^2x=0 \quad \Rightarrow cos2x=0 \quad \Rightarrow 2x=\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{4} \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]}$$

$$A=\left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos2x\,dx\right|+\left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} cos2x\,dx\right|=\left|\left[\frac{1}{2}sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right|+\left|\left[\frac{1}{2}sin2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|=\left[\frac{1}{2}(1-0)\right]+\left[\frac{1}{2}(0-1)\right]$$

$$A=\frac{1}{2}+\left|-\frac{1}{2}\right|=1 \quad \text{(وحدة مربعة)}$$

****

مساحة المنطقة المحددة بمنحنيين

لتكن $f(x)$, $g(x)$ دالتين مستمرتان على الفترة $[a,b]$ فأن المساحة المحددة بـالمنحنيين f,g والمستقيمين $x=b$, $x=a$ هي $\boxed{A=\left|\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx\right|}$

خطوات الحل :

لايجاد المساحة بين منحني دالتين نتبع مايلي :

① نجعـل $f(x)=g(x)$ لايجـاد نقـاط التقـاطع فـأذا كـان النـاتج ينتمـي للفتـرة $[a,b]$ فنجـزي الفتـرة كمـا تعلمنـا سابقا واذا كان الناتج لاينتمي للفترة فيهمل وتؤخذ الفترة المعطاة فقط .

②اذا لم تعطى مع الدالة فترة فالفترة يتم تحديدها من خلال نقاط تقاطع الدالتين .

③ المساحة = مجموع القيم المطلقة للتكاملات المجزئة (للدالة الأكبر – الدالة الأصغر)

وزاري 2011 / د1

مثال (1)/ جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $y = \sqrt{x}$ والمستقيم $y = x$

الحل /

نجد نقط التقاطع وذلك بجعل $\sqrt{x} = x$

$$\sqrt{x} = x \xRightarrow{(\text{بالتربيع})} x = x^2 \quad \Rightarrow x^2 - x = 0 \quad \Rightarrow x(x-1) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{x = 0} \quad \boxed{x = 1}$$

$$A = \left|\int_0^1 (\sqrt{x} - x)\, dx\right| = \left|\int_0^1 \left(x^{\left(\frac{1}{2}\right)} - x\right) dx\right| = \left|\left[\frac{x^{\left(\frac{3}{2}\right)}}{\left(\frac{3}{2}\right)} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1\right| = \left[\left[\frac{2\ \sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1\right]$$

$$A = \left[\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) - (0)\right] = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6} \quad (\text{وحدة مساحة})$$

مثال (2)/ جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني $y = x^3$ والمستقيم $y = x$

الحل /

نجد نقط التقاطع وذلك بجعل $x^3 = x$

$$x^3 = x \quad \Rightarrow x^3 - x = 0 \quad \Rightarrow x(x^2 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{x = 0} \quad \boxed{x = \pm 1}$$

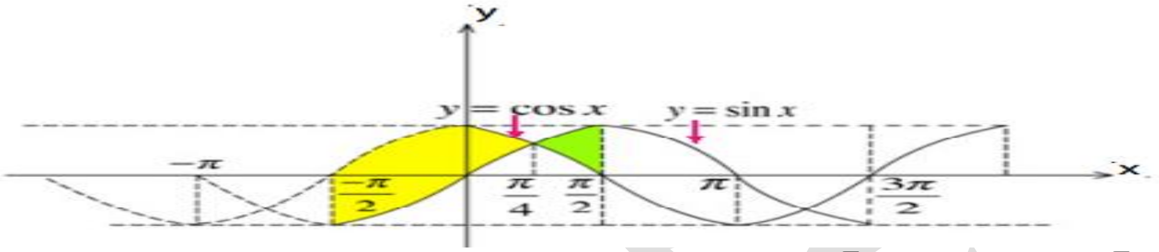
$$A = \left|\int_{-1}^0 (x^3 - x)\, dx\right| + \left|\int_0^1 (x^3 - x)\, dx\right| = \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^0\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1\right|$$

$$A = \left|(0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)\right| + \left|\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) - (0)\right| = \frac{1}{4} + \left|\frac{-1}{4}\right| = \frac{1}{2} \quad (\text{وحدة مساحة})$$

مثـــال (3)/ جـــد مســـــاحة المنطقـــة المحـــددة بـــالمنحنيين $f(x) = cosx$ و $g(x) = sinx$ وعلى الفترة $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

الحل / نجعل $f(x) = g(x)$ لايجاد نقط التقاطع

$$cosx = sinx \quad \Rightarrow \quad tan\,x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$ (الأتجاه الموجب)



$$A = \left|\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (cosx - sinx)\,dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (cosx - sinx)\,dx\right| = \left|[sinx + cosx]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|[sinx + cosx]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$A = \left|\left(sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \left(sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) + cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)\right| + \left|\left(sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - \left(sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right|$$

$$A = \left|\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - (-1 + 0)\right| + \left|(1 + 0) - \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|$$

$$A = \left|\frac{2}{\sqrt{2}} + 1\right| + \left|1 - \frac{2}{\sqrt{2}}\right| = |\sqrt{2} + 1| + |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2}$$ (وحدة مساحة)

****

أمثلة أضافية محلولة

مثـــال / جـــد مســـــاحة المنطقـــة المحـــددة بـــالمنحنيين $f(x) = x^2 - 2x + 1$ و $g(x) = x + 5$ وعلى الفترة $[-2, 3]$

الحل / نجعل $f(x) = g(x)$ لايجاد نقط التقاطع

$$x^2 - 2x + 1 = x + 5 \quad \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \Rightarrow (x - 4)(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = -1 \in [-2, 3]} \quad \boxed{x = 4 \notin [-2, 3]}$$

$$A = \left|\int_{-2}^{-1} (x^2 - 3x - 4)\,dx\right| + \left|\int_{-1}^{3} (x^2 - 3x - 4)\,dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 4x\right]_{-2}^{-1}\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 4x\right]_{-1}^{3}\right|$$

$$A = \left|\left(\frac{-1}{3} - \frac{3}{2} + 4\right) - \left(\frac{-8}{3} - 6 + 8\right)\right| + \left|\left(9 - \frac{27}{2} - 12\right) - \left(\frac{-1}{3} - \frac{3}{2} + 4\right)\right|$$

$$A = \left|\frac{-2 - 9 + 24 + 16 + 36 - 48}{6}\right| + \left|\frac{54 - 81 - 72 + 2 + 9 - 24}{6}\right| = \frac{17}{6} + \left|\frac{-112}{6}\right|$$

$$A = \frac{17}{6} + \frac{112}{6} = \frac{129}{6} = \frac{43}{2}$$ (وحدة مساحة)

مثال / جد المساحة المحددة بالمنحنيين $y = x^4 - 12$ و $y = x^2$

الحل /

نجعل $f(x) = g(x)$ لايجاد نقط التقاطع

$$x^4 - 12 = x^2 \quad \Rightarrow x^4 - x^2 - 12 = 0 \quad \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 + 3) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{x = \pm 2} \quad \boxed{x = \mp\sqrt{-3} \text{ يهمل}}$$

$$A = \left|\int_{-2}^{2} (x^4 - x^2 - 12)\, dx\right| = \left|\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} - 12x\right]_{-2}^{2}\right| = \left[\frac{32}{5} - \frac{8}{3} - 24\right] + \left[\frac{-32}{5} + \frac{8}{3} + 24\right]$$

$$A = \left|\frac{96 - 40 - 360}{15}\right| + \left|\frac{-96 + 40 + 360}{15}\right| = \left|\frac{-304}{15}\right| + \frac{304}{15} = \frac{608}{15} = 40\frac{8}{15} \quad (\text{وحدة مساحة})$$

مثال / جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $f(x) = 2sin^2x - 1$ و $g(x) = sin^2x$ وعلى الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

الحل /

نجعل $f(x) = g(x)$ لايجاد نقط التقاطع

$$2sin^2x - 1 = sin^2x \quad \Rightarrow 2sin^2x - sin^2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow sin^2x = 1 \quad \Rightarrow sinx = \pm 1$$

$$if \;\; sinx = 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad or \;\; sinx = -1 \;\; (\text{يهمل})$$

$$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin^2x - 1)\, dx\right| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} (sin^2x)\, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\right| = \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}cos2x\right) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx\right|$$

$$A = \left|\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}sin2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - [x]_0^{\frac{\pi}{2}}\right| = \left|\left[\left(\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} - 0\right) - 0\right] - \left[\frac{\pi}{2} - 0\right]\right| = \left|\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right| = \left|\frac{-\pi}{4}\right|$$

$$A = \frac{\pi}{4} \quad (\text{وحدة مساحة})$$

مثال / جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $f(x) = |x-1| + 2$ و $g(x) = \frac{-1}{5}x + 7$,

الحل / $f(x) = \begin{cases} x+1 & \forall x \geq 1 \\ 3-x & \forall x < 1 \end{cases}$ ⬅ $f(x) = \begin{cases} x-1+2 & \forall x \geq 1 \\ 1-x+2 & \forall x < 1 \end{cases}$

نجعل $f(x) = g(x)$ لايجاد نقط التقاطع

$$x+1 = \frac{-1}{5}x + 7 \quad \Rightarrow \quad \frac{6}{5}x = 6 \quad \Rightarrow \boxed{x = 5} \quad \forall x \geq 1$$

$$3 - x = \frac{-1}{5}x + 7 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{5}x = -4 \quad \Rightarrow \boxed{x = -5} \quad \forall x < 1$$

$$A = \left|\int_{-5}^{1}\left(\frac{4}{5}x + 4\right)dx\right| + \left|\int_{1}^{5}\left(\frac{-6}{5}x + 6\right)dx\right| = \left|\left[\frac{4x^2}{10} + 4x\right]_{-5}^{1}\right| + \left|\left[\frac{-6x^2}{10} + 6x\right]_{1}^{5}\right|$$

$$A = \left|\left(\frac{4}{10} + 4\right) - (10 - 20)\right| + \left|(-15 + 30) - \left(\frac{-6}{10} + 6\right)\right| = \left|\frac{44}{10} + 10\right| + \left|15 - \frac{54}{10}\right|$$

$$A = \left|\frac{44 + 100 + 150 - 54}{10}\right| = \frac{240}{10} = 24$$ (وحدة مساحة)

مثال / جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$, $g(x) = x^2$ وعلى الفترة $[0,1]$

الحل / نجعل $f(x) = g(x)$ لايجاد نقط التقاطع

$$x^2 = \frac{1}{2}x + 2 \quad \Rightarrow x^2 - \frac{1}{2}x - 2 = 0 \quad \xRightarrow{\text{(بالدستور)}} x = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 8}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{33}{4}}}{2} = \frac{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{33}}{2}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{4} \notin [0,1]$$

نختبر الدالة $\boxed{f(0) = 2} > \boxed{g(0) = 0}$ لذا فأن الدالة $f(x)$ هي الدالة الأكبر

$$A = \left|\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}x + 2 - x^2\right)dx\right| = \left|\left[\frac{x^2}{4} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1}\right| = \left|\left(\frac{1}{4} + 2 - \frac{1}{3}\right) - (0)\right| = \frac{3 + 24 - 4}{12}$$

$$A = \frac{23}{12}$$ (وحدة مساحة)

المســـــافة

لـتكن $V(t)$ سـرعة جسـم يتحـرك علـى خـط مسـتقيم وفـي مسـتوي مـا فـأن المسـافة المقطوعـة فـي الفتـرة الزمنية $[t_1 , t_2]$ هي : $d = \int_{t_1}^{t_2} |V(t)|\, dt$

حيث تمثل (d) مقدار المسافة وهي كمية غير متجهة

أمـــــــا الأزاحــة (s) والســـــــرعة (v) والتعجيــل (a) فهـــي كميـــــات متجهـــة وأن أزاحـــــة الجسم هي $s = \int_{t_1}^{t_2} V(t)\, dt$

و سرعة الجسم $v = \int a(t)\, dt$

ملاحظات :

① الأزاحة تكامل محدد للسرعة ويكون بدون مطلق لأن الناتج لا يهم أذا كان موجب أو سالب أو صفر

② وجود المطلق في قانون المسافة هو لكي لا يكون الناتج سالب

③ أذا طلب في السؤال مثلا جد الأزاحة خلال الثانية الثامنة فهذا يعني حساب $\int_7^8 \text{الدالة}$

④أذا طلب في السؤال مثلا جد الأزاحة خلال الثواني الخمس الأولى فهذا يعني حساب $\int_0^5 \text{الدالة}$

⑤ أذا أعطي في السؤال تعجيل الجسم فأن $\int \text{التعجيل} = V(t) = \text{السرعة}$ وهو تكامل غير محدد

⑥ فـي حالـة أيجـاد المسـافة يتغيـر أتجـاه الجسـم وهـذا يعنـي حـدوث تجزئـة فـي التكامـل أن وجـد وفـي حالـة الأزاحة يكون أتجاه الجسم ثابت لذا تهمل التجزئة في التكامل أن وجدت .

مثال (1)/ جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t) = 2t - 4 \quad m/s$ فجـــــــد :

ⓐ المسافة المقطوعة في الفترة $[1,3]$ ⓑالأزاحة المقطوعة في الفترة $[1,3]$

ⓒالمسافة المقطوعة في الثانية الخامسة ⓓبعده بعد مضي (4) ثواني من بدء الحركة

الحل /

$2t - 4 = 0 \quad \Rightarrow 2t = 4 \quad \Rightarrow \boxed{t = 2 \in [1,3]}$

ⓐ $d = \left|\int_1^2 (2t-4)\,dt\right| + \left|\int_2^3 (2t-4)\,dt\right| = \left|[t^2 - 4t]_1^2\right| + \left|[t^2 - 4t]_2^3\right|$

$d = |(4-8) - (1-4)| + |(9-12) - (4-8)| = |-4+3| + |-3+4| = 1 + 1 = 2 \quad m$

ⓑ $s = \int_1^3 (2t-4)\,dt = [t^2 - 4t]_1^3 = (9-12) - (1-4) = -3 + 3 = 0$

ⓒ $d = \left|\int_4^5 (2t-4)\,dt\right| = \left|[t^2 - 4t]_4^5\right| = |[(25-20) - (16-16)]| = 5 \quad m$

ⓓ $s = \int_0^4 (2t-4)\,dt = \left|[t^2 - 4t]_0^4\right| = [(16-16) - (0)] = 0$

مثال (2)/ جسـم يتحـرك علـى خـط مسـتقيم بتعجيـل $(18 \quad m/s^2)$ فـأذا كانـت سـرعته قـد أصـبحت $(82 \quad m/s)$ بعد مرور (4) ثواني من بدء الحركة فجد :

ⓐ المسافة خلال الثانية الثالثة ⓑبعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور (3) ثواني

الحل /

ⓐ $V = \int a(t)\,dt = \int 18\,dt = 18t + c \quad \Rightarrow \quad V = 18t + c$

$82 = 18(4) + c \quad \Rightarrow \quad c = 82 - 72 = 10$

$V = 18t + 10$

$d = \left|\int_2^3 (18t + 10)\,dt\right| = \left|[9t^2 + 10t]_2^3\right| = |(81+30) - (36+20)| = 111 - 56 = 55 \quad m$

ⓑ $s = \int_0^3 (18t + 10)\,dt = [9t^2 + 10t]_0^3 = (81 + 30) - (0) = 111 \quad m$

ⓒ في المثال أعلاه جد السرعة بعد مرور (10) ثواني

ⓒ $V(t) = 18t + 10 \quad \Rightarrow \quad V(10) = 18(10) + 10 = 180 + 10 = 190 \quad m/s$

تمارين $(6-4)$

س 1/ جد المساحة المحددة بالمنحني $y=x^4-x$ ومحور السينات والمستقيمين $x=1\ ,\ x=-1$

الحل / نجعل $f(x)=0$ لايجاد نقط التقاطع

وزاري 2012 / د2

$x^4-x=0 \quad \Rightarrow x(x^3-1)=0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=0 \quad \in[-1,1]} \quad \boxed{x=1 \quad \in[-1,1]}$

$$A=\left|\int_{-1}^{0}(x^4-x)\,dx\right|+\left|\int_{0}^{1}(x^4-x)\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right|+\left|\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}\right|$$

$$A=\left|(0)-\left(\frac{-1}{5}-\frac{1}{2}\right)\right|+\left|\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2}\right)-(0)\right|=\left|-\left(\frac{-2-5}{10}\right)\right|+\left|\left(\frac{2-5}{10}\right)\right|=\frac{7}{10}+\frac{3}{10}=\frac{10}{10}=1 \quad \text{(وحدة مساحة)}$$

س 2/ جد المساحة المحددة بالدالة $f(x)=x^4-3x^2-4$ وعلى الفترة $[-2,3]$ ومحور السينات

الحل / نجعل $f(x)=0$ لايجاد نقط التقاطع

$x^4-3x^2-4=0 \quad \Rightarrow (x^2-4)(x^2+1)=0 \quad \Rightarrow \quad x=\pm 2 \quad \in[-2,3] \quad , \quad x^2=-1$ يهمل

$$A=\left|\int_{-2}^{2}(x^4-3x^2-4)\,dx\right|+\left|\int_{2}^{3}(x^4-3x^2-4)\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^5}{5}-x^3-4x\right]_{-2}^{2}\right|+\left|\left[\frac{x^5}{5}-x^3-4x\right]_{2}^{3}\right|$$

$$A=\left|\left(\frac{32}{5}-8-8\right)-\left(\frac{-32}{5}+8+8\right)\right|+\left|\left(\frac{243}{5}-27-12\right)-\left(\frac{32}{5}-8-8\right)\right|$$

$$A=\left|\frac{64}{5}-32\right|+\left|\frac{211}{5}-23\right|=\left|\frac{64-160}{5}\right|+\left|\frac{211-115}{5}\right|=\frac{|-96|+96}{5}=\frac{192}{5} \quad \text{(وحدة مساحة)}$$

س 3/ جد المساحة المحددة بالدالة $f(x)=x^4-x^2$ ومحور السينات

الحل / نجعل $f(x)=0$ لايجاد نقط التقاطع

$x^4-x^2=0 \Rightarrow x^2(x^2-1)=0 \Rightarrow x^2(x-1)(x+1)=0 \quad \Rightarrow \boxed{x=0} \ \boxed{x=1} \ \boxed{x=-1}$

$$A=\left|\int_{-1}^{0}(x^4-x^2)\,dx\right|+\left|\int_{0}^{1}(x^4-x^2)\,dx\right|=\left|\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0}\right|+\left|\left[\frac{x^5}{5}-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1}\right|$$

$$A=\left|(0)-\left(\frac{-1}{5}+\frac{1}{3}\right)\right|+\left|\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)-(0)\right|=\left|\frac{3-5}{15}\right|+\left|\frac{3-5}{15}\right|=\left|\frac{-2}{15}\right|+\left|\frac{-2}{15}\right|=\frac{4}{15} \quad \text{(وحدة مساحة)}$$

س 4/ جد المساحة المحددة بالمنحني $y = sin3x$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

الحل /

نجعل $f(x) = 0$ لايجاد نقط التقاطع

$$sin3x = 0 \quad \Rightarrow 3x = 0, \pi, 2\pi \quad \Rightarrow \boxed{x = 0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} \quad \boxed{x = \frac{\pi}{3} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} \quad \boxed{x = \frac{2\pi}{3} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]}$$

$$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{3}} sin3x\, dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} sin3x\, dx\right| = \left|\left[\frac{-cos\,3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}\right| + \left|\left[\frac{-cos\,3x}{3}\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$A = \left|\left[\frac{-cos\,3\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3}\right] - \left[\frac{-cos\,3(0)}{3}\right]\right| + \left|\left[\frac{-cos\,3\left(\frac{\pi}{2}\right)}{3}\right] - \left[\frac{-cos\,3\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3}\right]\right|$$

$$A = \left|\left[\frac{-cos\,(\pi)}{3}\right] - \left[\frac{-cos\,(0)}{3}\right]\right| + \left|\left[\frac{-cos\,\left(\frac{3\pi}{2}\right)}{3}\right] - \left[\frac{-cos\,(\pi)}{3}\right]\right|$$

$$A = \left|\left[\frac{-(-1)}{3}\right] - \left[\frac{-1}{3}\right]\right| + \left|[0] - \left[\frac{-(-1)}{3}\right]\right| = \left|\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right| + \left|\frac{-1}{3}\right| = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$ وحدة مساحة

س 5/ جد المساحة المحددة بالمنحني $y = 2cos^2x - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

الحل /

نجعل $f(x) = 0$ لايجاد نقط التقاطع

$$2cos^2x - 1 = 0 \quad \Rightarrow cos2x = 0 \quad \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \boxed{x = \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} \quad \boxed{x = \frac{3\pi}{4} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]}$$

$$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} cos2x\, dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} cos2x\, dx\right| = \left|\left[\frac{sin\,2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|\left[\frac{sin\,2x}{2}\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$A = \left|\frac{sin\,2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} - \frac{sin\,2(0)}{2}\right| + \left|\frac{sin\,2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} - \frac{sin\,2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}\right| = \left|\frac{sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2} - \frac{sin(0)}{2}\right| + \left|\frac{sin(\pi)}{2} - \frac{sin\,\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2}\right|$$

$$A = \left|\frac{1}{2} - 0\right| + \left|0 - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}\right| + \left|\frac{-1}{2}\right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$ وحدة مساحة

س 6/ جد المساحة المحددة بالدالتين $y=\sqrt{x-1}$, $y=\frac{1}{2}x$ وعلى الفترة [2,5]

الحل / نجعل $f(x)=g(x)$ لايجاد نقط التقاطع

$$\sqrt{x-1}=\frac{1}{2}x \xrightarrow{(\text{بالتربيع})} x-1=\frac{1}{4}x^2 \xrightarrow{(\times 4)} x^2-4x+4=0 \Rightarrow (x-2)^2=0 \Rightarrow \boxed{x=2\in[2,5]}$$

$$A=\left|\int_2^5\left[\frac{1}{2}x-(x-1)^{\frac{1}{2}}\right]dx\right|=\left|\left[\frac{x^2}{4}-\frac{(x-1)^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{3}{2}\right)}\right]_2^5\right|=\left|\left[\frac{x^2}{4}-\frac{2(x-1)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_2^5\right|$$

$$A=\left|\left(\frac{25}{4}-\frac{2(4)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)-\left(1-\frac{2(1)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)\right|=\left|\left(\frac{25}{4}-\frac{2(2^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right)-\left(1-\frac{2}{3}\right)\right|$$

$$A==\left|\frac{25}{4}-\frac{16}{3}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{75-64-4}{12}\right|=\left|\frac{7}{12}\right|=\frac{7}{12}$$ (وحدة مساحة)

س 7/ جد المساحة المحددة بالدالتين $y=x^4-12$, $y=x^2$

الحل / محلول صفحة (65)

وزاري 2014 / د1

س 8/ جد المســـــاحة المحددة بالدالتين $f(x)=\sin x$, $g(x)=\sin x\cos x$ حيث $x\in[0,2\pi]$

الحل / نجعل $f(x)=g(x)$ لايجاد نقط التقاطع

$$\sin x\cos x-\sin x=0 \Rightarrow \sin x(\cos x-1)=0$$

either $\sin x=0 \Rightarrow \boxed{x=0\in[0,2\pi]}$ $\boxed{x=\pi\in[0,2\pi]}$ $\boxed{x=2\pi\in[0,2\pi]}$

or $\cos x=1 \Rightarrow \boxed{x=0\in[0,2\pi]}$ $\boxed{x=2\pi\in[0,2\pi]}$

$$A=\left|\int_0^\pi(\sin x\cos x-\sin x)\,dx\right|+\left|\int_\pi^{2\pi}(\sin x\cos x-\sin x)\,dx\right|$$

$$A=\left|\left[\frac{\sin^2x}{2}+\cos x\right]_0^\pi\right|+\left|\left[\frac{\sin^2x}{2}+\cos x\right]_\pi^{2\pi}\right|$$

$$A=\left|\left[\frac{\sin^2(\pi)}{2}+\cos(\pi)\right]-\left[\frac{\sin^2(0)}{2}+\cos(0)\right]\right|+\left|\left[\frac{\sin^2(2\pi)}{2}+\cos(2\pi)\right]-\left[\frac{\sin^2(\pi)}{2}+\cos(\pi)\right]\right|$$

$$A=|(0-1)-(0+1)|+|(0+1)-(0-1)|=|-1-1|+|1+1|=|-2|+2=4$$ وحدة مساحة

وزاري 2013 / د2

س 9/ جد المساحة المحددة بالدالتين $f(x) = 2sinx + 1$ ، $g(x) = sinx$ حيث $x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

الحل / نجعل $f(x) = g(x)$ لايجاد نقط التقاطع

$$2sinx + 1 - sinx = 0 \quad \Rightarrow sinx + 1 = 0 \quad \Rightarrow sinx = -1 \quad \Rightarrow \boxed{x = \frac{3\pi}{2} \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]}$$

$$A = \left|\int_0^{\frac{3\pi}{2}} (sinx + 1)\,dx\right| = \left|[-cosx + x]_0^{\frac{3\pi}{2}}\right|$$

$$A = \left|\left(-\cos\frac{3\pi}{2} + \frac{3\pi}{2}\right) - (-\cos 0 + 0)\right| = \left|\left(0 + \frac{3\pi}{2}\right) - (-1)\right| = \left|\frac{3\pi}{2} + 1\right| = \frac{3\pi}{2} + 1$$ وحدة مساحة

س 10/ جد المساحة المحددة بالدالة $y = x^3 + 4x^2 + 3x$ ومحور السينات

الحل / نجعل $y = 0$ لايجاد نقط التقاطع

$$x^3 + 4x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 4x + 3) = 0$$

$$\Rightarrow x(x+1)(x+3) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{x = 0}\ \boxed{x = -1}\ \boxed{x = -3}$$

$$A = \left|\int_{-3}^{-1} (x^3 + 4x^2 + 3x)\,dx\right| + \left|\int_{-1}^{0} (x^3 + 4x^2 + 3x)\,dx\right|$$

$$A = \left|\left[\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_{-3}^{-1}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right|$$

$$A = \left|\left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right) - \left(\frac{81}{4} - 36 + \frac{27}{2}\right)\right| + \left|(0) - \left(\frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2}\right)\right|$$

$$A = \left|\frac{3 - 16 + 18 - 243 + 432 - 162}{12}\right| + \left|\frac{-3 + 16 - 18}{12}\right|$$

$$A = \frac{32}{12} + \left|\frac{-5}{12}\right| = \frac{32 + 5}{12} = \frac{37}{12} = 3\frac{1}{12}$$ (وحدة مساحة)

س 11/ جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t) = (3t^2 - 6t + 3)m/s$ أحسب
ⓐ المسافة المقطوعة في الفترة $[2,4]$ ⓑالأزاحة في الفترة $[0,5]$

الحل/ وزاري 2015 / د1

$$3t^2 - 6t + 3 = 0 \qquad (\div 3)$$

$$t^2 - 2t + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (t-1)(t-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad t - 1 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{t = 1 \notin [2,4]}$$

ⓐ $$d = \left|\int_2^4 (3t^2 - 6t + 3)\,dt\right| = \left|\left[t^3 - 3t^2 + 3t\right]_2^4\right| = |(64 - 48 + 12) - (8 - 12 + 6)| = |28 - 2| = 26 \ m$$

ⓑ $$s = \int_0^5 (3t^2 - 6t + 3)\,dt = \left|\left[t^3 - 3t^2 + 3t\right]_0^5\right| = [(125 - 75 + 15) - (0)] = 65 \ m$$

وزاري 2011 / د2

س 12/ جســـــم يتحـرك علـى خـط مســتقيم بتعجيـل قـدره $(4t + 12)m/s^2$ وكانــت ســرعته بعـد مرور (4)ثواني تساوي $90 \ m/s$ أحسب
ⓐ السرعة عندما $t = 2$
ⓑ المسافة خلال الفترة $[1,2]$
ⓒ الازاحة بعد (10) ثواني من بدء الحركة

الحل /

ⓐ $$V(t) = \int a(t)dt = \int (4t + 12)\,dt = 2t^2 + 12t + c$$

$$90 = 2(16) + 12(4) + c \quad \Rightarrow \quad 90 = 32 + 48 + c \quad \Rightarrow \quad c = 90 - 80 \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = 10}$$

$$V(t) = 2t^2 + 12t + 10 \quad \Rightarrow \quad V(2) = 2(4) + 12(2) + 10 = 8 + 24 + 10 = 42 \quad m/s$$

ⓑ $$d = \int_1^2 (2t^2 + 12t + 10)\,dt = \left[\frac{2t^3}{3} + 6t^2 + 10t\right]_1^2 = \left|\left(\frac{16}{3} + 24 + 20\right) - \left(\frac{2}{3} + 6 + 10\right)\right|$$

$$d = \left|\frac{16}{3} + 44 - \frac{2}{3} - 16\right| = \left|\frac{14}{3} + 28\right| = \frac{14 + 84}{3} = \frac{98}{3} \quad m$$

ⓒ $$s = \int_0^{10} (2t^2 + 12t + 10)\,dt = \left[\frac{2t^3}{3} + 6t^2 + 10t\right]_0^{10} = \left|\left(\frac{2000}{3} + 600 + 100\right) - (0)\right|$$

$$s = \frac{2000 + 1800 + 300}{3} = \frac{4100}{3} \ m$$

س 13/ تتحرك نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدء الحركة اصبحت سرعتها m/s $(100t - 6t^2)$ أوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الاول الذي بدات منه ثم أحسب التعجيل عندها . وزاري 2014 / د2

الحل /

$V(t) = (100t - 6t^2)$ نكامل الطرفين

$s = \int (100t - 6t^2)\, dt \quad \Rightarrow \quad s = 50t^2 - 2t^3 + c$

$\because$ النقطة تتحرك من السكون

$\therefore \quad s = 0 \quad , \quad t = 0$

$0 = 50(0)^2 - 2(0)^3 + c \quad \Rightarrow \quad c = 0$

$\therefore \; s = 50t^2 - 2t^3$

عند عودة النقطة الى موضعها الأول يعني أن الأزاحة (s) تساوي صفر لذا يكون :

$50t^2 - 2t^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad t^2(50 - 2t) = 0$

$either \quad t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 0$ يهمل

$or \quad 50 - 2t = 0 \quad \Rightarrow \quad 2t = 50 \quad \Rightarrow \quad t = 25 \; sec$ الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الأول

$a(t) = \bar{V}(t)$ التعجيل

$a(t) = 100 - 12t$

$a(25) = 100 - 12(25) = 100 - 300 = -200 \; m/s^2$

الحجـوم الدورانيــة:

1. لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني الدالة $y = f(x)$ المستمرة من $x = a$ الى $x = b$ حول محور السينات نطبق العلاقة التالية $V = \pi \int_a^b y^2\, dx$

2. لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني الدالة $x = f(y)$ المستمرة من $y = a$ الى $y = b$ حول محور الصادات نطبق العلاقة التالية $V = \pi \int_a^b x^2\, dy$

وزاري 2013 / د3

مثـــال (1)/ المنطقـــة المحـــددة بـــين المنحنـــي $0 \le x \le 4$, $y = \sqrt{x}$ ومحـــور الســـينات ، دارت حول محور السينات ، جد حجمها .

الحل /

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2\, dx = \pi \int_0^4 x\, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \left[\left(\frac{16}{2}\right) - (0)\right]\pi = 8\pi$$ (وحدة مكعبة)

وزاري 2014 / د3

مثال (2)/ المنطقة المحددة بين المنحني $1 \le y \le 4$, $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$ دارت حول محور الصادات . جد حجمها .

الحل /

$$V = \pi \int_a^b x^2\, dy = \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right)^2 dy = \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{y}\right) dy = \pi \left[\ln y\right]_1^4 = \pi[\ln 4 - \ln 1] = 2\pi \ln 2$$ (وحدة مكعبة)

وزاري 2011 / د2

مثـال (3)/ أوجـد الحجـم النـاتج مـن دوران المسـاحة المحـددة بـالقطع المكـافئ الـذي معادلتـه $y^2 = 8x$ والمستقيمين $x = 0$, $x = 2$ حول المحور السيني

الحل /

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_0^2 8x\, dx = \pi \left[4x^2\right]_0^2 = [16 - 0]\pi = 16\pi$$ (وحدة مكعبة)

مثـال (4)/ أوجـد الحجـم النــاتج مـن دوران المســاحة المحـددة بــالقطع المكـافئ الــذي معادلتــه $y = 2x^2$ والمستقيمين $x = 5$, $x = 0$ حول المحور السيني

الحل/

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_0^5 (2x^2)^2\, dx = \pi \int_0^5 4x^4\, dx = \pi \left[\frac{4x^5}{5}\right]_0^5 = \pi \left[\frac{4(5)^5}{5} - (0)\right] = 2500\pi$$ (وحدة مكعبة)

مثـــال (5)/ أوجــد الحجــم النـــاتج مـــن دوران المســـاحة المحـــددة بـــالقطع المكـــافئ $y = 4x^2$ والمستقيمين $y = 16$, $y = 0$ حول المحور الصادي

الحل/

$$V = \pi \int_a^b x^2\, dy = \pi \int_0^{16} \left(\frac{y}{4}\right) dy = \pi \left[\frac{y^2}{8}\right]_0^{16} = \pi \left[\frac{(16)^2}{8} - (0)\right] = 32\pi$$ (وحدة مكعبة)

وزاري 2015 / د3

مثـال (6)/ أوجـد الحجـم الناشـئ مـن دوران المنطقـة المحصـورة بـين محـور الصـادات ومنحنـي الدالـة $y = \frac{1}{x}$ والمستقيمين $x = \frac{1}{2}$, $x = 1$ دورة كاملة حول المحور الصادي .

الحل/

$\because\ x = 1 \Rightarrow y = 1$

$\because\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2$

$$V = \pi \int_a^b x^2\, dy = \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{y^2}\right) dy = \pi \left[\frac{-1}{y}\right]_1^2 = \pi \left[\frac{-1}{2} + 1\right] = \frac{1}{2}\pi$$ (وحدة مكعبة)

وزاري 2013 / د2

أوجـد حجـم المنطقـة المحصـورة بـين منحنـي الدالـة $y = \frac{1}{x}$ والمسـتقيمين $y = 1$, $y = 2$ ومحـور الصادات دورة كاملة حول المحور الصادي

الحل/

$$V = \pi \int_a^b x^2\, dy = \pi \int_1^2 \left(\frac{1}{y^2}\right) dy = \pi \left[\frac{-1}{y}\right]_1^2 = \pi \left[\frac{-1}{2} + 1\right] = \frac{1}{2}\pi$$ (وحدة مكعبة)

تمارين(7 – 4)

س (1):/ أوجـد الحجـم الـدوراني المتولـد مـن دوران المسـاحة المحـددة بـالقطع المكـافئ $y = x^2$ والمستقيمين $x = 2$, $x = 1$ حول المحور السيني

الحل/

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_1^2 (x^2)^2\, dx = \pi \int_1^2 x^4\, dx = \pi \left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \left[\frac{32}{5} - \frac{1}{5}\right]\pi = \frac{31}{5}\pi$$ (وحدة مكعبة)

وزاري 2013 / د1

س 2/ أوجـد الحجـم النـاتج مـن دوران المسـاحة المحصـورة بـين منحنـي الدالـة $y = x^2 + 1$ والمستقيم $y = 4$ حول المحور الصادي

الحل/

$if \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad y = 1$

$\because \quad y = x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 = y - 1$

$$V = \pi \int_a^b x^2\, dy = \pi \int_1^4 (y-1)\, dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - y\right]_1^4 = \pi\left[(8-4) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] = \pi\left[4 + \frac{1}{2}\right] = 4\frac{1}{2}\pi$$ (وحدة مكعبة)

س 3/ أحسـب الحجـم المتولـد مـن دوران المسـاحة المحصـورة بـين المنحنـي $y^2 + x = 1$ والمستقيم $x = 0$ حول المحور الصادي

الحل/

$y^2 + x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 1 - y^2$

$if \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 1$ (حدود التكامل)

$$V = \pi \int_a^b x^2\, dy = \pi \int_{-1}^1 (1-y^2)^2\, dy = \pi \int_{-1}^1 (1 - 2y^2 + y^4)\, dy = \pi\left[y - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^5}{5}\right]_{-1}^1$$

$$V = \pi\left[\left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5}\right) - \left(-1 + \frac{2}{3} - \frac{1}{5}\right)\right] = \pi\left[2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5}\right] = \frac{30 - 20 + 6}{15}\pi = \frac{16}{15}\pi$$ (وحدة مكعبة)

وزاري 2014 / د2

س 4/ أحسـب الحجـم المتولـد مـن دوران المسـاحة المحصـورة بـين المنحنـي $y^2 = x^3$ والمستقيمان $x = 2$, $x = 0$ حول المحور السيني

الحل/

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_0^2 x^3\, dx = \pi \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 = \left[\frac{16}{4} - 0\right]\pi = 4\pi$$ (وحدة مكعبة)

حلول التمارين العامة الخاصة بالفصل الرابع

س6 / جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي : الفروع (a , b) مرتبطة بموضوع التفاضل

$(c)\ \ y = e^{x^2}\ ln|2x|$

$$\frac{dy}{dx} = e^{x^2}.\ \frac{1}{2x}(2) + ln|2x|\,.e^{x^2}(2x)\ \ = \frac{e^{x^2}}{x} + 2xe^{x^2}ln|2x|$$

$(d)\ \ y = tan(cos\ x)$

$$\frac{dy}{dx} = sec^2(cos\ x)(-sin\ x)\ \ = -sin\ x\ sec^2(cos\ x)$$

$(e)\ \ y = x^2\ ln|x|$

$$\frac{dy}{dx} = x^2.\ \frac{1}{x} + ln|x|\,.(2x)\ \ = x + 2x\ ln|x|$$

$(f)\ \ y = \ ln|tan^2\ x|$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{tan^2\ x}\ \ 2(tan\ x)sec^2x\ = \frac{2\ sec^2x}{tan\ x}$$

$(g)\ \ y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x}) - (e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x})}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^{2x} - 2e^0 + e^{-2x}) - (e^{2x} + 2e^0 + e^{-2x})}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x} - e^{2x} - 2 - e^{-2x}}{(e^x - e^{-x})^2}\ \frac{-4}{(e^x - e^{-x})^2}$$

$(h)\ \ y = cos(e^{\pi x})$

$$\frac{dy}{dx} = -sin\ (e^{\pi x}).e^{\pi x}.\pi\ \ = -\pi e^{\pi x}\ sin\ (e^{\pi x})$$

س13 / جد تكاملات كلاً مما يأتي :

$(a)\quad \int (\cos^4 x - \sin^4 x)dx$

$$= \int (\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos^2 x + \sin^2 x)dx = \int (\cos 2x)(1)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (\cos 2x)(2)dx = \frac{1}{2}\sin 2x + c$$

$(b)\quad \int (\sin 2x - 1)(\cos^2 2x + 2)dx$

$$= \int (\sin 2x \cos^2 2x + 2\sin 2x - \cos^2 2x - 2)dx$$

$$= \int \cos^2 2x \sin 2x \; dx + \int 2\sin 2x \; dx - \int \cos^2 2x \; dx - 2\int dx$$

$$= \frac{-1}{2}\int \cos^2 2x\,(-2)\sin 2x \; dx + \int \sin 2x\,(2)dx - \frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)\; dx - 2\int dx$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot \frac{\cos^3 2x}{3} - \cos 2x - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) - 2x + c$$

$$= \frac{-1}{6}\cos^3 2x - \cos 2x - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x - 2x + c$$

$$= \frac{-1}{6}\cos^3 2x - \cos 2x - \frac{5}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + c$$

$(c)\quad \int \frac{\ln|x|}{x}\, dx$

$$= \int \ln x \,.\frac{1}{x}\; dx = \frac{(\ln x)^2}{2} + c$$

$(d)\quad \int \frac{2\sin \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$

$$= \int 2x^{\left(\frac{-2}{3}\right)} \sin x^{\frac{1}{3}}\, dx = 2(3)\int \left(\frac{1}{3}\right) x^{\left(\frac{-2}{3}\right)} \sin x^{\frac{1}{3}}\, dx = -6\cos x^{\frac{1}{3}} + c = -6\cos\sqrt[3]{x} + c$$

(e) $\int cotx\ csc^3x\ dx$

$$= \int cotx\ \ cscx\ csc^2x\ dx = -\int(-cotx\ \ cscx)\ csc^2x\ dx\ = -\frac{csc^3x}{3} + c$$

(f) $\int \sqrt[3]{3x^3 - 5x^5}\ dx$

$$= \int \sqrt[3]{x^3(3-5x^2)}\ dx\ = \int x\ \sqrt[3]{(3-5x^2)}\ dx\ = \int x\ (3-5x^2)^{\frac{1}{3}}\ dx$$

$$= \frac{-1}{10}\int(-10)x\ (3-5x^2)^{\frac{1}{3}}\ dx\ = \frac{-1}{10} \times \frac{(3-5x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c$$

$$= \frac{-3}{40}(3-5x^2)^{\frac{4}{3}} + c$$

(g) $\int \frac{1}{x^2 - 14x + 49}\ dx$

$$= \int \frac{1}{(x-7)^2}\ dx\ = \int (x-7)^{-2}\ dx\ = \frac{(x-7)^{-1}}{-1} + c == \frac{-1}{x-7} + c$$

(h) $\int sec^2 3x\ e^{tan3x}\ dx$

$$= \frac{1}{3}\int(3)sec^2 3x\ e^{tan3x}\ dx\ = \frac{1}{3}e^{tan3x} + c$$

حلول الأسئلة الوزارية الخاصة بالفصل الرابع

سؤال وزاري 96 /د1 / جد ناتج:

(1) $\int (\sin x - 3\sec^2 x)\, dx$

$= -\cos x - 3\tan x + c$

(2) $\int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1+x}}\, dx$

$$= \int_0^3 (1+x)^{\frac{-1}{2}} dx = \left[\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^3 = \left[2(1+x)^{\frac{1}{2}}\right]_0^3 = \left[2(2^2)^{\frac{1}{2}}\right] - \left[2(1)^{\frac{1}{2}}\right] = 4 - 2 = 2$$

(3) $\int \cos 6x \ \cos 3x\, dx$

$$= \int (1 - 2\sin^2 3x) \cos 3x\, dx$$

$$= \int \cos 3x\, dx - 2\int \sin^2 3x \ \cos 3x\, dx = \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin^3 3x}{3} + c$$

$$= \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{2}{9} . \sin^3 3x + c$$

سؤال وزاري 96/د2 / جد ناتج :

$$\int (\sec x - \sin x)(\sec x + \sin x)$$

$$= \int (\sec^2 x - \sin^2 x) dx = \int \sec^2 x\, dx - \frac{1}{2}\int (1 - \cos 2x) dx$$

$$= \tan x - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c = \tan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$$

سؤال وزاري 97/د1 / جد ناتج :

$\int_4^8 x\sqrt{x^2 - 15}dx$

$$= \int_4^8 x(x^2 - 15)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2}\int_4^8 2x(x^2 - 15)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= \left[\frac{1}{2} . \frac{(x^2-15)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_4^8 = \left[\frac{1}{3} . (x^2 - 15)^{\frac{3}{2}}\right]_4^8 = \left[\frac{1}{3} . (7^2)^{\frac{3}{2}}\right] - \left[\frac{1}{3} . (1)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{343}{3} - \frac{1}{3} = \frac{342}{3} = 114$$

سؤال وزاري 97/د1 / جد ناتج :

$$\int \cos 2x \sin^2 x \, dx$$

$$= \int cos2x.\ \frac{1}{2}(1 - cos2x) = \frac{1}{2}\int cos2x\ dx - \frac{1}{2}\int cos^2 2x\ dx$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\int (2)\cos 2x\, dx - \frac{1}{2}.\frac{1}{2}\int (1+\cos 4x)dx$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + c = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{4}x - \frac{1}{16}\sin 4x + c$$

سؤال وزاري 97/د2 / جد ناتج :

$$\int (1+\cos 3x)^2 dx$$

$$= \int (1 + 2\cos 3x + \cos^2 3x)dx = \int dx + 2\int \cos 3x\, dx + \frac{1}{2}\int (1+\cos 6x)dx$$

$$= x + \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{6}\sin 6x\right) + c = \frac{3}{2}x + \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{1}{12}\sin 6x + c$$

سؤال وزاري 98/د1: جد:

$$\int (\cos x - \sin 2x)^2 dx$$

$$= \int (\cos^2 x - 2\cos x\ \sin 2x + \sin^2 2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)dx - 2\int \cos x(2\sin x \cos x)dx + \frac{1}{2}\int (1-\cos 4x)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + 4.\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + c$$

$$= \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{4}{3}\cos^3 x + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}\sin 4x + c$$

$$= x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{4}{3}\cos^3 x - \frac{1}{8}\sin 4x + c$$

سؤال وزاري 98/د1: إذا كان $\int_{-1}^{a}(x-x^3)dx=\frac{-9}{4}$ ما قيمة $a\in R^+$ ؟

$$\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{a}=\frac{-9}{4}\Rightarrow\left[\frac{a^2}{2}-\frac{a^4}{4}\right]-\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right]=\frac{-9}{4}\Rightarrow\frac{a^2}{2}-\frac{a^4}{4}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{-9}{4}$$

$$\Rightarrow\frac{a^2}{2}-\frac{a^4}{4}-\frac{1}{4}=\frac{-9}{4}\overset{(\times 4)}{\Longrightarrow}2a^2-a^4-1=-9\Rightarrow -a^4+2a^2-1+9=0$$

$$\Rightarrow -a^4+2a^2+8=0\quad\Rightarrow a^4-2a^2-8=0$$

$$\Rightarrow (a^2-4)(a^2+2)=0$$

either $a^2=-2$ يهمل

or $a^2-4=0\Rightarrow a^2=4\Rightarrow\quad a=2$

سؤال وزاري 98/د2: إذا كان $\int_{a}^{b}(2x+3)dx=12$ وكان $a+2b=3$ ما قيمة $a,b\in R$؟

الحل/

$a=3-2b\ \ldots\ldots\ldots.(1)$

$$\int_{a}^{b}(2x+3)dx=12\Rightarrow[x^2+3x]_a^b=12$$

$$\Rightarrow [b^2+3b]-[a^2+3a]=12\ \Rightarrow b^2+3b-a^2-3a=12$$

$$\Rightarrow b^2+3b-(3-2b)^2-3(3-2b)=12$$

$$\Rightarrow b^2+3b-(9-12b+4b^2)-9+6b-12=0$$

$$\Rightarrow b^2+3b-9+12b-4b^2-9+6b-12=0\ \Rightarrow -3b^2+21b-30=0\overset{\div(-3)}{\Longrightarrow}$$

$$b^2-7b+10=0\Rightarrow (b-2)(b-5)=0$$

$$b-2=0\Rightarrow b=2\Rightarrow a=3-2(2)=-1$$

or $b-5=0\Rightarrow b=5\Rightarrow a=3-2(5)=-7$

سـؤال وزاري 2000/د2: جـد المسـاحة المحـددة بمنحنـي الدالـة $f(x) = 1 - 2\sin^2 x$ ومحـور السينات وعلى الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

الحل:

$$1 - 2\sin^2 x = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{2} \ , \ \frac{3\pi}{2} \quad] \div 2$$

$$\therefore x = \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \qquad , \ x = \frac{3\pi}{4} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

∴ فترات التكامل $\left[0, \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x \, dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx\right| = \left|\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right] - \left[\frac{1}{2}\sin 0\right]\right| + \left|\left[\frac{1}{2}\sin\pi\right] - \left[\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right]\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2}(1) - \frac{1}{2}(0)\right| + \left|\frac{1}{2}(0) - \frac{1}{2}(1)\right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$ وحدة مربعة

سؤال وزاري 96/د1: جد:

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \, dx$$

$$= \int [\sin x \ \cos x]^2 dx = \int \left[\frac{1}{2}(2\sin x \ \cos x)\right]^2 dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 dx = \int \frac{1}{4}\sin^2 2x \, dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int (1 - \cos 4x) dx$$

$$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x\right) + c = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\sin 4x + c$$

سؤال وزاري 2001/د2: جد:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{9 - 12x + 4x^2}$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{dx}{(3-2x)^2} = \int_{-1}^{1} (3-2x)^{-2} dx = \frac{-1}{2}\int_{-1}^{1} (3-2x)^{-2}(-2) dx$$

$$= \left[\frac{-1}{2}\cdot\frac{(3-2x)^{-1}}{-1}\right]_{-1}^{1} = \left[\frac{1}{2(3-2x)}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left[\frac{1}{2(1)}\right] - \left[\frac{1}{2(5)}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{5-1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

سؤال وزاري 2001/ د1: جد المساحة المحددة بمنحني الدالة $y = x^3 - 9x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-3,3]$.

الحل/ $x^3 - 9x = 0 \Rightarrow x(x^2-9) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad or \quad x^2 - 9 = 0$

$\Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$

∴ فترات التكامل $[0,3]$, $[-3,0]$

$$\therefore A = \left|\int_{-3}^{0}(x^3-9x)dx\right| + \left|\int_{0}^{3}(x^3-9x)\,dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\right]_{-3}^{0}\right| + \left|\left[\frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}\right]_{0}^{3}\right| = \left|[0] - \left[\frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right]\right| + \left|\left[\frac{81}{4} - \frac{81}{2}\right] - [0]\right|$$

$$= \left|\frac{-81+162}{4}\right| + \left|\frac{81-162}{4}\right| = \frac{81}{4} + \frac{81}{4} = \frac{162}{4} = 40\frac{1}{2}$$ وحدة مربعة

سؤال وزاري 2001/د1: جد قيمة:

$$\int_0^4 \sqrt{x^2+5x}(2x+5)dx$$

$$= \int_0^4 (x^2+5x)^{\frac{1}{2}}(2x+5)dx = \left[\frac{(x^2+5x)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^4 = \left[\frac{2}{3}(x^2+5x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^4$$

$$= \left[\frac{2}{3}(16+20)^{\frac{3}{2}}\right] - \left[\frac{2}{3}(0)^{\frac{3}{2}}\right] = \left[\frac{2}{3}(6^2)^{\frac{3}{2}}\right] = \frac{2}{3}.(216) = \frac{432}{3} = 144$$

سؤال وزاري 2002/د1: جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $y = 3x^2$, $y = x^4 - 4$.

الحل/ $let \;\; y = x^4 - 4 - 3x^2 \Rightarrow y = x^4 - 3x^2 - 4 \Rightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

$\Rightarrow (x^2-4)(x^2+1) = 0$

$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2 \qquad or \qquad (x^2+1=0)$ يهمل

$$\therefore A = \left|\int_{-2}^{2}(x^4-3x^2-4)dx\right| = \left|\left[\frac{x^5}{5} - x^3 - 4x\right]_{-2}^{2}\right|$$

$$A = \left|\left[\frac{32}{5} - 8 - 8\right] - \left[\frac{-32}{5} + 8 + 8\right]\right| = \left|\frac{64}{5} - 32\right| = \left|\frac{-96}{5}\right| = \frac{96}{5}$$ وحدة مربعة

سؤال وزاري 2002/ د1: جد المساحة المحددة بمنحني الدالتين $y = x^2$, $y = 2x$ وعلى $[1,3]$.

الحل:
$let\ y = x^2 - 2x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$

$x = 0 \notin [0,3] \quad or \quad x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 \in [0,3]$

$$\therefore A = \left|\int_1^2 (x^2-2x)dx\right| + \left|\int_2^3 (x^2-2x)dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_1^2\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_2^3\right|$$

$$= \left|\left[\frac{8}{3} - 4\right] - \left[\frac{1}{3} - 1\right]\right| + \left|[9-9] - \left[\frac{8}{3} - 4\right]\right| = \left|\frac{8}{3} - 4 - \frac{1}{3} + 1\right| + \left|\frac{-8}{3} + 4\right|$$

$$= \left|\frac{7}{3} - 3\right| + \left|\frac{-8+12}{3}\right| = \left|\frac{7-9}{3}\right| + \left|\frac{4}{3}\right| = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2$$ وحدة مربعة

سؤال وزاري 2004/د1: إذا كان $\int_h^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}dx = 2$ فجد قيمة h.

الحل/

$$\int_h^4 \frac{x}{(x^2+9)^{\frac{1}{2}}}dx = 2 \Rightarrow \int_h^4 x(x^2+9)^{\frac{-1}{2}}dx = 2 \Rightarrow \frac{1}{2}\int_h^4 2x(x^2+9)^{\frac{-1}{2}}dx = 2$$

$$\Rightarrow \left[\frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2+9)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_h^4 = 2 \Rightarrow \left[(16+9)^{\frac{1}{2}}\right] - \left[(h^2+9)^{\frac{1}{2}}\right] = 2$$

$$\Rightarrow (5^2)^{\frac{1}{2}} - (h^2+9)^{\frac{1}{2}} = 2 \Rightarrow (h^2+9)^{\frac{1}{2}} = 5 - 2 \Rightarrow (h^2+9)^{\frac{1}{2}} = 3 \xrightarrow{\text{بالتربيع}}$$

$$h^2 + 9 = 9 \Rightarrow h^2 = 0 \Rightarrow h = 0$$

سؤال وزاري 2006/د1: جد قيمة $\int_1^2 \frac{dx}{(5-2x)^2}$.

الحل/

$$= \int_1^2 (5-2x)^{-2}dx = \frac{-1}{2}\int_1^2 (5-2x)^{-2}.(-2)dx = \left[\frac{-1}{2}.\frac{(5-2x)^{-1}}{-1}\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{1}{2(5-2x)}\right]_1^2 = \left[\frac{1}{2(5-4)}\right] - \left[\frac{1}{2(5-2)}\right] = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{3-1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

سؤال وزاري 2006/د2: جد قيمة $\int_1^2 \frac{dx}{(3x-4)^2}$.

$$= \int_1^2 (3x-4)^{-2}dx = \frac{1}{3}\int_1^2 (3x-4)^{-2}.3dx = \left[\frac{1}{3}.\frac{(3x-4)^{-1}}{-1}\right]_1^2$$

$$= \left[\frac{-1}{3(3x-4)}\right]_1^2 = \left[\frac{-1}{3(6-4)}\right] - \left[\frac{-1}{3(3-4)}\right] = \frac{-1}{6} - \frac{1}{3} = \frac{-3}{6} = \frac{-1}{2}$$

سؤال وزاري 2008/د1: إذا كان $\int_c^b f(x)dx = 3$, $\int_a^b f(x)dx = 5$ وكانت $c \in [a,b]$ جد قيمة $\int_a^c f(x)dx$

الحل/

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \Rightarrow 5 = \int_a^c f(x)dx + 3$$

$$\therefore \int_a^c f(x)dx = 5 - 3 \Rightarrow \int_a^c f(x)dx = 2$$

سؤال وزاري 2008/د2: جد $\int \cos^2 2x \sin x\, dx$

$$= \int (2\cos^2 x - 1)^2 \sin x\, dx = \int (4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1)\sin x\, dx$$

$$= \int 4\cos^4 x \sin x\, dx - \int 4\cos^2 x \sin x\, dx + \int \sin x\, dx$$

$$= -4\int \cos^4 x(-\sin x)dx + 4\int \cos^2 x(-\sin x)dx + \int \sin x\, dx$$

$$= -4\frac{\cos^5 x}{5} + 4.\frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + c$$

المشتقة	الدالة
$-\sin x$	$\cos x$

سؤال وزاري 2009/د1: جسم يتحرك بسرعة $V(t) = 3t^2 - 12t + 9$ في أي زمن t إحسب:

1 - المسافة المقطوعة خلال الفترة [0,2].

2- الزمن الذي يصبح فيه التعجيل $18m/min^2$.

الحل/

(1) $3t^2 - 12t + 9 = 0 \quad] \div 3$

$= t^2 - 4t + 3 = 0 \Rightarrow (t-3)(t-1) = 0$

$\Rightarrow t - 3 = 0 \quad \Rightarrow t = 3 \notin [0,2]$

$or\ \ t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1 \in [0,2]$

$$\therefore d = \left|\int_0^1 (3t^2 - 12t + 9)dt\right| + \left|\int_1^2 (3t^2 - 12t + 9)dt\right| = \left|[t^3 - 6t^2 + 9t]_0^1\right| + \left|[t^3 - 6t^2 + 9t]_1^2\right|$$

$$= |[1 - 6 + 9] - [0]| + |[8 - 24 + 18] - [1 - 6 + 9]| = |4| + |2 - 4| = 4 + 2 = 6\, m$$

(2) $a(t) = \bar{V}(t) = 6t - 12$

$18 = 6t - 12 \Rightarrow 6t = 18 + 12 \Rightarrow 6t = 30 \quad \Rightarrow \quad t = 5\, min$

سؤال وزاري 2009/د2: جد قيمة $\int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^3+x^2}}dx$

الحل/

$$= \int_3^8 \frac{x}{\sqrt{x^2(x+1)}}dx = \int_3^8 \frac{x}{x(x+1)^{\frac{1}{2}}}dx = \int_3^8 (x+1)^{\frac{-1}{2}}dx = \left[\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_3^8$$

$$= \left[2(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]_3^8 = \left[2(8+1)^{\frac{1}{2}}\right] - \left[2(3+1)^{\frac{1}{2}}\right] = \left[2(3^2)^{\frac{1}{2}}\right] - \left[2(2^2)^{\frac{1}{2}}\right] = 6 - 4 = 2$$

سؤال وزاري 2009/د2: جد المساحة المحددة بين المنحنين: $y = \sin^2 x$, $y = \cos^2 x$ في الفترة $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

الحل/

$$let\ \ y = \cos^2 x - \sin^2 x \quad \Rightarrow \quad y = \cos 2x$$

$$\cos 2x = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \div 2 \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \ ,\ \ x = \frac{3\pi}{4} \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\therefore A = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x\, dx\right| = \left|\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right] - \left[\frac{1}{2}\sin 0\right] + \left[\frac{1}{2}\sin\pi\right] - \left[\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right]\right|$$

$$= \left|\frac{1}{2}(1) - \frac{1}{2}(0)\right| + \left|\frac{1}{2}(0) - \frac{1}{2}(1)\right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$ وحدة مربعة

سؤال وزاري 2010/د1: جد المساحة المحددة بين المنحنين $f(x) = \sqrt{2x-1}$, $g(x) = x$ في الفترة [1,5].

الحل/

$$let\ \ y = \sqrt{2x-1} - x \Rightarrow \sqrt{2x-1} - x = 0 \Rightarrow \sqrt{2x-1} = x$$ تربيع الطرفين

$$\Rightarrow 2x - 1 = x^2 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$$

$$\therefore A = \left|\int_1^5 \left[(2x-1)^{\frac{1}{2}} - x\right] dx\right| = \left|\int_1^5 (2x-1)^{\frac{1}{2}}dx\right| - \left|\int_1^5 x dx\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{2}.\frac{(2x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_1^5\right| - \left|\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^5\right| = \left|\left[\frac{1}{3}.(2x-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^5\right| - \left|\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^5\right|$$

$$= \left|\left[\frac{1}{3}.(9)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}.(1)^{\frac{3}{2}}\right] - \left[\frac{25}{2} - \frac{1}{2}\right]\right| = \left|\left[\frac{1}{3}.(3^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}\right] - \left[\frac{24}{2}\right]\right|$$

$$= \left|9 - \frac{1}{3} - \frac{24}{2}\right| = \left|\frac{54 - 2 - 72}{6}\right| = \left|\frac{-20}{6}\right| = \frac{10}{3}$$ وحدة مربعة

سؤال وزاري 2010/د1: جد قيمة $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x+\cos x)^2dx$.

الحل/

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 x+2\sin x\ \cos x+\cos^2 x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\sin x\ \cos x+1)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x+1)dx=\left[\frac{-1}{2}\cos 2x+x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left[\frac{-1}{2}\cos\pi+\frac{\pi}{2}\right]-\left[\frac{-1}{2}\cos 0+0\right]=\left[\frac{-1}{2}(-1)+\frac{\pi}{2}\right]-\left[\frac{-1}{2}(1)\right]$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}=\left(1+\frac{\pi}{2}\right)$$ وحدة مربعة

سؤال وزاري 2010/د1: منحني مشتقته الأولى $\frac{2}{x^2-4x+4}$ يمر بالنقطة (1,2) جد معادلة المنحني.

الحل/

$f'(x)=\frac{2}{x^2-4x+4}$ بتكامل الطرفين

$$f(x)=\int\frac{2}{x^2-4x+4}dx\ \Rightarrow f(x)=\int\frac{2}{(x-2)^2}\,dx$$

$$f(x)=\int 2(x-2)^{-2}dx\ \Rightarrow f(x)=2.\frac{(x-2)^{-1}}{-1}+c\Rightarrow f(x)=\frac{-2}{x-2}+c$$

وبما ان $(1,2)\in$ المنحني $\therefore$ تحقق معادلته :

$$2=\frac{-2}{1-2}+c\Rightarrow 2=2+c\ \Rightarrow c=0$$

$\therefore f(x)=\frac{-2}{x-2}$ معادلة المنحني

ســـــؤال وزاري 2010/د2: إذا كـــــان $\int_1^2 f(x)dx=6$, $\int_1^3 g(x)dx=2$ جـــــد قيمـــــة:
$\int_1^3[f(x)-g(x)+4x]dx$

الحل/

$$\int_1^3[f(x)-g(x)+4x]dx=\int_1^3 f(x)dx-\int_1^3 g(x)dx++\int_1^3 4x\,dx$$

$$6-2+\left[\frac{4x^2}{2}\right]_1^3=4+[2x^2]_1^3=4+[18-2]=4+16=20$$

سؤال وزاري 2010/د2: جسم يتحرك على خط مستقيم بحيث سرعته $V(t) = 3t^2 + 4t + 7$ جد المسافة التي يقطعها الجسم بعد مضي (4) ثواني من بدء الحركة، ثم جد التعجيل عندها علماً أن المسافة تقاس بالأمتار.

الحل/

$$V(t) = 3t^2 + 4t + 7 > 0$$

$$d = \int_0^4 (3t^2 + 4t + 7)dt = [t^3 + 2t^2 + 7t]_0^4 = [64 + 32 + 28] - [0] = 124m$$

$$a(t) = \bar{V}(t) = 6t + 4$$ التعجيل في أي لحظة

$$a(4) = 6(4) + 4 = 24 + 4 = 28m/s^2$$

سؤال وزاري 2012/د1: لتكن $f: [1,3] \to R$ حيث $f(x) = 2x^2$، جد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^3 f(x)dx$ إذا قسمت الفترة [1,3] إلى فترتين جزئيتين منتظمتين.

الحل/

$$f(x) = 2x^2 \Rightarrow f'(x) = 4x \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [1,3]$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{2} = 1$$

الفترة [a,b]	طول الفترة $h_i = b - a$	m_i	M_i	$L_i = (h_i)(m_i)$	$U_i = (h_i)(M_i)$
[1,2]	1	2	8	2	8
[2,3]	1	8	18	8	18
				10	26

$$\therefore \int_1^3 f(x)dx = \frac{10 + 26}{2} = 18$$

سؤال وزاري 2012/د1: جد المساحة المحددة بالمنحني $f(x) = (x-1)^3$ ومحور السينات في الفترة [-1,3] .

الحل/

$$(x-1)^3 = 0 \Rightarrow x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \in [-1,3]$$

$$A = \left|\int_{-1}^{1} (x-1)^3 dx\right| + \left|\int_{1}^{3} (x-1)^3 dx\right| = \left[\frac{(x-1)^4}{4}\right]_{-1}^{1} + \left|\frac{(x-1)^4}{4}\right|_{1}^{3}$$

$$A = \left|\left[0 - \frac{(-2)^4}{4}\right]\right| + \left|\left[\frac{(2)^4}{4} - 0\right]\right| = |-4| + |4| = 4 + 4 = 8$$ وحدة مساحة

سـؤال وزاري 2012/د1: جـد الحجـم النـاتج مـن دوران المسـاحة المحصـورة بـين المنحنـي $y = x^2 + 1$ والمستقيمين $y = 2,\ y = 1$ حول المحور الصادي.

الحل/

$$V = \pi \int_a^b x^2 dy = \pi \int_1^2 (y-1) dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} - y\right]_1^2 = \pi \left[\left(\frac{4}{2} - 2\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right]$$

$$V = \pi \left[(2-2) - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = \pi \left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$$ وحدة مكعبة

سـؤال وزاري 2012/د2: جـد الحجـم النـاتج مـن دوران المسـاحة المحـددة بـالمنحني $y = \sqrt{5}x^2$ والمستقيمين $x = 1\ ,\ x = 2$ حول المحور السيني

الحل/

$$V = \pi \int_a^b y^2\, dx = \pi \int_1^2 \left(\sqrt{5}x^2\right)^2 dx = \pi \int_1^2 5x^4\, dx = \pi \left[x^5\right]_0^5 = \pi[(5)^5 - (0)] = 3125\pi$$ (وحدة مكعبة)

سـؤال وزاري 2012/د3: جسـم يتحـرك علـى خـط مسـتقيم بتعجيـل $(18\ \ m/s^2)$ فـأذا كانـت سـرعته قـد أصبحت $(82\ \ m/s)$ بعد مرور (4) ساعات من بدء الحركة فجد :

ⓐ المسافة التي قطعها خلال الساعة الثانية

ⓑ بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور (3) ساعات

الحل /

ⓐ $V = \int a(t)\, dt = \int 18\, dt = 18t + c \quad \Rightarrow \quad V = 18t + c$

$82 = 18(4) + c \quad \Rightarrow \quad c = 82 - 72 = 10$

$V = 18t + 10$

$$d = \left|\int_1^2 (18t + 10)\, dt\right| = \left|\left[9t^2 + 10t\right]_1^2\right| = |(36 + 20) - (9 + 10)| = 56 - 19 = 37\ \ m$$

ⓑ $$s = \int_0^3 (18t + 10)\, dt = \left[9t^2 + 10t\right]_0^3 = (81 + 30) - (0) = 111\ \ m$$

سؤال وزاري 2012/د3: جد قيمة تقريبية للتكامل الآتي مستخدما تجزئة واحدة فقط : $\int_{-3}^{2}(-4)dx$

الحل/

$f(x) = -4 \Rightarrow f'(x) = 0$

الفترة [a,b]	طول الفترة $h_i = b - a$	m_i	M_i	$L_i = (h_i)(m_i)$	$U_i = (h_i)(M_i)$
[-3,2]	5	-4	-4	-20	-20
				-20	-20

$$\therefore \int_{1}^{3} f(x)dx = \frac{-20-20}{2} = \frac{-20}{2} = -20$$

سؤال وزاري 2013/د1: جد $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tanx}{cos^2x}dx$

الحل/

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tanx}{cos^2x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} tanx\,(\sec^2 x)\,dx = \left[\frac{tan^2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{tan^2\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} - \frac{tan^2(0)}{2} = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$$

سؤال وزاري 2014/د3: أثبت أن $\int_{-2}^{4}|3x-6|dx = 30$

الحل/

$$|3x-6| = \begin{cases} 3x-6 \quad , & x \geq 2 \\ -(3x-6) \quad , & x < 2 \end{cases}$$

الدالة f مستمرة على الفترة $[-2,4]$ وذلك لأنها مستمرة عند $(x=2)$ لأن :

$(i) \quad f(2) = 3(2) - 6 = 0$ معرفة

$$(ii) \quad \lim_{x\to 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to(2^+)}(3x-6) = 0 = L_1 \\ \lim_{x\to(2^-)}(6-3x) = 0 = L_2 \end{cases}$$

$\because L_1 = L_2$

$\therefore \quad \lim_{x\to 2} f(x) = 0$ موجودة $\Rightarrow \quad \lim_{x\to 2} f(x) = f(2)$

$$\int_{-2}^{4}|3x-6|\,dx = \int_{-2}^{2}(-3x+6)\,dx + \int_{2}^{4}(3x-6)\,dx$$

$$= \left[\frac{-3}{2}x^2 + 6x\right]_{-2}^{2} + \left[\frac{3}{2}x^2 - 6x\right]_{2}^{4}$$

$$= [(-6+12) - (-6-12)] + [(24-24) - (6-12)]$$

$$= 6 + 18 + 6 = 30$$

سؤال وزاري 2014/د3: جد $\int \sqrt{e^{2x-4}}\, dx$

الحل/

$$\int \sqrt{e^{2x-4}}\, dx = \int \sqrt{e^{2(x-2)}}\, dx = \int e^{x-2}\, dx = e^{x-2}$$

سؤال وزاري 2015/د1: جد $\int_1^3 \frac{2x^3-4x^2+5}{x^2}\, dx$

الحل/

$$\int_1^3 \frac{2x^3-4x^2+5}{x^2}\, dx = \int_1^3 (2x-4+5x^{-2})\, dx = \left[x^2-4x+5\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^3 = \left[x^2-4x-\frac{5}{x}\right]_1^3$$

$$= \left[9-12-\frac{5}{3}\right]-[1-4-5] = -3-\frac{5}{3}+8 = 5-\frac{5}{3} = \frac{15-5}{3} = \frac{10}{3}$$

سؤال وزاري 2015/د2: جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x) = x^3-9x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-3,3]$

الحل /

محلول في الصفحة (85) سؤال وزاري 2001/ د1:

سؤال وزاري 2015/د2: جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل $(10\ m/s^2)$ وبعد 2 ثانية من بدء الحركة أصبحت السرعة $(24\ m/s)$ ، أحسب :

ⓐ المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة .

ⓑ بعد الجسم بعد مضي (4 ثواني) .

الحل /

ⓐ $V = \int a(t)\, dt = \int 10\, dt = 10t + c \quad \Rightarrow \quad V = 10t + c$

$24 = 10(2) + c \quad \Rightarrow \quad c = 24 - 20 = 4$

$V = 10t + 4$

$$d = \left|\int_4^5 (10t+4)\, dt\right| = \left|[5t^2+4t]_4^5\right| = |(125+20)-(80+16)| = 145-96 = 49\ m$$

ⓑ $$s = \int_0^4 (10t+4)\, dt = [5t^2+4t]_0^4 = (80+16)-(0) = 96\ m$$

سؤال وزاري 2015/د3: جد تكامل : $\int \frac{3x-6}{\sqrt[3]{x-2}}dx$

الحل /

$$\int \frac{3x-6}{\sqrt[3]{x-2}}dx = 3\int (x-2)(x-2)^{\frac{-1}{3}}dx$$ (عند الضرب تجمع الأسس)

$$= 3\int (x-2)^{\frac{2}{3}}dx = 3\frac{(x-2)^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} = \frac{9}{5}(x-2)^{\frac{5}{3}} + c = \frac{9}{5}\sqrt[3]{(x-2)^5} + c$$

سؤال وزاري 2015/د3: جد كلاً من التكاملات الأتية : (1) $\int (sin2x + cos2x)^2\ dx$ (2) $\int \frac{x^3-1}{x-1}dx$

الحل /

$$(1) \int (sin2x + cos2x)^2\ dx = \int (sin^2 2x + 2sin2x\ cos2x + cos^2 2x)dx = \int (1 + 2sin2x\ cos2x)\ dx$$

$$= \int (1 + sin4x)\ dx = \int dx + \int sin4x\ dx = x - \frac{1}{4}cos4x + c$$

$$(2) \int \frac{x^3-1}{x-1}dx = \int \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1}dx = \int (x^2+x+1)\ dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c$$

سؤال وزاري 2016/د1: جد القيمة التقريبية للتكامل $\int_3^5 (2x^2-2)dx$ بأستخدام التجزئة $\sigma = (3,4,5)$

الحل / الفترات $[3,4], [4,5]$

$\because f(x) = 2x^2 - 2 \quad \Rightarrow \quad \bar{f}(x) = 4x \quad \Rightarrow 0 = 4x \quad \Rightarrow x = 0 \notin [3,5]$ (الدالة متزايدة)

الفترة [a,b]	طول الفترة $h_i = b - a$	m_i	M_i	$L_i = (h_i)(m_i)$	$U_i = (h_i)(M_i)$
[3,4]	1	$m_1 = f(3) = 16$	$M_1 = f(4) = 30$	$L_1 = (1)(16) = 16$	$U_1 = (1)(30) = 30$
[4,5]	1	$m_2 = f(4) = 30$	$M_2 = f(5) = 48$	$L_2 = (1)(30) = 30$	$U_2 = (1)(48) = 48$

$\therefore L(\sigma,f) = \sum h_i m_i = 16 + 30 = 46 \quad , \quad U(\sigma,f) = \sum h_i M_i = 30 + 48 = 78$

$$\therefore \int_3^5 (2x^2-2)dx = \frac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2} = \frac{46+78}{2} = \frac{124}{2} = 62$$

أسئلة إضافية حول التكامل

س1/ جد كلاً من التكاملات الآتية:

(1) $\int sin^3x \cos^2x\, dx$	(2) $\int sin^4x \cos^7x\, dx$	(3) $\int sin^5x dx$
(4) $\int \cos^2x\, sin^4x dx =$	(5) $\int tan^2x\, sec^4x\, dx$	(6) $\int tan^3x\, secx\, dx$
(7) $\int sin7x\, sin3x\, dx$	(8) $\int cos7x\, cos3x\, dx$	(9) $\int sin7x\, cos3x\, dx$
(10) $\int cos^2(3x)\, dx$	(11) $\int sin^3(3x)cos^5(3x)\, dx$	(12) $\int cos^3\left(\frac{x}{3}\right) dx$
(13) $\int sin^4(3x)cos^2(3x)\, dx$	(14) $\int cos4x\, cos2x\, dx$	(15) $\int sin3x\, cos5x\, dx$
(16) $\int \sqrt{1-cosx}\, dx$	(17) $\int tan^5x\, dx$	(18) $\int (1+cos3x)^{\left(\frac{3}{2}\right)} dx$
(19) $\int sec^4(2x)\, dx$	(20) $\int tan^3(3x)sec^4(3x)\, dx$	(21) $\int cot^3(2x)\, dx$
(22) $\int csc^6x\, dx$	(23) $\int cot^3x\, csc^5x\, dx$	(24) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$
(25) $\int \frac{8-\sin^3 x}{2-\sin x} dx$	(26) $\int \frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} dx$	(27) $\int_0^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} dx$
(28) $\int_{-2}^{1} 3x\|x\|dx$	(29) $\int_{-3}^{3} \|2x+4\|dx$	(30) $\int_0^9 \sqrt[3]{x^2-2x+1}dx$
(31) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos^2 x} dx$	(32) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cot x}{\sin x} dx$	(33) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin 2x}{\cos^2 2x} dx$

س2/ اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة A

حيث $A = \{(x, y): 5 \le X \le 8 \;\; , \;\; 0 \le y \le f(x), \;\;\; y = f(x) = 3x^2 - 2x + 6\}$

س3/ لتكن $f(x) = 3 + 3x + 5x^2$ ولتكن $f[1,4] \to R$ فأوجد المجموع الأسفل $L(\sigma, f)$ والمجموع الأعلى $u(\sigma, f)$

س4/ أوجد قيمة التكامل $\int_2^4 (3x^2 - 8x)dx$ بأستخدام التجزئة $\sigma = (1, 2, 3, 4)$

س5/ جد معادلة المنحني الذي ميله $\sqrt{xy - y}$ ويمر بالنقطة (3,1)

س6/ أذا علمت أن المشتقة الثانية لدالة عند أي نقطة تساوي $(ax + b)$ حيث $a, b \in R$ جد معادلة هذا المنحني أذا كان يمتلك نقطة أنقلاب (0,1) ونقطة نهاية صغرى محلية عند (1,-1)

س7/ تتحرك نقطة من السكون وبعد t ثانية من بدء الحركة اصبحت سرعتها $(100t - t^2) \;\; m/s$ أوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الاول الذي بدات منه ثم أحسب التعجيل عندها

الفصل الخامس / المعادلات التفاضلية

المعادلة التفاضلية

هي المعادلة التي تحتوي على مشتقة واحدة أو أكثر للدالة المجهولة في المعادلة (أي للمتغير التابع في المعادلة)

ملاحظة : المعادلة التفاضلية الاعتيادية هي علاقة بين متغيرين (المتغير الأول متغير مستقل وليكن (x) ودالة غير معروفة ولتكن مثلا (y) وبعض مشتقات الدالة (y) بالنسبة للمتغير (x) مثلا

1. $\frac{dy}{dx} = 5y - 2x$ 2. $\bar{y} + yx^2 + 2y = x$ 3. $\bar{\bar{\bar{y}}} + \bar{y} = y - 5$ 4. $y^{(4)} + cosx + y = 0$

كلها معادلات تفاضلية اعتياديه لان المتغير (y) يعتمد فقط على المتغير (x)

درجة المعادلة التفاضلية : وهي أكبر قوة (اس) مرفوعة له اعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية .

رتبة المعادلة التفاضلية : وهي رتبة أعلى مشتقة موجودة في المعادلة التفاضلية .

1. $\frac{dy}{dx} + x - 5y = 0$ من الرتبة الاولى والدرجة الاولى
2. $\bar{\bar{y}} = -2x + 7xy - 3$ من الرتبة الثانية والدرجة الاولى
3. $(\bar{\bar{\bar{y}}})^2 = -y + \bar{\bar{y}} + 1$ من الرتبة الثالثة والدرجة الثانية
4. $(y^{(4)})^5 x = (\bar{y})^7 + \bar{y} - 7$ من الرتبة الرابعة والدرجة الخامسة
5. $(\bar{y})^3 + (\bar{\bar{\bar{y}}})^2 + 2y + 3 = 0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الثانية

ملاحظة : عند ايجاد درجة المعادلة التفاضلية ورتبتها يجب أزالة الجذور أو الاسس الكسرية مثلا :

6. $(\bar{y})^3 = \sqrt[3]{5y + (\bar{\bar{y}})^2} \xRightarrow{\text{(بالتكعيب)}} (\bar{y})^9 = 5y + (\bar{\bar{y}})^2 \Rightarrow$ من الرتبة الثالثة والدرجة الثانية

حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية

حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية هو اية علاقة بين متغيرات المعادلة التفاضلية بحيث أن هذه العلاقة 1 خالية من المشتقة 2 معرفة على فترة معينة 3 تحقق المعادلة التفاضلية .

وزاري 2013 / د3 وزاري 2014 / د1

مثال (1) / بين ان العلاقة $y = x^2 + 3x$ حلا للمعادلة التفاضلية $x\bar{y} = x^2 + y$

الحل /

$y = x^2 + 3x \Rightarrow \bar{y} = 2x + 3$

$LHS = x\bar{y} = x(2x+3) = 2x^2 + 3x$

$RHS = x^2 + y = x^2 + (x^2 + 3x) = 2x^2 + 3x \Rightarrow LHS = RHS$

∴ العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية أعلاه

الحل الخاص والحل العام للمعادلة التفاضلية

أن الحل العـــــام لأي معادلة تفاضلية هو الحل الذي يشتمل على عدد من الثوابت الاختيارية مســـــاوي لرتبة المعادلة ، فإذا كانت المعادلة من الرتبة الأولى وجب أن يكون حلها مشتملا على ثابت اختياري واحد (هو ثابت التكامل) الذي يظهر عند اجراء خطوة التكامل الوحيدة لمعادلات الرتبة الأولى ، أما اذا كانت المعادلة من الرتبة الثانية وجب ان يكون حلها مشتملا على (ثابتي تكامل) نظرا لأجراء خطوتي تكامل عند حل معادلة الرتبة الثانية وهكذا بالنسبة للمعادلات التي لها رتبة أعلى .

مثال (2)/ أثبت ان $y = x\,lnx - x$ أحد حلول المعادلة $x\frac{dy}{dx} = x + y \;,\; x > 0$

الحل /

$$y = x\,lnx - x \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\left(\frac{1}{x}\right) + lnx\,(1) - 1 \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = lnx$$

$$LHS = x\frac{dy}{dx} = x lnx$$

$$RHS = x + y = x + (x\,lnx - x) = x lnx \qquad \Rightarrow \; LHS = RHS$$

∴ العلاقة المعطاة $(y = x\,lnx - x)$ هي أحد حلول المعادلة التفاضلية أعلاه .

وزاري 2014 / د2

مثال (3)/ بين $lny^2 = x + a$ حيث $(a \in R)$ حلا للمعادلة $2\bar{y} - y = 0$

الحل /

$$lny^2 = x + a \quad \Rightarrow 2lny = x + a \quad \Rightarrow 2\left(\frac{\bar{y}}{y}\right) = 1 \quad \Rightarrow 2\bar{y} = y \quad \Rightarrow \; 2\bar{y} - y = 0$$

∴ العلاقة المعطاة $(lny^2 = x + a)$ هي حل للمعادلة التفاضلية أعلاه

مثال (4)/ هل $y = x^3 + x - 2$ حلا للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$ ؟

الحل /

$$y = x^3 + x - 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

∴ العلاقة المعطاة $(y = x^3 + x - 2)$ هي حل للمعادلة التفاضلية أعلاه

وزاري 2012 / د1

مثال (5)/ برهن ان $y = 3cos(2x) + 2sin(2x)$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $\bar{\bar{y}} + 4y = 0$

الحل /

$$y = 3cos(2x) + 2sin(2x) \implies \bar{y} = -3sin(2x)(2) + 2cos(2x)(2) = -6sin(2x) + 4cos(2x)$$

$$\bar{\bar{y}} = -6cos(2x)(2) - 4sin(2x)(2) = -12cos(2x) - 8sin(2x)$$

$$LHS = \bar{\bar{y}} + 4y = -12cos(2x) - 8sin(2x) + 4[3cos(2x) + 2sin(2x)]$$

$$= -12cos(2x) - 8sin(2x) + 12cos(2x) + 8sin(2x) = 0 = RHS \qquad \implies LHS = RHS$$

∴ العلاقة المعطاة $y = 3cos(2x) + 2sin(2x)$ هي حل للمعادلة التفاضلية أعلاه

وزاري 2011 / د2

مثال (6)/ هل ان $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $y\,\bar{\bar{y}} + (\bar{y})^2 - 3x = 5$ ؟

الحل /

$$y^2 = 3x^2 + x^3 \implies 2y\,\bar{y} = 6x + 3x^2 \implies 2y(\bar{\bar{y}}) + \bar{y}(2\,\bar{y}) = 6 + 6x \qquad (\div 2\ )$$

$$\implies y(\bar{\bar{y}}) + (\bar{y})^2 = 3 + 3x \qquad \implies y(\bar{\bar{y}}) + (\bar{y})^2 - 3x = 3 \neq 5$$

∴ العلاقة المعطاة ($y^2 = 3x^2 + x^3$) ليست حل للمعادلة التفاضلية أعلاه

وزاري 2015 / د3

مثال (7)/ بين ان $y = e^{2x} + e^{-3x}$ هو حلا للمعادلة التفاضلية $\bar{\bar{y}} + \bar{y} - 6y = 0$

الحل /

$$y = e^{2x} + e^{-3x} \implies \bar{y} = 2e^{2x} - 3e^{-3x} \implies \bar{\bar{y}} = 4e^{2x} + 9e^{-3x}$$

$$LHS = \bar{\bar{y}} + \bar{y} - 6y = 4e^{2x} + 9e^{-3x} + [2e^{2x} - 3e^{-3x}] - 6[e^{2x} + e^{-3x}]$$

$$= 6e^{2x} + 6e^{-3x} - 6e^{2x} - 6e^{-3x} = 0 = RHS \qquad \implies LHS = RHS$$

∴ العلاقة المعطاة ($y = e^{2x} + e^{-3x}$) هي حل للمعادلة التفاضلية أعلاه

تمارين(1 – 5)

س 1 / بين رتبة ودرجة كل من المعادلات التفاضلية التالية :

1. $(x^2 - y^2) + 3xy\frac{dy}{dx} = 0$ من الرتبة الاولى والدرجة الاولى
2. $\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - 5y = 7$ من الرتبة الثانية والدرجة الاولى
3. $(\bar{\bar{\bar{y}}})^3 - 2\bar{y} + 8y = x^3 + cosx$ من الرتبة الثالثة والدرجة الثالثة
4. $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^5 + 3y = 0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الثانية

س 2 / برهن ان $y = sinx$ هو حل للمعادلة $\bar{\bar{y}} + y = 0$

الحل /

$y = sinx \Rightarrow \bar{y} = cosx \Rightarrow \bar{\bar{y}} = -sinx$

$LHS = \bar{\bar{y}} + y = -sinx + sinx = 0 = RHS \quad \Rightarrow LHS = RHS$

∴ العلاقة المعطاة $(y = sinx)$ هي حل للمعادلة التفاضلية أعلاه

س 3 / برهن ان العلاقة $s = 8cos(3t) + 6sin(3t)$ هي حل للمعادلة $\frac{d^2s}{dt^2} + 9s = 0$

الحل /

$s = 8cos(3t) + 6sin(3t) \Rightarrow \frac{ds}{dt} = -8sin(3t)(3) + 6cos(3t)(3) = -24sin(3t) + 18cos(3t)$

$\frac{d^2s}{dt^2} = -24cos(3t)(3) - 18sin(3t)(3) = -72cos(3t) - 54sin(3t)$

$LHS = \frac{d^2s}{dt^2} + 9s = -72cos(3t) - 54sin(3t) + 9[8cos(3t) + 6sin(3t)]$

$= -72cos(3t) - 54cos(3t) + 72cos(3t) + 54sin(3t) = 0 = RHS \quad \Rightarrow LHS = RHS$

∴ العلاقة المعطاة $s = 8cos(3t) + 6sin(3t)$ هي حل للمعادلة التفاضلية أعلاه

س 4 / هل ان $y = x + 2$ حلا للمعادلة $\bar{\bar{y}} + 3\bar{y} + y = x$ ؟

الحل /

$$y = x + 2 \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = 1 \quad \Rightarrow \quad \bar{\bar{y}} = 0$$

$$LHS = \bar{\bar{y}} + 3\bar{y} + y = 0 + 3(1) + (x + 2) = 3 + x + 2 = x + 5 \neq x \qquad \Rightarrow \quad LHS \neq RHS$$

∴ العلاقة المعطاة $(y = x + 2)$ ليست حل للمعادلة التفاضلية أعلاه

س 5 / هل $y = tanx$ حلا للمعادلة $\bar{\bar{y}} = 2y(1 + y^2)$

الحل /

$$y = tanx \quad \Rightarrow \quad \bar{y} = sec^2x \quad \Rightarrow \quad \bar{\bar{y}} = 2secx(secx\,tanx) = 2sec^2x\ tanx$$

$$RHS = 2y(1 + y^2) = 2tanx(1 + tan^2x) = 2tanx\ sec^2x = LHS \qquad \Rightarrow \quad LHS = RHS$$

∴ العلاقة المعطاة $(y = tanx)$ حل للمعادلة التفاضلية أعلاه

س 6 / هل $2x^2 + y^2 = 1$ حلا للمعادلة $y^3\,\bar{\bar{y}} = -2$

الحل /

$$2x^2 + y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad 4x + 2y\bar{y} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y\bar{y} = -4x \overset{(\div 2)}{\Longrightarrow} y\bar{y} = -2x \quad \Rightarrow \bar{y} = \frac{-2x}{y}$$

$$\bar{\bar{y}} = \frac{y(-2) - (-2x)(\ \bar{y}\ )}{y^2} = \frac{-2y + 2x\left(\frac{-2x}{y}\right)}{y^2} = \frac{-2y - \frac{4x^2}{y}}{y^2} = \frac{\frac{-2y^2 - 4x^2}{y}}{y^2}$$

$$\bar{\bar{y}} = \frac{-2y^2 - 4x^2}{y^3} = \frac{-2(y^2 + 2x^2)}{y^3} = \frac{-2(1)}{y^3} = \frac{-2}{y^3} \qquad \Rightarrow \quad \bar{\bar{y}} = \frac{-2}{y^3}$$

$$RHS = y^3\,\bar{\bar{y}} = y^3\left(\frac{-2}{y^3}\right) = -2 = LHS \qquad \Rightarrow \quad LHS = RHS$$

∴ العلاقة المعطاة $(2x^2 + y^2 = 1)$ حل للمعادلة التفاضلية أعلاه

س 7 / هل $yx = sin5x$ حلا للمعادلة $x\bar{\bar{y}} + 2\bar{y} + 25yx = 0$ ؟

الحل /

$$yx = sin5x \quad \Rightarrow \quad y + x\,\bar{y} = 5cos5x \quad \Rightarrow \quad \bar{y} + x\,\bar{\bar{y}} + \bar{y} = -25sin5x$$

$$\Rightarrow \quad x\,\bar{\bar{y}} + 2\bar{y} + 25sin5x = 0 \qquad \Rightarrow \quad x\,\bar{\bar{y}} + 2\bar{y} + 25yx = 0$$

∴ العلاقة المعطاة $(yx = sin5x)$ حل للمعادلة التفاضلية أعلاه

وزاري 2012 / د3 **وزاري 2013 / د1**

س 8 / بين ان $y = ae^{-x}$ هو حلا للمعادلة $\bar{y} + y = 0$ حيث $(a \in R)$

الحل /

$$y = ae^{-x} \Rightarrow \bar{y} = -ae^{-x}$$

$$RHS = \bar{y} + y = -ae^{-x} + ae^{-x} = 0 = LHS \qquad \Rightarrow LHS = RHS$$

∴ العلاقة المعطاة $(y = ae^{-x})$ حل للمعادلة التفاضلية أعلاه

وزاري 2015 / د2

س 9 / بين ان $ln|y| = x^2 + c$ ، $c \in R$ هو حلا للمعادلة $\bar{\bar{y}} = 4x^2y + 2y$

الحل /

$$lny = x^2 + c \quad \Rightarrow \frac{\bar{y}}{y} = 2x \quad \Rightarrow \bar{y} = 2x\,y \quad \Rightarrow \bar{\bar{y}} = 2x(\bar{y}) + 2y$$

$$RHS = \bar{\bar{y}} = 2x(\bar{y}) + 2y = 2x(2x\,y) + 2y = 4x^2y + 2y = LHS \qquad \Rightarrow LHS = RHS$$

∴ العلاقة المعطاة $(lny = x^2 + c)$ حل للمعادلة التفاضلية أعلاه

****

واجبات

س 1 : هل ان $y = e^{cx} + \frac{1}{3}e^x$ حلا للمعادلة التفاضلية $\bar{y} + 2y = 2e^x$ حيث $(c \in R)$

س 2 : هل ان $yx = sin5x$ حلا للمعادلة التفاضلية $2\bar{y} + x(\bar{\bar{y}} + 5y) = 0$

طرق حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

اولاً : المعادلات التي تنفصل متغيراتها

في هذا النوع من المعادلات نستطيع أن نعزل كل الحدود التي تحتوي على (x) مع (dx) في طرف والحدود التي تحتوي على (y) مع (dy) في الطرف الأخر فنحصل على $f(x)dx = g(y)dy$ ثم نكامل الطرفان فنحصل على $\int g(y)dy = \int f(x)dx + c$ حيث يمثل(c) ثابت التكامل .

مثال (1)/ حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = 2x + 5$

الحل /

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 5 \quad \Rightarrow \quad dy = (2x + 5)dx$$

$$\int dy = \int (2x + 5)\, dx \quad \Rightarrow \quad y = x^2 + 5x + c$$

مثال (2)/ حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y}$

الحل /

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y} \quad \Rightarrow \quad ydy = (x - 1)dx$$

$$\int ydy = \int (x - 1)\, dx \quad \Rightarrow \quad \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} - x + c \quad \xrightarrow{(\times 2)} \quad y^2 = x^2 - 2x + 2c$$

$$y = \pm\sqrt{x^2 - 2x + 2c} \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt{x^2 - 2x + c_1} \qquad (c_1 = 2c \text{ حيث})$$

مثال (3)/ حل المعادلة $dy = sinx\, cos^2y\, dx$ حيث $(cosy \neq 0)$ ، $y \neq (2n + 1)\frac{\pi}{2}$

الحل /

$$dy = sinx\, cos^2y\, dx \quad \xrightarrow{(\div cos^2y)} \quad \frac{dy}{cos^2y} = sinx\, dx$$

$$\int sec^2y dy = \int sinx\ dx \quad \Rightarrow tany = -cosx + c$$

وزاري 2016 / د1

مثال (4)/ أوجد حل المعادلة $\bar{y} - x\sqrt{y} = 0$ عندما $x = 2 \ , \ y = 9$

الحل /

$$\frac{dy}{dx} - x\sqrt{y} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x(y)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow dy = x(y)^{\frac{1}{2}}\ dx \Rightarrow \frac{dy}{(y)^{\frac{1}{2}}} = x\ dx \Rightarrow (y)^{\frac{-1}{2}}dy = x\ dx$$

$$\int (y)^{\frac{-1}{2}}\,dy = \int x\ dx \Rightarrow \frac{(y)^{\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + c$$

نعوض $x = 2 \ , \ y = 9$ فينتج :

$$2\sqrt{9} = \frac{(2)^2}{2} + c \Rightarrow 6 = 2 + c \Rightarrow \boxed{c = 4}$$

$$2\sqrt{y} = \frac{x^2}{2} + 4 \overset{(\div 2)}{\Longrightarrow} \sqrt{y} = \frac{x^2}{4} + 2$$ (تربيع الطرفين)

$$y = \left(\frac{x^2}{4} + 2\right)^2$$ (حل المعادلة)

وزاري 2015 / د1

مثال (5)/ حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = e^{2x+y}$ عندما $x = 0 \ , \ y = 0$

الحل /

$$\frac{dy}{dx} = e^{2x+y} \Rightarrow dy = (e^{2x})\,(e^{y})\,dx \overset{(\div e^{y})}{\Longrightarrow} \frac{dy}{(e^{y})} = (e^{2x})\ dx \Rightarrow (e^{-y})dy = (e^{2x})\,dx$$

$$\int (e^{-y})\,dy = \int (e^{2x})\ dx \Rightarrow -\int (-1)(e^{-y})\,dy = \frac{1}{2}\int (2)(e^{2x})\ dx \Rightarrow -e^{-y} = \frac{1}{2}e^{2x} + c$$

نعوض $x = 0 \ , \ y = 0$ فينتج :

$$-e^{0} = \frac{1}{2}\,e^{0} + c \Rightarrow -1 = \frac{1}{2} + c \Rightarrow \boxed{c = \frac{-3}{2}}$$

$$\therefore\ -e^{-y} = \frac{1}{2}\,e^{2x} - \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{-1}{e^{y}} = \frac{e^{2x} - 3}{2} \Rightarrow e^{y}(e^{2x} - 3) = -2$$

$$\Rightarrow e^{y} = \frac{-2}{(e^{2x} - 3)} \overset{(\text{نأخذ } ln \text{ للطرفين})}{\Longrightarrow} ln\ e^{y} = ln\left|\frac{-2}{e^{2x} - 3}\right| \Rightarrow y = ln\left|\frac{-2}{e^{2x} - 3}\right|$$

وزاري 2015 / د2

مثال (6)/ جد الحل العام للمعادلة التفاضلية : $(x+1)\frac{dy}{dx} = 2y$

الحل /

$$(x+1)\frac{dy}{dx} = 2y \Rightarrow (x+1)dy = 2y\,dx \Rightarrow \frac{dy}{2y} = \frac{dx}{(x+1)} \Rightarrow \frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{(x+1)}$$

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{(x+1)} \Rightarrow ln|y| = 2\,ln(x+1) + c \Rightarrow ln|y| = ln(x+1)^2 + c$$

$$ln|y| - ln(x+1)^2 = c \Rightarrow ln\frac{|y|}{(x+1)^2} = c \xrightarrow{\text{(نأخذ } e \text{ للطرفين)}} \frac{|y|}{(x+1)^2} = e^c$$

$$|y| = e^c(x+1)^2 \Rightarrow y = \pm c_1\,(x+1)^2 \qquad (\text{حيث } c_1 = e^c)$$

****

تمارين $(2-5)$

س 1 / حل المعادلات التفاضلية الأتية بطريقة فصل المتغيرات :

$(a)\quad \bar{y}\cos^3 x = \sin x$

$$\frac{dy}{dx}\cos^3 x = \sin x \Rightarrow (\cos^3 x)dy = (\sin x)dx \Rightarrow dy = \frac{\sin x}{\cos^3 x}dx \Rightarrow dy = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)\frac{1}{(\cos^2 x)}dx$$

$$dy = (\tan x)(\sec^2 x)dx \Rightarrow \int dy = \int \tan x \sec^2 x\,dx \Rightarrow y = \frac{\tan^2 x}{2} + c$$

وزاري 2013 / د2   وزاري 2014 / د3

$(b)\quad \frac{dy}{dx} + xy = 3x \quad , \quad x = 1 \quad , \quad y = 2$

$$\frac{dy}{dx} = 3x - xy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x(3-y) \Rightarrow \frac{dy}{(3-y)} = x\,dx \Rightarrow (-1)\int \frac{-dy}{(3-y)} = \int x\,dx$$

$$-ln|3-y| = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow -ln|3-2| = \frac{(1)^2}{2} + c \Rightarrow -ln(1) = \frac{1}{2} + c$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2} + c \Rightarrow \boxed{c = \frac{-1}{2}} \Rightarrow -ln|3-y| = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \xrightarrow{(\times -1)} ln|3-y| = \frac{1}{2} - \frac{x^2}{2}$$

$$3 - y = e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}\right)} \Rightarrow y = 3 - e^{\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}\right)} \Rightarrow y = 3 - e^{\frac{1}{2}(1-x^2)}$$

$(c)\quad \frac{dy}{dx} = (x+1)(y-1)$

$$dy = (x+1)(y-1)\ dx \Rightarrow \frac{dy}{(y-1)} = (x+1)\ dx \Rightarrow \int \frac{dy}{(y-1)} = \int (x+1)\ dx$$

$$\Rightarrow \quad ln(y-1) = \frac{x^2}{2} + x + c \xrightarrow{(\text{نأخذ } e \text{ للطرفين})} y - 1 = e^{\left(\frac{x^2}{2}+x+c\right)} \Rightarrow y = e^{\left(\frac{x^2}{2}+x+c\right)} + 1$$

$(d)\quad (y^2+4y-1)\bar{y} = x^2 - 2x + 3$

$$(y^2+4y-1)\frac{dy}{dx} = x^2 - 2x + 3 \quad \Rightarrow (y^2+4y-1)dy = (x^2-2x+3)\,dx$$

$$\Rightarrow \int (y^2+4y-1)\,dy = \int (x^2-2x+3)\ dx \quad \Rightarrow \frac{y^3}{3} + 2y^2 - y = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + c$$

$(e)\quad y\,\bar{y} = 4\sqrt{(1+y^2)^3}$

$$y\frac{dy}{dx} = 4(1+y^2)^{\frac{3}{2}} \Rightarrow y\,dy = 4(1+y^2)^{\frac{3}{2}}\,dx \Rightarrow \frac{y\,dy}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} = 4\,dx \Rightarrow (y)\,(1+y^2)^{\frac{-3}{2}}dy = 4\,dx$$

$$\int (y)\,(1+y^2)^{\frac{-3}{2}}\,dy = \int 4\ dx \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int 2(y)\,(1+y^2)^{\frac{-3}{2}}\,dy = \int 4\ dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \times \frac{(1+y^2)^{\frac{-1}{2}}}{\frac{-1}{2}} = 4x + c \quad \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{1+y^2}} = 4x + c$$

$(f)\quad e^x dx - y^3 dy = 0$ وزاري 2011 / د2

$$e^x dx = y^3 dy \Rightarrow \int e^x\,dx = \int y^3\,dy \quad \Rightarrow e^x = \frac{y^4}{4} + c \quad \Rightarrow \frac{y^4}{4} = e^x - c$$

$$\Rightarrow y^4 = 4e^x - 4c \quad \Rightarrow \quad y = \pm\sqrt[4]{4e^x - 4c} \quad \Rightarrow y = \pm\sqrt[4]{4e^x + c_1} \qquad (\text{حيث } c_1 = -4c)$$

$(g)\quad \bar{y} = 2e^x y^3 \quad , \quad x = 0 \quad , \quad y = \frac{1}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = 2e^x y^3 \Rightarrow dy = 2e^x y^3\, dx \xrightarrow{(\div\, y^3)} \frac{dy}{y^3} = 2e^x\, dx \Rightarrow \int y^{-3} dy = 2\int e^x\, dx$$

$$\frac{y^{-2}}{-2} = 2e^x + c \xrightarrow{(\times -2)} y^{-2} = -4e^x - 2c \Rightarrow \frac{1}{y^2} = -4e^x - 2c$$

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -4e^0 - 2c \Rightarrow 4 = -4 - 2c \Rightarrow -2c = 8 \Rightarrow \boxed{c = -4}$$

$$\frac{1}{y^2} = -4e^x + 8 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{-4e^x + 8} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{-4e^x + 8}}$$

س 2/ جد الحل العام للمعادلات التفاضلية الأتية :

$(a)\quad x\, y\, \frac{dy}{dx} + y^2 = 1 - y^2$

$$x\, y\, \frac{dy}{dx} = 1 - 2y^2 \Rightarrow x\, y\, dy = (1 - 2y^2)dx \Rightarrow \frac{y\, dy}{(1 - 2y^2)} = \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{y\, dy}{(1 - 2y^2)} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{-1}{4}\int \frac{(-4)\, y\, dy}{(1 - 2y^2)} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{-1}{4} ln|1 - 2y^2| = ln|x| + ln|c| \Rightarrow ln(1 - 2y^2)^{\frac{-1}{4}} = ln|cx| \xrightarrow{(\text{نأخذ } e \text{ للطرفين})} (1 - 2y^2)^{\frac{-1}{4}} = cx$$

$$\frac{1}{(1 - 2y^2)^{\frac{1}{4}}} = cx \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[4]{1 - 2y^2}} = cx \Rightarrow \sqrt[4]{1 - 2y^2} = \frac{1}{cx} \Rightarrow 1 - 2y^2 = \frac{1}{(cx)^4}$$

$$2y^2 = 1 - \frac{1}{(cx)^4} \Rightarrow y^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2c^4x^4} \Rightarrow y = \pm\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{c_1 x^4}} \qquad (c_1 = 2c^4 \quad \text{حيث})$$

وزاري 2015 /د1

$(b)\quad sinx\, cosy\, \frac{dy}{dx} + cosx\, siny = 0$

$$sinx\, cosy\, \frac{dy}{dx} = -cosx\, siny \Rightarrow (sinx\, cosy)\, dy = (-cosx\, siny)dx$$

$$\left(\frac{cosy}{siny}\right) dy = \left(\frac{-cosx}{sinx}\right) dx \Rightarrow \int \left(\frac{cosy}{siny}\right) dy = \int \left(\frac{-cosx}{sinx}\right) dx \Rightarrow ln|siny| = -ln|sinx| + c$$

$$\Rightarrow ln|siny| + ln|sinx| = c \Rightarrow ln|siny\, sinx| = c \Rightarrow siny\ sinx = e^c$$

$(c)\quad x\cos^2y\,dx + tany\,dy = 0$

$$tany\,dy = -x\cos^2y\,dx \xrightarrow{(\div \cos^2y)} \frac{tany}{\cos^2y}dy = -x\,dx \Rightarrow \int \frac{tany}{\cos^2y}dy = -\int x\,dx$$

$$\int tany\,sec^2y\,dy = -\int x\,dx \Rightarrow \frac{tan^2y}{2} = -\frac{x^2}{2} + c \xrightarrow{(\times 2)} tan^2y = -x^2 + 2c$$

$$tan^2y + x^2 = 2c \Rightarrow tan^2y + x^2 = c_1 \quad (\text{حيث } 2c = c_1)$$

$(d)\quad tan^2y\,dy = sin^3x\,dx$

$$\int tan^2y\,dy = \int sin^3x\,dx \Rightarrow \int (sec^2y - 1)\,dy = \int (1 - cos^2x)sinx\,dx$$

$$\int sec^2y\,dy - \int dy = \int sinx\,dx - \int cos^2x\,sinx\,dx$$

$$tany - y = -cosx + \frac{cos^3x}{3} + c$$

$(e)\quad \frac{dy}{dx} = cos^2x\,cos^2y$

$$dy = (cos^2x\,cos^2y)\,dx \Rightarrow \int \frac{dy}{cos^2y} = \int cos^2x\,dx \Rightarrow \int sec^2y\,dy = \frac{1}{2}\int (1 + cos2x)\,dx$$

$$tany = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}sin2x\right) + c \Rightarrow tany = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}sin2x + c$$

$(f)\quad \frac{dy}{dx} = \frac{cosx}{3y^2 + e^y}$ وزاري 2011 / د1

$$\int (3y^2 + e^y)\,dy = \int cosx\,dx \Rightarrow \frac{3y^3}{3} + e^y = sinx + c \Rightarrow y^3 + e^y = sinx + c$$

$(g)\quad e^{x+2y} + \bar{y} = 0$

نوفر المشتقة $\frac{-1}{2}$

$$\bar{y} = -e^{x+2y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -(e^x)(e^{2y}) \Rightarrow \frac{dy}{e^{2y}} = -e^x dx \Rightarrow \int e^{-2y}dy = -\int e^x\,dx$$

$$\frac{-1}{2}e^{-2y} = -e^x + c \xrightarrow{(\times -2)} e^{-2y} = 2e^x - 2c \Rightarrow e^{-2y} = 2e^x + c_1 \quad (\text{حيث } -2c = c_1)$$

سؤال خارجي / أثبت أن كلا من :

$(a)\ y = 2e^x$ $(b)\ y = 3x$ $(c)\ y = Ae^x + Be^x$

هو حل للمعادلة التفاضلية $\bar{\bar{y}}(1 - x) + \bar{y}x - y = 0$

$(a)\quad y = 2e^x \;\Rightarrow\; \bar{y} = 2e^x \;\Rightarrow\; \bar{\bar{y}} = 2e^x$

$RHS = \bar{\bar{y}}(1 - x) + \bar{y}x - y = 2e^x(1 - x) + 2e^x x - 2e^x = 2e^x - 2xe^x + 2e^x x - 2e^x = 0 = LHS$

$\therefore$ العلاقة المعطاة $(y = 2e^x)$ حل للمعادلة التفاضلية $\bar{\bar{y}}(1 - x) + \bar{y}x - y = 0$

$(b)\quad y = 3x \;\Rightarrow\; \bar{y} = 3 \;\Rightarrow\; \bar{\bar{y}} = 0$

$RHS = \bar{\bar{y}}(1 - x) + \bar{y}x - y = (0)(1 - x) + 3x - 3x = 0 = LHS$

$\therefore$ العلاقة المعطاة $(y = 3x)$ حل للمعادلة التفاضلية $\bar{\bar{y}}(1 - x) + \bar{y}x - y = 0$

$(c)\quad y = Ae^x + Be^x \;\Rightarrow\; \bar{y} = Ae^x + Be^x \;\Rightarrow\; \bar{\bar{y}} = Ae^x + Be^x$

$RHS = \bar{\bar{y}}(1 - x) + \bar{y}x - y = (Ae^x + Be^x)(1 - x) + (Ae^x + Be^x)x - (Ae^x + Be^x)$

$= Ae^x + Be^x - Axe^x - Bxe^x + Axe^x + Bxe^x - Ae^x - Be^x = 0 = LHS$

$\therefore$ العلاقة المعطاة $(y = Ae^x + Be^x)$ حل للمعادلة التفاضلية $\bar{\bar{y}}(1 - x) + \bar{y}x - y = 0$

ثانيا : المعادلة التفاضلية المتجانسة

هي المعادلة التي نستطيع كتابتها بالشكل $\left[\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)\right]$ فمثلا المعادلة $(x^4+y^4)\,\frac{dy}{dx}=x^3\,y$ يمكن كتابتها على الصورة $\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^4}$ (بقسمة طرفي المعادلة على x^4)

مثال / بين أي المعادلات التالية متجانسة ؟

1) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^3+y^3}{3x^2\,y}$

(نقسم البسط والمقام على $x^3\neq 0$)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^3}{x^3}+\frac{y^3}{x^3}}{\frac{3x^2\,y}{x^3}} \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1+\frac{y}{x}}{3\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$\therefore$ المعادلة متجانسة

2) $2xy\bar{y}-y^2+2x^2=0$

(نقسم البسط والمقام على $x^2\neq 0$)

$$2\left(\frac{y}{x}\right)\bar{y}-\frac{y^2}{x^2}+2=0 \quad\Rightarrow\quad 2\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}-\left(\frac{y}{x}\right)^2+2=0$$

$$\Rightarrow 2\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}=\left(\frac{y}{x}\right)^2-2 \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2-2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$$

$\therefore$ المعادلة متجانسة

3) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-y}{x^3}$

المعادلة غير متجانسة لانه لايمكن كتابتها بالشكل $\left[\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)\right]$

طريقة حل المعادلة التفاضلية المتجانسة

لحل المعادلة التفاضلية المتجانسة نتبع الخطوات التالية :

1. نكتب المعادلة بالصورة $\left[\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)\right]$ ثم نعوض عن كل $\left[v=\frac{y}{x}\right]$ أو $[y=vx]$ حيث (v) دالة الى (x)
2. نشتق $[y=vx]$ بالنسبة الى (x) فنحصل على $\left[\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}\right]$
3. نربط بين الخطوتين 1 و 2 فنحصل على $\left[v+x\frac{dv}{dx}=f(v) \quad \Rightarrow \ x\frac{dv}{dx}=f(v)-v\right]$
4. بعد فصل المتغيرات نحصل على $\left[\frac{dv}{f(v)-v}=\frac{dx}{x}\right]$
5. نكامل الطرفين فنحصل على الحل العام وأخيرا نعوض عن $\left[v=\frac{y}{x}\right]$

مثال (1)/ حل المعادلة التفاضلية $\bar{y}=\frac{3y^2-x^2}{2xy}$

الحل /

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3y^2-x^2}{2xy}$$

(نقسم البسط والمقام على $x^2\neq 0$)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{3y^2}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{3\left(\frac{y}{x}\right)^2-1}{2\left(\frac{y}{x}\right)} \quad \ldots\ (1)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3v^2-1}{2v} \quad \ldots\ (2)$$

(وضعنا $v=\frac{y}{x}$)

$$\because\ y=vx \Rightarrow \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx} \quad \ldots\ (3)$$

نعوض المعادلة 3 في المعادلة 2 فينتج :

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{3v^2-1}{2v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{3v^2-1}{2v}-v \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{3v^2-1-2v^2}{2v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2-1}{2v}$$

$$\therefore\ \frac{2v}{v^2-1}dv=\frac{1}{x}dx \Rightarrow \int\frac{1}{x}dx=\int\frac{2v}{v^2-1}dv \Rightarrow ln|x|=ln|v^2-1|+ln|c|$$

$$ln|x|=ln|c(v^2-1)| \xrightarrow{\text{(نأخذ } e \text{ للطرفين)}} x=\pm c(v^2-1)$$

$$\because\ v=\frac{y}{x} \Rightarrow x=\pm c\left(\frac{y^2}{x^2}-1\right) \Rightarrow x=\pm c\left(\frac{y^2-x^2}{x^2}\right) \Rightarrow c=\pm\frac{x}{\left(\frac{y^2-x^2}{x^2}\right)} \Rightarrow c=\pm\left(\frac{x^3}{y^2-x^2}\right)$$

مثال (2)/ حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{y-x}$

الحل /

$\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{y-x}$ (نقسم البسط والمقام على $x \neq 0$)

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x}+1}{\frac{y}{x}-1}$ 1

$\frac{dy}{dx} = \frac{v+1}{v-1}$ .... 2 (وضعنا $v = \frac{y}{x}$)

$\because \ y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ 3

نعوض المعادلة 3 في المعادلة 2 فينتج :

$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v+1}{v-1} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v+1}{v-1} - v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v+1-v(v-1)}{v-1}$

$x\frac{dv}{dx} = \frac{v+1-v^2+v}{v-1} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{2v-v^2+1}{v-1}$

$\therefore \frac{v-1}{2v-v^2+1}dv = \frac{1}{x}dx \Rightarrow \int \frac{1}{x}dx = \int \frac{v-1}{2v-v^2+1}dv$

$\int \frac{1}{x}dx = \frac{-1}{2}\int (-2)\frac{v-1}{2v-v^2+1}dv \Rightarrow \frac{-1}{2} ln\left|2v-v^2+1\right| = ln|x| + ln\,|c|$

$ln\left|2v-v^2+1\right|^{\frac{-1}{2}} = ln|cx| \Rightarrow ln\left|\frac{1}{\sqrt{2v-v^2+1}}\right| = ln|cx| \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2v-v^2+1}} = cx$

$\sqrt{2v-v^2+1} = \frac{1}{cx}$ $\xrightarrow{\text{(تربيع الطرفين)}}$ $2v - v^2 + 1 = \frac{1}{c^2 x^2}$

$\because v = \frac{y}{x} \Rightarrow 2\left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = \frac{1}{c^2 x^2}$ (نضرب طرفي المعادلة ب x^2)

$2yx - y^2 + x^2 = \frac{1}{c^2} \Rightarrow x^2 + 2yx - y^2 = \frac{1}{c^2} \Rightarrow x^2 + 2yx - y^2 = k$ (حيث $k = \frac{1}{c^2}$)

وزاري 2013 / د2

مثال (3)/ حل المعادلة التفاضلية $(3x-y)\,\bar{y} = x+y$

الحل /

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{3x-y}$$ (نقسم البسط والمقام على $x \neq 0$)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x}{x}+\frac{y}{x}}{3\frac{x}{x}-\frac{y}{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1+\frac{y}{x}}{3-\frac{y}{x}} \quad \ldots (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+v}{3-v} \quad \ldots (2)$$ (وضعنا $v = \frac{y}{x}$)

$$\because \; y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \ldots (3)$$

نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2) فينتج :

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{3-v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{3-v} - v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v-3v+v^2}{3-v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2-2v+1}{3-v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{(v-1)^2}{3-v} \Rightarrow \int \frac{(3-v)}{(v-1)^2}\,dv = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{-(v-3)dv}{(v-1)^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{-[(v-1)-2]}{(v-1)^2}dv = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{-(v-1)dv}{(v-1)^2} + \int \frac{2dv}{(v-1)^2} = \int \frac{dx}{x}$$

$$(-1)\int \frac{dv}{v-1} + (2)\int (v-1)^{-2}dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$-ln|v-1| + \frac{(2)(v-1)^{-1}}{-1} + c = ln|x| \Rightarrow -ln|v-1| + \frac{-2}{(v-1)} + c = ln|x|$$

$$\because \; v = \frac{y}{x} \Rightarrow ln|x| = -ln\left|\frac{y}{x}-1\right| - \frac{2}{\frac{y}{x}-1} + c$$

$$ln|x| + ln\left|\frac{y}{x}-1\right| = \frac{-2}{\left(\frac{y-x}{x}\right)} + c \Rightarrow ln\left|x.\left(\frac{y}{x}-1\right)\right| = \frac{-2x}{y-x} + c \Rightarrow ln|y-x| = \frac{-2x}{y-x} + c$$

وزاري 2012 / د1 وزاري 2012 / د3 وزاري 2014 / د1

مثال (4)/ جد الحل العـــام للمعادلة التفاضـــلية $2x^2\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$

الحل /

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{2x^2} \qquad (x^2 \neq 0 \text{ نقسم البسط و المقام على })$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2} \quad \dots \text{①}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+v^2}{2} \quad \dots \text{②} \qquad \left(v = \frac{y}{x} \text{ وضعنا }\right)$$

$$\because \ y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \dots \text{③}$$

نعوض المعادلة ③ في المعادلة ② فينتج :

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2}{2} - v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v^2-2v}{2} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2-2v+1}{2}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{(v-1)^2}{2} \Rightarrow \int \frac{2dv}{(v-1)^2} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int 2(v-1)^{-2}dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{2(v-1)^{-1}}{-1} = ln|x| + c \Rightarrow \frac{-2}{v-1} = ln|x| + c \qquad \left(v = \frac{y}{x} \text{ نضع }\right)$$

$$\frac{-2}{\frac{y}{x}-1} = ln|x| + c \Rightarrow \frac{-2}{\left(\frac{y-x}{x}\right)} = ln|x| + c \Rightarrow \frac{-2x}{y-x} = ln|x| + c$$

$$y - x = \frac{-2x}{ln|x| + c} \Rightarrow y = x - \frac{2x}{ln|x| + c}$$

مثال محلول/ حل المعادلة التفاضلية $2xy\bar{y} - y^2 + x^2 = 0$

الحل /

$2xy\bar{y} = y^2 - x^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$ (نقسم البسط و المقام على $x^2 \neq 0$)

$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y^2}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$ .... ①

$\frac{dy}{dx} = \frac{v^2 - 1}{2v}$ .... ② (وضعنا $v = \frac{y}{x}$)

$\because \; y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$ .... ③

نعوض المعادلة ③ في المعادلة ② فينتج :

$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1}{2v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1}{2v} - v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2 - 1 - 2v^2}{2v}$

$x\frac{dv}{dx} = \frac{-v^2 - 1}{[illegible]} \Rightarrow x\frac{dv}{d[illegible]} = \frac{-(v^2 + 1)}{[illegible]}$

$\therefore \frac{2v[illegible]}{v^2 + 1}$ [illegible] x [illegible] $\int v^2 + 1$ [illegible] $\int x$ [illegible]

$ln|v^2 + 1| + ln|x| = -ln|c| \Rightarrow ln|x(v^2 + 1)| = ln|c^{-1}| \Rightarrow ln|x(v^2 + 1)| = ln\left|\frac{1}{c}\right|$

$\pm x(v^2 + 1) = \frac{1}{c} \Rightarrow c = \pm\frac{1}{x(v^2 + 1)} \Rightarrow c = \pm\frac{1}{x\left(\frac{y^2}{x^2} + 1\right)}$

$c = \pm\frac{1}{x\left(\frac{y^2 + x^2}{x^2}\right)} \Rightarrow c = \pm\frac{1}{\left(\frac{y^2 + x^2}{x}\right)} \Rightarrow c = \pm\frac{x}{y^2 + x^2}$

تمارين(3 – 5)

حل كلا من المعادلات التفاضلية الأتية :

وزاري 2013 / د1   وزاري 2012 / د2

(1) $\bar{y} = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$

$\frac{dy}{dx} = v + e^{v} \quad ....(1)$ (وضعنا $v = \frac{y}{x}$)

$\because \; y = vx \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad ....(2)$

نعوض المعادلة (2) في المعادلة (1) فينتج :

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + e^{v} \quad \Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = e^{v} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dv}{e^{v}} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int e^{-v}dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \; -e^{-v} + c = ln|x| \qquad \Rightarrow \quad ln|x| = -e^{-\left(\frac{y}{x}\right)} + c$$

(2) $(y^2 - xy)dx + x^2dy = 0$

$x^2\,dy = (xy - y^2)\,dx \qquad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{xy - y^2}{x^2}$ (نقسم البسط والمقام على $x^2 \neq 0$)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{xy}{x^2} - \frac{y^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2}{1} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2 \quad ....(1)$$

$\frac{dy}{dx} = v - v^2 \quad ....(2)$ (وضعنا $v = \frac{y}{x}$)

$\because \; y = vx \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad ....(3)$ (نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2))

$$\therefore \; v + x\frac{dv}{dx} = v - v^2 \;\Rightarrow\; x\frac{dv}{dx} = -v^2 \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v^2} = -\frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \int v^{-2}dv = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\frac{v^{-1}}{-1} + c = -ln|x| \;\Rightarrow\; -ln|x| = \frac{-1}{v} + c \;\xrightarrow{(\times -1)}\; ln|x| = \frac{1}{\left(\frac{y}{x}\right)} - c \;\Rightarrow\; ln|x| = \frac{x}{y} - c$$

$\Rightarrow \quad ln|x| = \frac{x}{y} + c_1$ (حيث $c_1 = -c$)

(3) $(x+2y)dx+(2x+3y)dy=0$

$(2x+3y)dy=-(x+2y)dx \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-x-2y}{2x+3y}$ (نقسم البسط والمقام على $x \neq 0$)

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{-x}{x}-\frac{2y}{x}}{\frac{2x}{x}+\frac{3y}{x}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{-1-2\left(\frac{y}{x}\right)}{2+3\left(\frac{y}{x}\right)}$ …. 1

$\frac{dy}{dx}=\frac{-1-2v}{2+3v}$ …. 2 (وضعنا $v=\frac{y}{x}$)

$\because\ y=vx \Rightarrow \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ …. 3 (نعوض المعادلة 3 في المعادلة 2)

$\therefore\ v+x\frac{dv}{dx}=\frac{-1-2v}{2+3v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{-1-2v}{2+3v}-v \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{-1-2v-2v-3v^2}{2+3v}$

$x\frac{dv}{dx}=\frac{-(3v^2+4v+1)}{2+3v} \Rightarrow \int\frac{(2+3v)dv}{(3v^2+4v+1)}=-\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)\int\frac{2(2+3v)dv}{(3v^2+4v+1)}=-\int\frac{dx}{x}$

$\frac{1}{2}\ln|3v^2+4v+1|=-\ln|x|+c \Rightarrow \frac{1}{2}\ln\left|3\frac{y^2}{x^2}+4\frac{y}{x}+1\right|=-\ln|x|+c$

(4) $\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2xy}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^2}{2xy}$ (نقسم البسط والمقام على $x^2 \neq 0$)

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$ …. 1

$\frac{dy}{dx}=\frac{1+v^2}{2v}$ …. 2 (وضعنا $v=\frac{y}{x}$)

$\because\ y=vx \Rightarrow \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ …. 3 (نعوض المعادلة 3 في المعادلة 2)

$\therefore\ v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2v}-v \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2-2v^2}{2v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v^2}{2v}$

$\frac{2vdv}{(1-v^2)}=\frac{dx}{x} \Rightarrow -\int\frac{-2vdv}{(1-v^2)}=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow -\ln|1-v^2|+c=\ln x \Rightarrow \ln|1-v^2|+\ln|x|=\ln|c|$

$\ln|(1-v^2)x|=\ln|c| \Rightarrow \left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)x=\pm c \Rightarrow x=\pm\frac{c}{\left(1-\frac{y^2}{x^2}\right)} \Rightarrow x=\pm\frac{cx^2}{x^2-y^2}$

$(5)\quad (y^2-x^2)dx+xydy=0$ وزاري 2014 / د2

$$xydy=-(y^2-x^2)dx$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2-y^2}{xy}$$ (نقسم البسط والمقام على $x^2 \neq 0$)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{y^2}{x^2}}{\frac{xy}{x^2}} \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\left(\frac{y}{x}\right)} \quad \ldots (1)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1-v^2}{v} \quad \ldots (2)$$ (وضعنا $v=\frac{y}{x}$)

$$\because\ y=vx \quad\Rightarrow\quad \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx} \quad \ldots (3)$$

نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2) فينتج :

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v^2}{v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v^2}{v}-v \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1-v^2-v^2}{v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{1-2v^2}{v}$$

$$\frac{vdv}{(1-2v^2)}=\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow\quad \frac{-1}{4}\int\frac{(-4)vdv}{(1-2v^2)}=\int\frac{dx}{x} \quad\Rightarrow\quad \frac{-1}{4}ln\left|1-2v^2\right|+ln\,|c|=\ lnx$$

$$ln\left|1-2v^2\right|^{\left(\frac{-1}{4}\right)}+ln\,|c|=\ lnx \quad\Rightarrow\quad ln\left|c\,\left(1-2v^2\right)^{\frac{-1}{4}}\right|=ln\,x$$

$$\therefore\ x=\pm\frac{c}{(1-2v^2)^{\frac{1}{4}}} \quad\Rightarrow\quad x=\pm\frac{c}{\left(1-2\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^{\frac{1}{4}}} \quad\Rightarrow\quad x=\pm\frac{c}{\left(1-2\,\frac{y^2}{x^2}\right)^{\frac{1}{4}}}$$

(6) $x^2ydx = (x^3 + y^3)dy$ وزاري 2016 / د1

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y}{x^3 + y^3}$$ (نقسم البسط و المقام على $x^3 \neq 0$)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x^2y}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{y^3}{x^3}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3} \quad \dots ①$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{1 + v^3} \quad \dots ②$$ (وضعنا $v = \frac{y}{x}$)

$$\because \; y = vx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \dots ③$$

نعوض المعادلة ③ في المعادلة ② فينتج :

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1 + v^3} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v}{1 + v^3} - v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v - v - v^4}{1 + v^3} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{-v^4}{1 + v^3}$$

$$\frac{(1 + v^3)dv}{v^4} = \frac{-dx}{x} \Rightarrow \int \left(\frac{1}{v^4} + \frac{v^3}{v^4}\right)dv = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow -\int \frac{dx}{x} = \int \left(v^{-4} + \frac{1}{v}\right)dv$$

$$-ln|x| = \frac{v^{-3}}{-3} + ln|v| + c \Rightarrow -ln|x| = \frac{-1}{3v^3} + ln|v| + c \xrightarrow{(\times -1)} ln|x| = \frac{1}{3v^3} - ln|v| - c$$

$$\ln|x| = \frac{1}{3\left(\frac{y}{x}\right)^3} - ln\left|\frac{y}{x}\right| + c_1$$ (حيث $-c = c_1$)

(7) $x\left(\frac{dy}{dx} - \tan\frac{y}{x}\right) = y$

$$\frac{dy}{dx} - \tan\frac{y}{x} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \tan\frac{y}{x} \quad \dots . ①$$

$$\frac{dy}{dx} = v + \tan v \quad \dots . ②$$ $\left(v = \frac{y}{x}\right.$ وضعنا $\left.\right)$

$$\because \; y = vx \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \dots . ③$$

نعوض المعادلة ③ في المعادلة ② فينتج :

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + \tan v \quad \Rightarrow \quad x\frac{dv}{dx} = \tan v \quad \Rightarrow \frac{dv}{\tan v} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int\frac{dx}{x} = \int\frac{dv}{\left(\frac{\sin v}{\cos v}\right)}$$

$$\int\frac{dx}{x} = \int\frac{\cos v}{\sin v}dv \quad \Rightarrow \quad \ln|x| = \ln|\sin v| + \ln|c| \quad \Rightarrow \ln|x| = \ln|c.\sin v|$$

$$\therefore \; x = \pm c.\sin v \quad \Rightarrow \quad x = \pm c.\sin\frac{y}{x}$$

****

واجبات

س 1 : حل المعادلة التفاضلية التالية $(4+x)\bar{y} = y^3$

س 2 : أوجد حل المعادلة التفاضلية التالية $\bar{y} = x(1-x^2)\sec^2 y$

س 3 : أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية $ydx = \left(x + \sqrt{y^2 - x^2}\right)dy$

س 4 : حل المعادلة التفاضلية التالية $(x^2 - xy + y^2)dx = x^4 dy$

س 5 : حل المعادلة التفاضلية التالية $x\frac{dy}{dx} = x\sec\left(\frac{y}{x}\right) + y$

حلول التمارين العامة الخاصة بالفصل الخامس

س14 / حل المعادلة التفاضلية الأتية : $\bar{y} = \frac{cos^2 y}{x} \quad , \quad y = \frac{\pi}{4} \quad , \quad x = 1$

الحل /

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cos^2 y}{x} \quad \Rightarrow \quad x dy = cos^2 y dx \quad] \quad (\div \; x\, cos^2 y)$$

$$\frac{dy}{cos^2 y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{cos^2 y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \int sec^2 y \;\; dy = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad tan\, y = ln|x| + c$$

(نعوض $x = 1$, $y = \frac{\pi}{4}$)

$$\Rightarrow \; tan\, \frac{\pi}{4} = ln|1| + c \quad \Rightarrow \quad 1 = 0 + c \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

$$\therefore \quad tan\, y = ln|x| + 1$$

س15 / حل المعادلة التفاضلية الأتية : $\frac{dy}{dx} = -2x\, tan\, y$ حيث أن $x = 0$ عندما $y = \frac{\pi}{2}$

الحل /

$$dy = -2x\, tan\, y\, dx \quad] \quad (\div \;\; tan\, y)$$

$$\frac{dy}{tan\, y} = -2x \;\, dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{\left(\frac{sin\, y}{cos\, y}\right)} = \int -2x \;\, dx$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{cos\, y}{sin\, y} dy = \int -2x \;\, dx \quad \Rightarrow \quad ln|sin\, y| = -2\, \frac{x^2}{2} + c$$

$$\Rightarrow \quad ln|sin\, y| = -x^2 + c$$

(نعوض $x = 0$, $y = \frac{\pi}{2}$)

$$\Rightarrow \quad ln\left|sin\, \frac{\pi}{2}\right| = 0 + c \quad \Rightarrow \quad ln\, 1 = c \quad \Rightarrow \quad c = 0$$

$$\therefore \quad ln|sin\, y| = -x^2 \quad \xRightarrow{\text{(نأخذ } e \text{ للطرفين)}} \quad sin\, y = \; e^{-x^2}$$

وزاري 2013 / د3

س16 / حل المعادلة التفاضلية $x\,\bar{y} = y - x$ **حيث أن** $y = 1 \quad , \quad x = 1$

الحل /

$$x\frac{dy}{dx} = y - x \qquad (\div\ x)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - x}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - 1 \qquad \ldots.\ (1)$$

$$\frac{dy}{dx} = v - 1 \qquad \ldots.\ (2) \qquad \left(v = \frac{y}{x} \text{ وضعنا}\right)$$

$$\because\ y = vx \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \qquad \ldots.\ (3)$$

نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2) فينتج :

$$v + x\frac{dv}{dx} = v - 1 \qquad \Rightarrow \qquad x\frac{dv}{dx} = -1$$

$$xdv = -dx \quad] \quad (\div\ x) \qquad \Rightarrow \qquad dv = -\frac{dx}{x}$$

$$\int dv = -\int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad v = -ln|x| + c \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{x} = -ln|x| + c$$

نعوض $x = 1$, $y = 1$ لأيجاد قيمة الثابت c

$$\frac{1}{1} = -ln|1| + c \quad \Rightarrow \quad 1 = 0 + c \quad \Rightarrow \quad c = 1$$

$$\therefore\ \frac{y}{x} = -ln|x| + 1$$

س17 / حل المعادلة التفاضلية الأتية $(x^2+3y^2)dx-2xy\,dy=0$

الحل /

$$(x^2+3y^2)dx=2xy\,dy$$

$$2xy\frac{dy}{dx}=x^2+3y^2$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+3y^2}{2xy}$$ (نقسم البسط والمقام على $x^2\neq 0$)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{x^2}{x^2}+3\frac{y^2}{x^2}}{\frac{2xy}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+3\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right)}\quad\ldots\ (1)$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+3v^2}{2v}\quad\ldots\ (2)$$ (وضعنا $v=\frac{y}{x}$)

$$\because\ y=vx\ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}\quad\ldots\ (3)$$

نعوض المعادلة (3) في المعادلة (2) فينتج :

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{1+3v^2}{2v}\ \Rightarrow\ x\frac{dv}{dx}=\frac{1+3v^2}{2v}-v\ \Rightarrow\ x\frac{dv}{dx}=\frac{1+3v^2-2v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2+1}{2v}\ \Rightarrow\ \frac{2v\,dv}{v^2+1}=\frac{dx}{x}\ \Rightarrow\ \int\frac{2v\,dv}{v^2+1}=\int\frac{dx}{x}$$

$$\ln|v^2+1|+\ln|c|=\ln|x|\ \Rightarrow\ \ln|x|=\ln|c.(v^2+1)|\ \Rightarrow\ x=c.(v^2+1)$$

$$x=c.\left(\frac{y^2}{x^2}+1\right)\ \Rightarrow\ x=c.\left(\frac{y^2+x^2}{x^2}\right)$$

حلول الأسئلة الوزارية الخاصة بالفصل الخامس

سؤال وزاري 2012 /د2

حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-1)$ حيث $y = 2$ عندما $x = 2$

الحل /

$$\frac{dy}{dx} = (x+1)(y-1)$$

$$dy = (x+1)(y-1)\ dx \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{(y-1)} = (x+1)\ dx \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{(y-1)} = \int (x+1)\ dx$$

$$\Rightarrow \quad \ln(y-1) = \frac{x^2}{2} + x + c$$

نعوض $x = 2$, $y = 2$ لأيجاد قيمة الثابت c

$$\Rightarrow \quad \ln 1 = 2 + 2 + c \quad \Rightarrow \quad 0 = 4 + c \quad \Rightarrow \quad c = -4$$

$$\therefore \quad \ln(y-1) = \frac{x^2}{2} + x - 4$$

سؤال وزاري 2014 /د3

أثبت ان $y = x\ln x$ أحد حلول المعادلة $x\frac{dy}{dx} = x + y$, $x > 0$

الحل /

$$y = x\ln x \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\left(\frac{1}{x}\right) + \ln x\,(1) \quad \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 1 + \ln x$$

$$LHS = x\frac{dy}{dx} = x(1 + \ln x) = x + x.\ln x$$

$$RHS = x + y = x + x.\ln x \qquad \Rightarrow \quad LHS = RHS$$

∴ العلاقة المعطاة $(y = x\ln x)$ هي أحد حلول المعادلة التفاضلية أعلاه

سؤال وزاري 2015 /د3

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy+x^2}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{xy+x^2}$ (نقسم البسط والمقام على $x^2\neq 0$)

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y^2}{x^2}}{\frac{xy}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2}{\frac{y}{x}+1}$ .... ❶

$\frac{dy}{dx}=\frac{v^2}{v+1}$ .... ❷ (وضعنا $v=\frac{y}{x}$)

$\because\ y=vx \Rightarrow \frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}$ .... ❸

نعوض المعادلة ❸ في المعادلة ❷ **فينتج :**

$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2}{v+1} \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2}{v+1}-v \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2-v^2-v}{v+1} \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{-v}{v+1}$

$\frac{(v+1)dv}{v}=\frac{-dx}{x} \Rightarrow \int\left(\frac{v}{v}+\frac{1}{v}\right)dv=-\int\frac{dx}{x} \Rightarrow -\int\frac{dx}{x}=\int\left(1+\frac{1}{v}\right)dv$

$-ln|x| = v+ln|v|+c \overset{(\times -1)}{\Longrightarrow} ln|x| = -v-ln|v|-c$

$\ln|x| = -\frac{y}{x}-ln\left|\frac{y}{x}\right|+c_1$ (حيث $-c=c_1$)

الفصل السادس

الهندسة الفضائية/SPACE GEOMETRY

مراجعة:

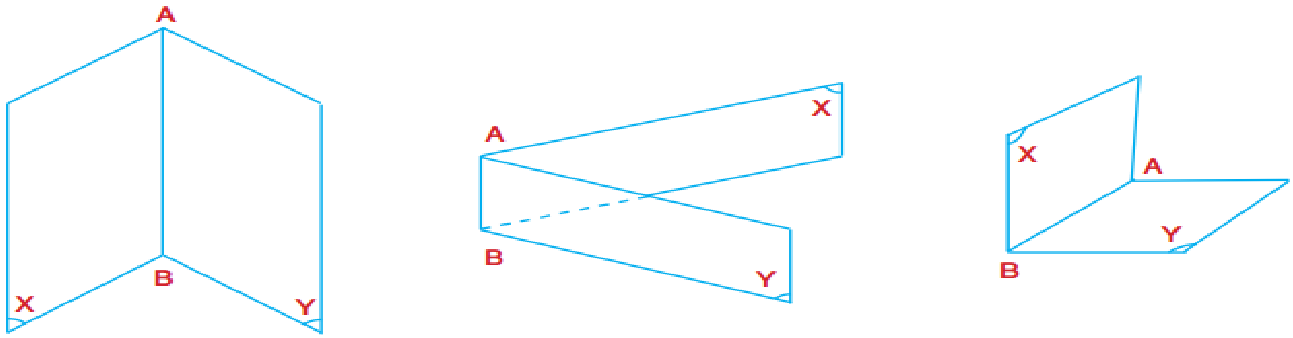
١- لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحتويهما.
٢- لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحتويهما.
٣- عبارة التوازي (إذا علم مستقيم ونقطة لا تنتمي إليه فيوجد مستقيم وحيد يمر من تلك النقطة ويوازي المستقيم المعلوم).
٤- في المستوى الواحد المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر.
٥- المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر.
٦- في المستوى الواحد يمكن رسم مستقيم واحد فقط عمودي على مستقيم معلوم من نقطة معلومة (تنتمي للمستقيم أو لا تنتمي إليه).
٧- إذا توازى مستقيمان فالمستوي الذي يحوي احدهما ونقطة من الآخر فأنه يحتويهما.
٨- المستوى العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر.
٩- في المستوى الواحد المستقيمان العموديان على مستقيم واحد متوازيان.
١٠ - إذا توازى مستقيمان فالمستوي الذي يحوي احدهما يوازي الآخر.
١١ - المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما.
١٢ - المستقيم العمودي على مستوٍ يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن المستوي.
١٣ - إذا كان كل من مستقيمين متقاطعين يوازيان مستوي معلوم فأن مستويهما يوازي المستوي المعلوم.
١٤ - إذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية أخرى تساوت الزاويتان وتوازى مستويهما.
١٥ - قطعة المستقيم الواصلة بين منتصفي ضلعي مثلث توازي الضلع الثالث وتساوي نصفه بالقياس.
١٦ - العمود النازل من رأس المثلث المتساوي الساقين على القاعدة ينصفها.
١٧ - إذا وازى مستقيم مستوي فالمستقيم المرسوم من أية نقطة من نقاط المستوي موازياً للمستقيم المعلوم يكون محتوى في ذلك المستوي.
١٨ - المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان.
١٩ - المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفراغ متوازيان.
٢٠ - يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا توازى كل ضلعين متقابلين فيه.
٢١ - يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع إذا توازى وتساوى ضلعين متقابلين فيه.
٢٢ - المستطيل هو متوازي أضلاع أحدى زواياه قائمة.
٢٣ - يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة.
٢٤ - يتطابق المثلثان بضلعين وزاوية محددة بهما.
٢٥ - العمود النازل من نقطة معلومة على مستوٍ هو أقصر مسافة بين النقطة المعلومة والمستوي.
٢٦ - مبرهنة الأعمدة الثلاثة ونتيجتها.

الزاوية الزوجية والمستويات المتعامدة

الزاوية الزوجية: اتحاد نصفي مستويين لهما حافة (Edge) مشتركة.

وتسمى الحافة المشتركة بـ (حرف الزاوية الزوجية).

ويسمى كل من نصفي المستويين بـ (وجه الزاوية الزوجية) كما في الشكل:



حيث $\overleftrightarrow{AB}$ هو حرف الزاوية الزوجية

(X) و (Y) هما وجهاها

ويعبر عن الزاوية الزوجية بالتعبير: $(x) - \overleftrightarrow{AB} - (y)$

وقد يعبر عنها بحرف الزاوية الزوجية أن لم يكن مشتركاً مع زاوية أخرى.

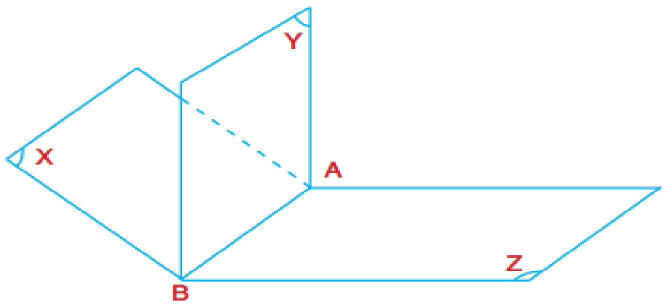
مثلاً:

الزاوية الزوجية:

$(x) - \overleftrightarrow{AB} - (y)$

$(x) - \overleftrightarrow{AB} - (z)$

$(z) - \overleftrightarrow{AB} - (y)$



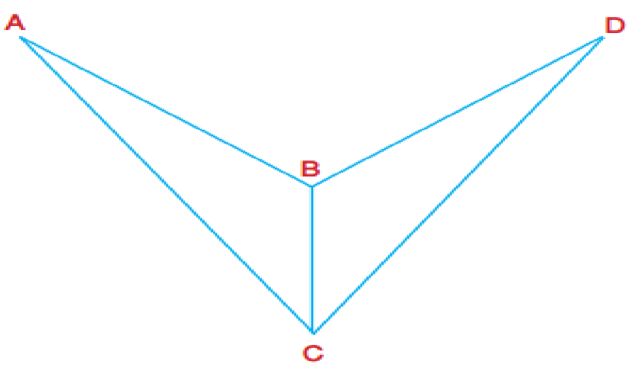
ولا يمكن أن تكتب الزاوية الزوجية بشكل $\overleftrightarrow{AB}$ في هذا المثال لأن الحرف $\overleftrightarrow{AB}$ مشترك في أكثر من زاوية زوجية.

ملاحظة: عندما تكون أربع نقاط ليست في مستوٍ واحد

نكتب الزاوية الزوجية $A - \overleftrightarrow{BC} - D$ أو

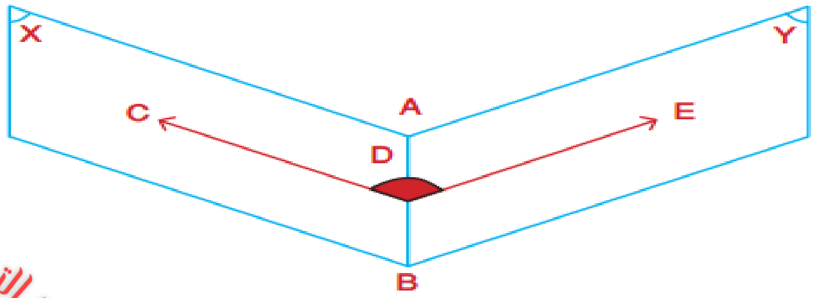
الزاوية الزوجية بين المستويين (DBC) و

(ABC) كما في الشكل:



وتقاس الزاوية الزوجية كالآتي:

نأخذ نقطة D على الحافة المشتركة $\overleftrightarrow{AB}$ ونرسم من D العمود $\overleftrightarrow{DC}$ في (x) والعمود $\overleftrightarrow{DE}$ في (y) على الحرف $\overleftrightarrow{AB}$ فيكون قياس الزاوية الزوجية بين المستويين هو قياس الزاوية CDE وتسمى الزاوية CDE الزاوية العائدة للزاوية الزوجية، كما في الشكل:



بعبارة أخرى لدينا الزاوية الزوجية $(x) - \overleftrightarrow{AB} - (y)$

ولدينا $\overleftrightarrow{DE} \subset (y) \quad , \quad \overleftrightarrow{DC} \subset (x)$

$\overleftrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{AB} \quad , \quad \overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$

$\therefore$ $\sphericalangle$ CDE هي الزاوية العائدة للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB}$ أو $(x) - \overleftrightarrow{AB} - (y)$

الزاوية المستوية العائدة للزاوية الزوجية: هي الزاوية التي ضلعاها عموديان على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي إليه وكل منهما في أحد وجهي الزاوية الزوجية.

أو: هي اتحاد شعاعين عموديين على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي إليه وكل منهما في أحد وجهي الزاوية الزوجية.

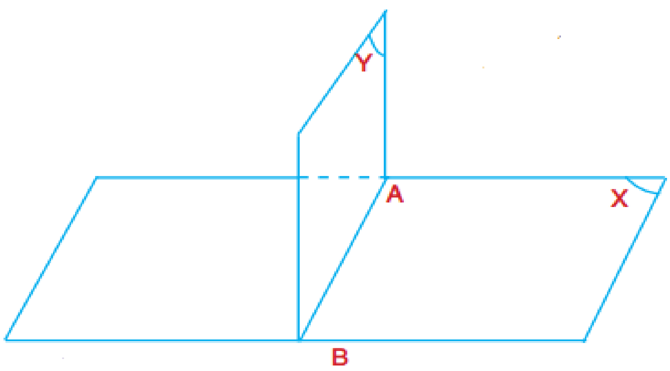
ومن تعريف الزاويتين العائدة والزوجية يمكن استنتاج الآتي:

١- قياس زاوية عائدة لزاوية زوجية ثابت.
٢- قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس.

إذا كانت الزاوية الزوجية قائمة فأن المستويين متعامدان وبالعكس.

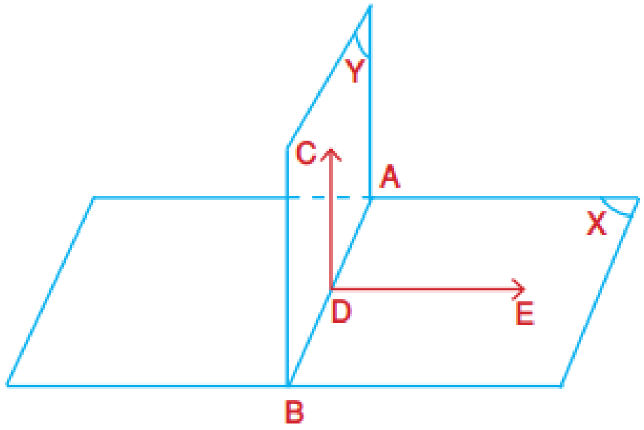
أي : أذا كان قياس $(x) - \overleftrightarrow{AB} - (y) = 90°$

فأن $(x) \perp (y)$



مبرهنة (7): (وزاري 2011/ د1) و (وزاري 2013/ د2) و(وزاري 2015/ د3) :

إذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في احدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على المستوي الآخر.



أي أنه:

إذا كان: $(x) \perp (y)$

$(x) \cap (y) = \overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD} \subset (y)$ في D

فأن $\overleftrightarrow{CD} \perp (x)$

المعطيات: في نقطة D , $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD} \subset (y)$, $(x) \cap (y) = \overleftrightarrow{AB}$, $(x) \perp (y)$

المطلوب إثباته: $\overleftrightarrow{CD} \perp (x)$

البرهان:

في (x)نرسم $\overleftrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$ **(في المستوى الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه من نقطة معلومة)**

$\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD} \subset (y)$ **(معطى)**

$\therefore$ $\sphericalangle CDE$ عائدة للزاوية الزوجية $(y) - \overleftrightarrow{AB} -(x)$ **(تعريف الزاوية العائدة)**

$\therefore$ $m\sphericalangle CDE = 90°$ **(قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)**

$\therefore$ $\overleftrightarrow{CD} \perp \overleftrightarrow{DE}$ **(إذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين 90° فأن المستقيمين متعامدان وبالعكس)**

$\therefore$ $\overleftrightarrow{CD} \perp (x)$ **(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)**

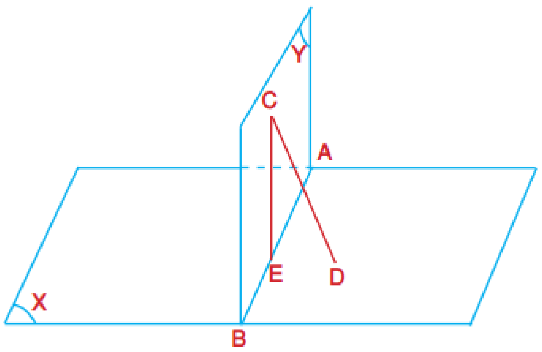
(و. هـ. م)

نتيجة مبرهنة (7): (وزاري 2013/ د3) و (وزاري 2015/ د2):

إذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم من نقطة في احدهما عمودياً على المستوى الآخر يكون محتوى فيه.

المعطيات: $\overleftrightarrow{CD} \perp (x)$, $c \in (y)$, $(x) \perp (y)$

المطلوب إثباته: $\overleftrightarrow{CD} \subset (y)$



البرهان: ليكن $(x) \cap (y) = \overleftrightarrow{AB}$

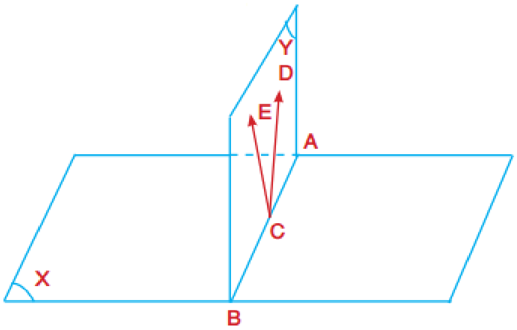
ان لم يكن $\overleftrightarrow{CD} \subset (y)$

نرسم $\overleftrightarrow{CE} \subset (y)$ وعمودي على $\overleftrightarrow{AB}$

(في المستوى الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه من نقطة معلومة)

$\because (x) \perp (y)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{CE} \perp (x)$ (مبرهنة 7) (إذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في احدهما العمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على المستوى الآخر)



ولكن $\overleftrightarrow{CD} \perp (x)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \equiv \overleftrightarrow{CE}$ (يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة تنتمي أو لا تنتمي إليه)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \subset (y)$

(و. هـ. م)

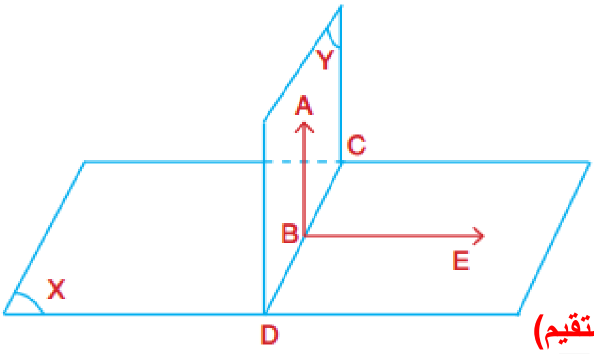
مبرهنة (8): (وزاري 2011/ د1) و (وزاري 2016/ د1) :

كل مستوٍ مار بمستقيم عمودي على مستوٍ آخر يكون عمودياً على ذلك المستوي

أو : يتعامد المستويان إذا احتوى أحدهما على مستقيم عمودي على الآخر.

أي أنه :

$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{AB} \perp (x)\\ \overleftrightarrow{AB} \subset (y)\end{array}\right\} \Rightarrow (y) \perp (x)$$



المعطيات: $\overleftrightarrow{AB} \perp (x)$ ، $\overleftrightarrow{AB} \subset (y)$

المطلوب إثباته : $(y) \perp (x)$

البرهان: ليكن $(x) \cap (y) = \overleftrightarrow{CD}$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

$B \in \overleftrightarrow{CD}$ (مستقيم التقاطع يحتوي على النقاط المشتركة)

في (x) نرسم $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (في المستوى الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه من نقطة معلومة)

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (x)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{BE}$ (المستقيم العمودي على مستوى يكون عمودياً على جميع المستقيمات المحتوى في المستوي والمارة من أثره)

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset (y)$ (معطى)

$\therefore \measuredangle ABE$ عائدة للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{CD}$ (تعريف الزاوية العائدة)

$\therefore m\measuredangle ABC = 90^\circ$ (لأن $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}$)

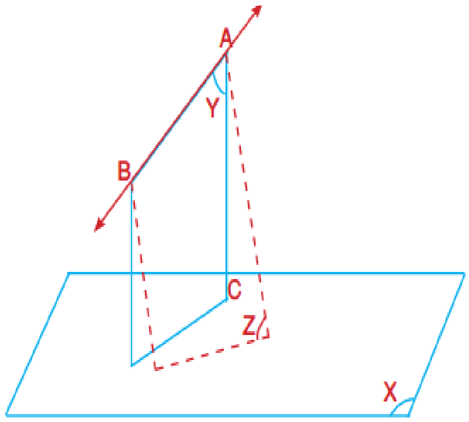
$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $(y)-\overleftrightarrow{CD}-(x) = 90^\circ$ (قياس الزاوية الزوجيـــة يســاوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

$\therefore (y) \perp (x)$ (إذا كان قياس الزاوية الزوجية 90 ° فأن المستويين متعامدان وبالعكس)

(و. هـ. م)

مبرهنة (9): (وزاري 2014/ د1):

من مستقيم غير عمودي على مستوٍ معلوم يوجد مستوٍ وحيد عمودي على المستوى المعلوم .



أي أنه: $\overleftrightarrow{AB}$ **غير عمودي على** (x)

فيوجد مستوي وحيد يحتوي $\overleftrightarrow{AB}$ **وعمودي على** (x)

المعطيات: $\overleftrightarrow{AB}$ **غير عمودي على** (x)

المطلوب إثباته: إيجاد مستوٍ وحيد يحتوي $\overleftrightarrow{AB}$ **وعمودي على** (x)

البرهان:

من نقطة (A) **نرسم** $\overleftrightarrow{AC} \perp (x)$ **(يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة لا تنتمي إليه)**

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{AC}$ **متقاطعان**

$\therefore$ **يوجد مستوٍ وحيد مثل** (y) **يحويهما (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما)**

$\therefore$ $(x) \perp (y)$ **(مبرهنة 8) (يتعامد المستويان إذا احتوى أحدهما على مستقيم عمودي على الآخر)**

ولبرهنة الوحدانية:

ليكن (Z) مستوي آخر يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ **وعمودي على** (x)

$\therefore$ $(x) \perp \overleftrightarrow{AC}$ **(بالبرهان)**

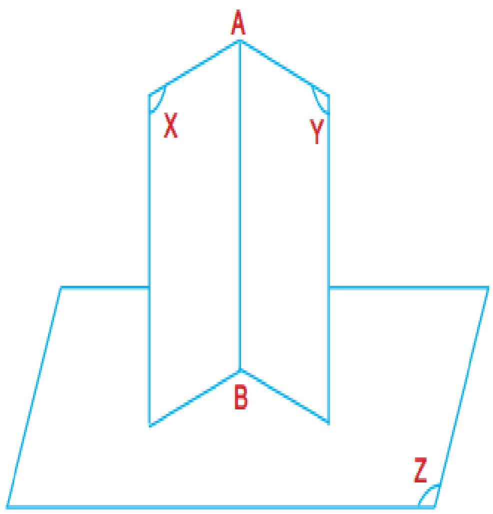
$\therefore$ $(z) \supset \overleftrightarrow{AC}$ **(نتيجة مبرهنة 7)**

$\therefore$ $(z) = (y)$ **(لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما)**

(و. هـ. م)

نتيجة مبرهنة (9): (وزاري 2012/ د3):

إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث فأن مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوى الثالث.



المعطيات: $\overleftrightarrow{AB} = (y) \cap (x)$

$(Z) \perp (y), (x)$

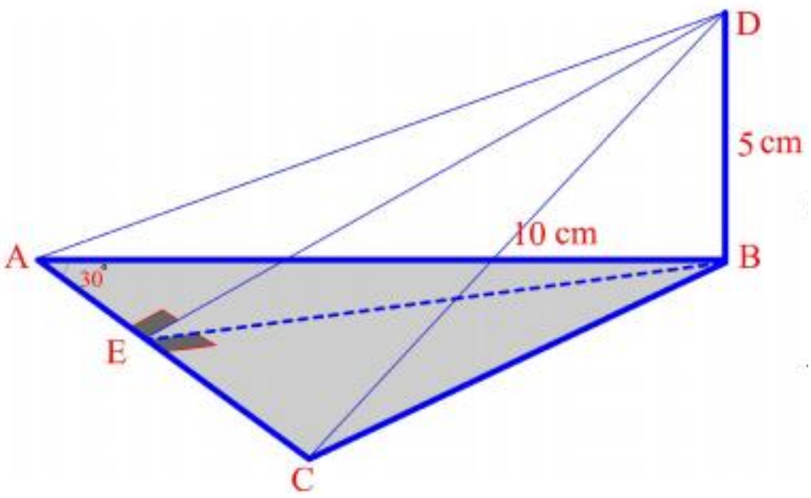
المطلوب إثباته: $(Z) \perp \overleftrightarrow{AB}$

البرهان: إن لم يكن $\overleftrightarrow{AB}$ **عمودياً على** (Z)

لما وجد أكثر من مستوي يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ **وعمودي على** (Z) **(مبرهنة 9)**

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

(و. هـ. م)



مثال (1):

في $\triangle ABC$

$\overline{BD} \perp (ABC)$, $m\sphericalangle A = 30°$

$AB = 10\ cm$, $BD = 5cm$

جد قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B$

المعطيات:

$\overline{BD} \perp (ABC)$, $m\sphericalangle A = 30°$, $AB = 10\ cm$, $BD = 5cm$

المطلوب إثباته: إيجاد قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B$

البرهان:

في المستوى(ABC) نرسم $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ في نقطة E (في المستوى الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على آخر من نقطة معلومة)

$\because \overline{BD} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore \overline{DE} \perp \overline{AC}$ (مبرهنة الأعمدة الثلاثة)

$\Leftarrow \sphericalangle DEB$ عائدة للزاوية الزوجية $\overline{AC}$ (تعريف الزاوية العائدة)

$\overline{DB} \perp \overline{BE}$ (المســـتقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المحتواة في المستوى والمارة من أثره)

$\Leftarrow \triangle DBE$ قائم الزاوية في B

في $\triangle BEA$ القائم الزاوية في E:

$$\sin 30° = \frac{BE}{BA} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BE}{10} \Rightarrow BE = 5\ cm$$

في $\triangle DBE$ القائم الزاوية في B:

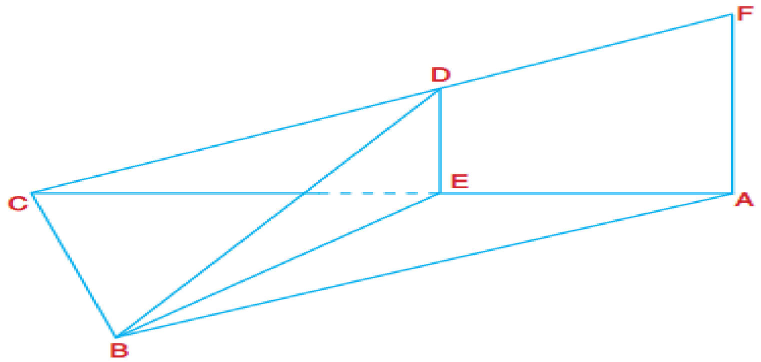
$$\tan \sphericalangle BED = \frac{5}{5} = 1$$

$\therefore$ قياس $m\sphericalangle BED = 45°$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B = 45°$ (قياس الزاوية الزوجية هو قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

(و. هـ. م)

مثال (2):



ليكن ABC مثلثاً وليكن

$\overline{AF} \perp (ABC)$

$\overline{BD} \perp \overline{CF}$

$\overline{BE} \perp \overline{CA}$

برهن أن:

$\overline{BE} \perp (CAF)$

$\overline{ED} \perp \overline{CF}$

المعطيات:

$\overline{AF} \perp (ABC) \quad , \quad \overline{BE} \perp \overline{CA} \quad , \quad \overline{BD} \perp \overline{CF}$

المطلوب إثباته:

$\overline{DE} \perp \overline{CF} \quad , \quad \overline{BE} \perp (CAF)$

البرهان:

$\because$ $\overline{AF} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore$ $(CAF) \perp (ABC)$ (مبرهنة 8) (يتعامد المستويان إذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر)

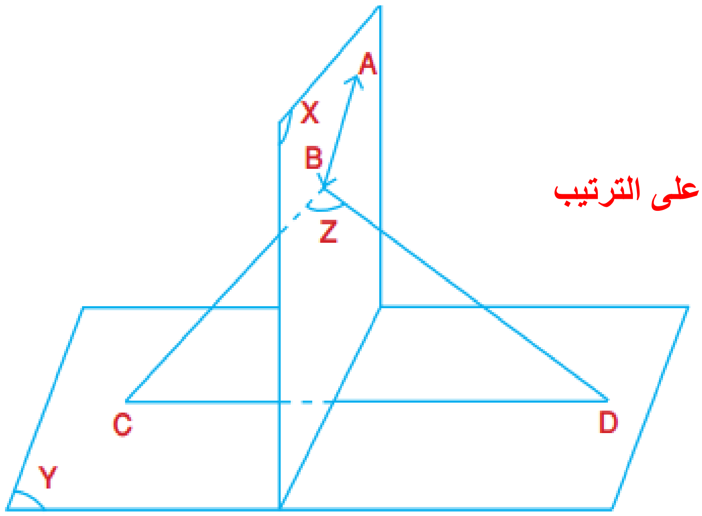
$\because$ $\overline{BE} \perp \overline{CA}$ (معطى)

$\therefore$ $\overline{BE} \perp (CAF)$ (مبرهنة 7) (إذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في احدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على الآخر)

$\because$ $\overline{BD} \perp \overline{CF}$ (معطى)

$\therefore$ $\overline{ED} \perp \overline{CF}$ (نتيجة مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

(و. هـ. م)



مثال (3): (وزاري 2012/ د 2)

$(x),(y)$ مستويان متعامدان ، $AB \subset (X)$

$\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{BD}$ عموديان على $\overleftrightarrow{AB}$ ويقطعان (y) في C, D على الترتيب

برهن أن: $\overleftrightarrow{CD} \perp (x)$

المعطيات:

إن $(x) \perp (y)$, $\overleftrightarrow{AB} \subset (x)$, $\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{BD}$ عموديين على $\overleftrightarrow{AB}$ ويقطعان (y) في C, D على الترتيب.

المطلوب إثباته: $\overleftrightarrow{CD} \perp (x)$

البرهان:

ليكن (Z) مستوي المستقيمين المتقاطعين $\overleftrightarrow{BC},\overleftrightarrow{BD}$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوياً وحيداً يحويهما)

$\because$ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{BD}$ (معطى)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

$\because$ $\overleftrightarrow{AB} \subset (x)$ (معطى)

$\therefore$ $(x) \perp (Z)$ (يتعامد المستويان إذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر)

$\because$ $(x) \perp (y)$ (معطى)

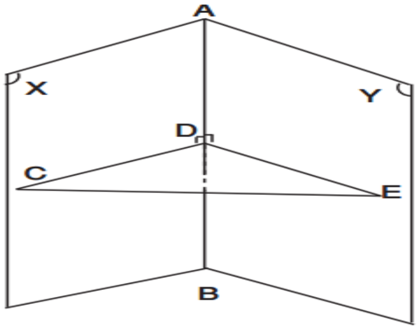
ولما كان $\overleftrightarrow{CD} = (Z) \cap (y)$ (لأنه محتوى في كل منهما)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{CD} \perp (x)$ (إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث فأن مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوى الثالث)

(و. هـ. م)

تمارين(1 – 6)

س1 / برهن أن مستوي الزاوية العائدة لزاوية زوجية يكون عمودياً على حرفها. (وزاري 2013 / د 1)



المعطيات: الزاوية الزوجية $(y) - \overleftrightarrow{AB} - (x)$

والزاوية CDE زاوية مستوية عائدة لها.

المطلوب إثباته: $\overleftrightarrow{AB} \perp (CDE)$

البرهان:

∵ الزاوية CDE زاوية عائدة للزاوية الزوجية $(y) - \overleftrightarrow{AB} - (x)$ (معطى)

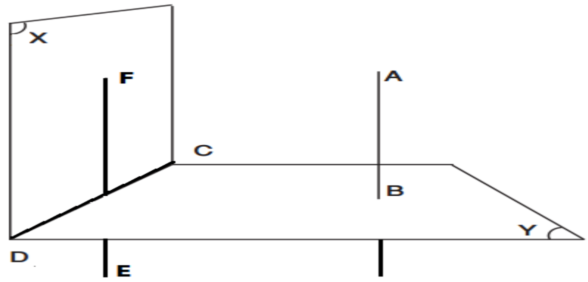
∴ $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{DC}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{DE}$ (من تعريف الزاوية العائدة لزاوية زوجية) (هي الزاوية الناتجة من اتحاد شعاعين عموديين على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي إليه وكل منهما في احد وجهي الزاوية الزوجية)

∴ $\overleftrightarrow{AB} \perp (CDE)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

(و. هـ. م)

(وزاري 2014/د3)

س2 / برهن أنه إذا وازى مستقيم مستوياً وكان عمودياً على مستوٍ آخر فأن المستويين متعامدان.



المعطيات: $\overleftrightarrow{AB} \perp (y)$, $\overleftrightarrow{AB} \ // \ (x)$

المطلوب إثباته: $(x) \perp (y)$

البرهان:

أن لم يكن (x) يقطع (y) فأن $(x) \ // \ (y)$

∵ $\overleftrightarrow{AB} \perp (y)$ (معطى)

∴ $\overleftrightarrow{AB} \perp (x)$ (المستقيم العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عموديا على الاخر)

ولكن هذا خلاف المعطيات ⇐ ∴ (y) يقطع (x)

وليكن $(x) \cap (y) = \overleftrightarrow{CD}$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

لتكن $E \in \overleftrightarrow{CD}$ ، ولتكن $\overleftrightarrow{EF} \ // \ \overleftrightarrow{AB}$ (عبارة التوازي: يوجد مستقيم وحيد يوازي مستقيم معلوم من نقطة لا تنتمي إليه)

∵ $\overleftrightarrow{AB} \ // \ (x)$ (معطى)

∴ $\overleftrightarrow{EF} \subset (x)$ (إذا وازى مستقيم مستوياً فالمستقيم المرسوم من أية نقطة من نقط المستوي موازياً للمستقيم المعلوم يكون محتوى فيه)

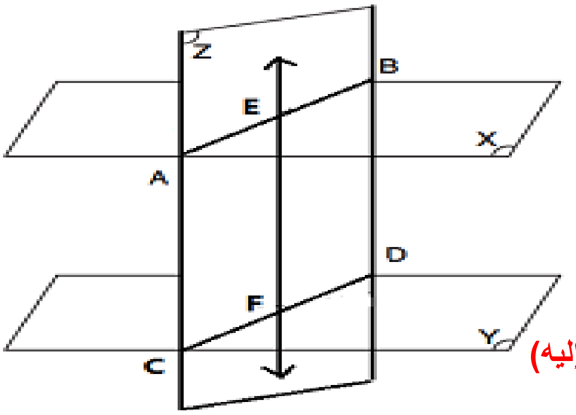
∴ $\overleftrightarrow{AB} \perp (y)$ ⇐ $\overleftrightarrow{EF} \perp (y)$ (المستوي العمود على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

∴ $(x) \perp (y)$ (يتعامد المستويان إذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر) أو (كل مستوٍ مار بمستقيم عمودي على مستوٍ يكون عمودي على المستوٍ الآخر)

(و. هـ. م)

(وزاري 2014 /د2)

س3 / برهن أن المستوي العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر أيضاً.



المعطيات: $(Z) \perp (y)$, $(x) \,//\, (y)$

المطلوب إثباته: $(Z) \perp (x)$

البرهان:

ليكن $(x) \cap (Z) = \overleftrightarrow{AB}$ و $(y) \cap (Z) = \overleftrightarrow{CD}$ يتقاطع المستويان بخط مستقيم

ولتكن $E \in \overleftrightarrow{AB}$

نرسم $\overleftrightarrow{EF} \subset (Z)$ بحيث $\overleftrightarrow{EF} \perp \overleftrightarrow{CD}$

(يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم معلوم من نقطة لا تنتمي إليه)

$\because (Z) \perp (y)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{EF} \perp (y)$ (إذا تعامد مستويان فالمستقيم المرســوم في احدهما والعمودي على مســتقيم التقاطع يكون عمودياً على الآخر)

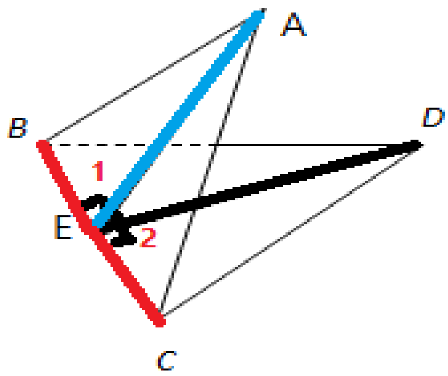
ولكن $(x) \,//\, (y)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{EF} \perp (x)$ (المستقيم العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

$\therefore (Z) \perp (x)$ (يتعامد المستويان إذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر)

(و. هـ. م)

س4 / A, B, C, D أربع نقاط ليست في مستوٍ واحد بحيث $AB = AC$ و $E \in \overline{BC}$ فإذا كانت $\measuredangle AED$ عائدة للزاوية الزوجية $A - \overline{BC} - D$ برهن $CD = BD$.



المعطيات: A, B, C, D أربع نقاط مختلفة ليست في مستوٍ واحد

$AB = AC$, $\measuredangle AED$ عائدة للزاوية الزوجية $A - \overline{BC} - D$

المطلوب إثباته: $CD = BD$

البرهان:

$\because \measuredangle AED$ عائدة للزاوية الزوجية $A - \overline{BC} - D$ (معطى)

$\therefore \overline{AE} \perp \overline{BC}$ ، $\overline{DE} \perp \overline{BC}$ (الزاوية العائدة هي الزاوية الناتجة من اتحاد شعاعين عموديين على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي إليه وكل منهما في أحد وجهي الزاوية الزوجية)

في المثلث $ABC \Leftarrow AB = AC$ (معطى)

$\therefore BE = CE$ (العمود النازل من رأس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها)

المثلثان DEB و DEC فيهما:

$m\measuredangle 1 = m\measuredangle 2$ (قوائم)

ED (ضلع مشترك)

$CE = BE$ (بالبرهان)

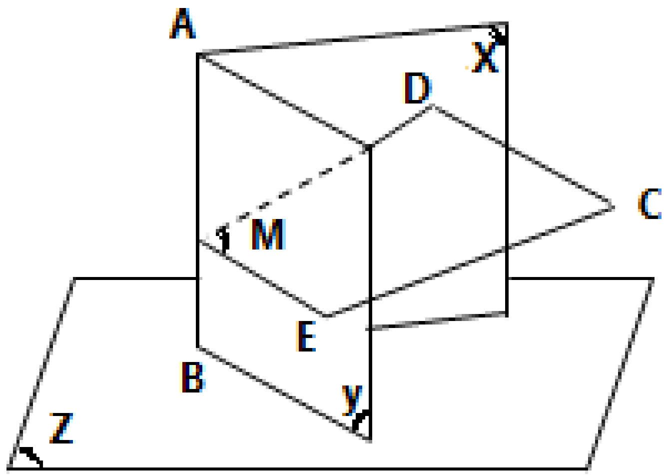
$\therefore$ يتطابق المثلثان بضلعين وزاوية محددة بهما.

ومن التطابق ينتج: $CD = BD$

(و. هـ. م)

(وزاري 2015 / د1)

س5 / برهن أنه إذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستوياً معلوم وكانا عموديين على مستويين متقاطعين فأن مستقيم تقاطع المستويين المتقاطعين يكون عمودياً على المستوى المعلوم.



المعطيات: $\overleftrightarrow{CD} \perp (x)$, $\overleftrightarrow{CE} \perp (y)$

$\overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{CE}$ يوازيان (Z)

$(x) \cap (y) = \overleftrightarrow{AB}$

المطلوب إثباته: $\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

البرهان:

ليكن (M) مستوي المستقيمين المتقاطعين $\overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{CE}$ **(لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوي وحيد يحتويهما)**

$\because$ $\overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{CE} \parallel (Z)$ **(معطى)**

$\therefore$ $(M) \parallel (Z)$ **(إذا كان كل من مستقيمين متقاطعين يوازيان مستوياً معلوماً فإن مستويهما يوازي المستوي المعلوم)**

ولكن $\overleftrightarrow{CD} \perp (x)$ ، $\overleftrightarrow{CE} \perp (y)$ **(معطى)**

$\therefore$ $(M) \perp (x), (y)$ **(يتعامد المستويان إذا احتوى أحدهما على مستقيم عمودي على الآخر)**

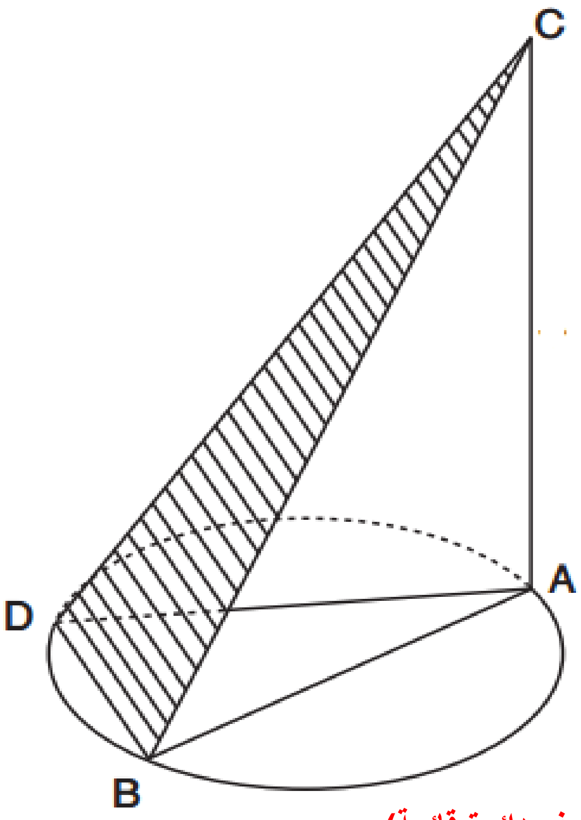
$\because$ $(x) \cap (y) = AB$ **(معطى)**

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp (M)$ **(إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث فأن مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوي الثالث)**

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$ **(المستقيم العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)**

(و. هـ. م)

س6 / دائرة قطرها $\overline{AC}, \overline{AB}$ عمودي على مســـتويها ، D نقطة تنتمي للدائرة برهن أن (CDA) عمودي على (CDB)



المعطيات:

$\overline{AB}$ قطر في دائرة و $\overline{AC} \perp$ مستوي الدائرة.

D نقطة تنتمي للدائرة.

المطلوب إثباته:

$(CDA) \perp (CDB)$

البرهان:

$\because$ $\measuredangle ADB$ زاوية محيطية

$\therefore$ $m\measuredangle ADB = 90°$ (الزاوية المحيطية المقابلة لنصف دائرة قائمة)

$\therefore$ $\overline{AD} \perp \overline{DB}$ (إذا كانت الزاوية بين مستقيمين قائمة فأن المستقيمين متعامدين)

$\because$ $\overline{AC}$ عمودي على مستوي الدائرة (معطى)

$\therefore$ $\overline{CD} \perp \overline{DB}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$\therefore$ اصبح لدينا: $\overline{DB} \perp \overline{CD}, \overline{AD}$ (بالبرهان)

$\overline{DB} \perp (CDA)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

ولكن $\overline{DB} \subset (CDB)$

$\therefore$ $(CDA) \perp (CDB)$ (يتعامد المستويان إذا احتوى أحدهما على مستقيم عمودي على الآخر)

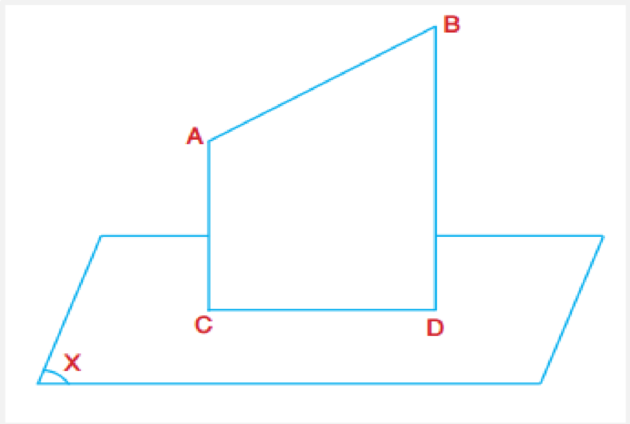
(و. هـ. م)

الاسقاط العمودي على مستوٍ

١- مسقط نقطة على مستوٍ: هو أثر العمود المرسوم من تلك النقطة على المستوي.

٢- مسقط مجموعة نقط على مستوي: لتكن L مجموعة من نقاط في الفراغ فأن مسقطهما هو مجموعة كل اثار الاعمدة المرسومة من نقاطه على المستوي.

٣- مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوٍ معلوم: هو قطعة المستقيم المحددة بأثري العمودين المرسومين من نهايتي القطعة على المستوي المعلوم.



ليكن $\overline{AB}$ غير عمودي على (x)

وليكن $\overline{\quad}$ مسقط A على هو

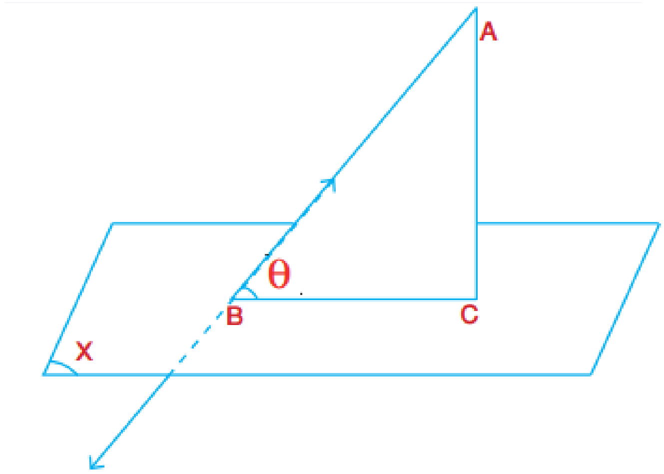
مسقط B على (x) هو $\overline{\quad}$

مسقط $\overline{AB}$ على (x) هو $\overline{\quad}$

ملاحظة: إذا كان $\overline{AB} \,//\, (x)$ فأن

٤- المستقيم المائل على مستوٍ: هو المستقيم غير العمودي على المستوي وقاطع له.

٥- زاوية الميل: هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي.



ليكن $\overleftrightarrow{AB}$ مائلاً على (x) في B

وليكن $\overline{AC} \perp (x)$ في

مسقط A على (x) حيث

كذلك B مسقط نفسها حيث

مسقط $\overline{AB}$ على $\overline{\quad}$

أي أن $0 < \theta < 90°$

$\theta \in (0, 90°)$

٦- طول المسقط: طول مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ = طول المائل × جيب تمام زاوية الميل.

فعندما تكون $\overline{AB}$ مائلاً على (x) وزاوية ميلة θ ومسقطه $\overline{BC}$ فأن θ

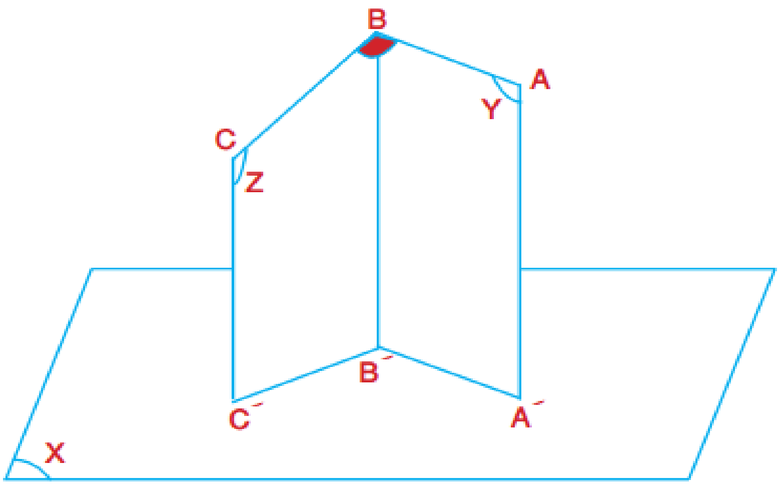
٧- مسقط مستوي مائل على (x): زاوية ميل مستوٍ على مستوٍ معلوم هو قياس الزاوية المستوية العائدة للزاوية الزوجية بينهما.

مساحة مسقط منطقة مائلة على مستوٍ معلوم = مساحة المنطقة المائلة × جيب تمام زاوية الميل

A مساحة المنطقة المائلة و A' مساحة المسقط و θ قياس زاوية الميل $\cos\theta$

مثال (4): (وزاري 2013/ د 2):

إذا وازى أحد ضلعي زاوية قائمة مستوياً معلوماً فأن مسقطي ضلعيهما على المستوي متعامدان.



المعطيات: $\measuredangle ABC$ قائمة في B

$\overline{AB} // (x)$

$\overline{A'B'}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (x)

$\overline{B'C'}$ هو مسقط $\overline{BC}$ على (x)

المطلوب إثباته: $A'B' \perp B'C'$

البرهان:

$\overline{A'B'}$ مسقط $\overline{AB}$
$\overline{B'C'}$ مسقط $\overline{BC}$ } (معطى)

$\Leftarrow (x) \perp \overline{CC'}, \overline{BB'}, \overline{AA'}$ (مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ معلوم هو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة)

$\overline{BB'} // \overline{CC'}$, $\overline{AA'} // \overline{BB'}$ (المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان)

بالمستقيمين المتوازيين AA' , BB' نعين (y)
بالمستقيمين المتوازيين BB' , CC' نعين (Z) } (لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحتويهما)

لكن $\overline{AB} // (x)$ (معطى)

$A'B' = (X) \cap (Y)$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

$\Leftarrow \overline{AB} // \overline{A'B'}$ (إذا وازى مستقيم مستوياً معلوماً فأنه يوازي جميع المســــتقيمات الناتجة من تقاطع هذا المستوي والمستويات التي تحوي المستقيم)

كذلك $\overline{BB'} \perp \overline{A'B'}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

$\overline{AB} \perp \overline{BB'}$ (في المستوي الواحد: المستقيم العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

لكن $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ (لأن $m\measuredangle ABC = 90$ معطى)

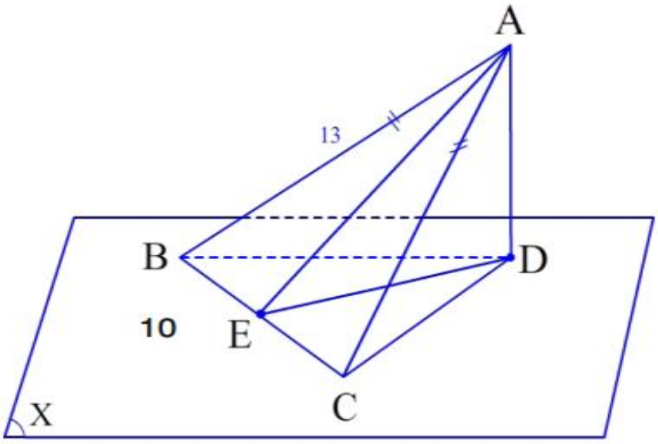
$\Leftarrow \overline{A'B'} \perp (Z)$ (المستوي العمودي على أحد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

$\therefore \overline{A'B'} \perp \overline{B'C'}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي).

(و. هـــ . م)

مثال (5):

ABC مثلث، $\overline{BC} \subset (x)$ والزاوية الزوجية بين مستوي المثلث ABC والمستوي (x) قياسها $60°$ فإذا كان $AB = AC = 13\ cm\ ,\ BC = 10\ cm$ جد مسقط المثلث (ABC) على (x) ثم جد مساحة مسقط ΔABC على (x) .



المعطيات: $\Delta ABC ,\ \overline{BC} \subset (x)$

قياس $(ABC) - \overleftrightarrow{BC} - (X) = 60°$

$AB = AC = 13\ cm\ , BC = 10\ cm$

المطلوب إثباته: إيجاد مسقط ΔABC على (x)
وإيجاد مساحة مسقط ΔABC على (x)

البرهان:

نرسم $AD \perp (x)$ في D (يمكن رسم عمود على مستوي من نقطة معلومة)

$\therefore$ $\overline{CD}$ مسقط $\overline{AC}$

$\overline{BD}$ مسقط $\overline{AB}$

$\overline{BC}$ مسقط نفسه على (x)

(مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ معلوم هو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة)

$\therefore$ ΔBCD مسقط ΔABC على (x)

في (ABC) نرسم $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ في E (في المستوى الواحد يمكن رسم مستقيم عمود على آخر من نقطة معلومة)

وبما أن $AB = AC$ (معطى)

$\therefore$ $BE = EC = 5\ cm$ (العمود النازل من رأس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها)

$\therefore$ $\overline{ED} \perp \overline{BC}$ (نتيجة مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$\therefore$ $\measuredangle DEA$ عائدة للزاوية الزوجية $\overline{BC}$ (تعريف الزاوية العائدة)

لكن قياس الزاوية الزوجية $\overline{BC} = 60°$ (معطى)

في ΔAEB القائم في E: $AE = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12\ cm$

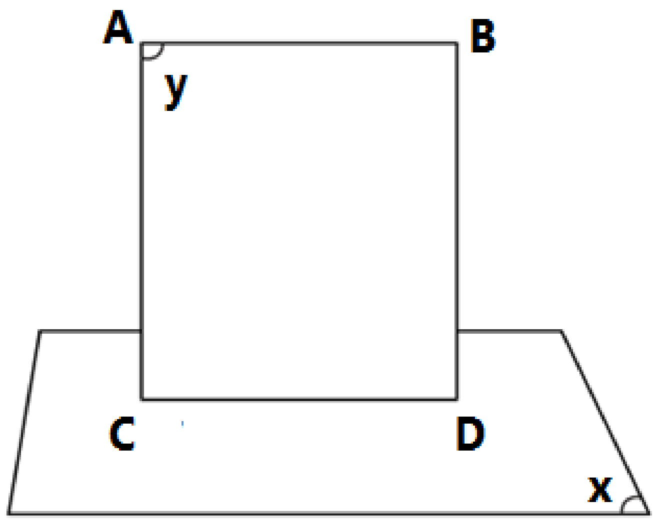
في ΔAED القائم في D: $\cos 60° = \frac{ED}{AE} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{ED}{12} \Rightarrow ED = 6\ cm$

مساحة المثلث BCD = $\frac{1}{2} \times 10 \times 6 = 30\ cm^2$

(و. هـ .م)

تمارين(2 – 6)

س1 / برهن أن طول قطعة المستقيم الموازي لمستوٍ معلوم يساوي طول مسقطه على المستوي المعلوم ويوازيه. (وزاري 2011/ د 1 و 2014/ د 1 و 2016/ د 1)



المعطيات: $\overline{AB}\ //\ (x)$

$\overline{CD}$ مسقط $\overline{AB}$ على (x)

المطلوب إثباته:

أولاً : $\overline{AB}\ //\ \overline{CD}$

ثانياً : $AB\ =\ CD$

البرهان:

$\because$ $\overline{CD}$ مسقط $\overline{AB}$ على (x) (معطى)

$\therefore$ $\overline{AC},\overline{BD}$ عمودان على (x) (مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ هو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين من طرفي القطعة على المستوي)

$\therefore$ $\overline{AC}\ //\ \overline{BD}$ (المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان)

بالمستقيمين المتوازيين AC, BD نعين (y) (لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحتويهما)

$\because$ $\overline{AB}\ //\ (x)$ (معطى)

$\therefore$ $\overline{AB}\ //\ \overline{CD}$ (مستقيم تقاطع مستويين يوازي كل مستقيم محتوى في احدهما ويوازي الآخر)

أو (إذا وازى مستقيم مستوياً معلوماً فأنه يوازي جميع المستقيمات الناتجة من تقاطع هذا المستوي مع المستويات التي تحوي هذا المستقيم)

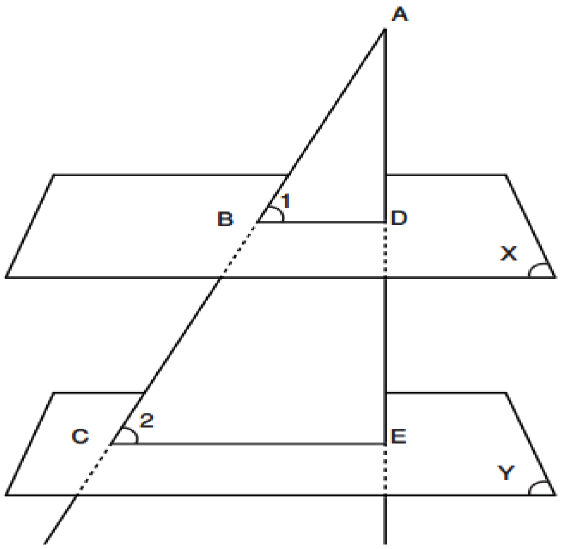
(و. هـ . م) (1)

$\therefore$ الشكل $(ABDC)$ متوازي أضلاع (لأن كل ضلعين متقابلين فيه متوازيين)

$\therefore$ $AB\ =\ CD$ خواص متوازي الأضلاع (كل ضلعين متقابلين فيه متساويين بالطول)

(و. هـ . م) (2)

س2 / برهن أنه إذا قطع مســـتويان متوازيان بمستقيم فأن ميله على احدهما يساوي ميل الآخر عليه.
(وزاري 2012/ د 2) و (وزاري 2015/ د 3)



المعطيات:

$\overleftrightarrow{AC} \cap (x) = \{B\}$, $(x) // (y)$

$\overleftrightarrow{AC} \cap (y) = \{C\}$

المطلوب إثباته:

ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (x) = ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (y)

البرهان:

نرسم $\overleftrightarrow{AD} \perp (x)$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة)

$\because$ $(x) // (y)$ (معطى)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AD} \perp (y)$ في نقطة E (المستقيم العمودي على أحد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{BD}$ مسقط $\overleftrightarrow{AC}$ على (x)
وكذلك $\overleftrightarrow{CE}$ مسقط $\overleftrightarrow{AC}$ على (y)
(مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوٍ معلوم هو قطعة المستقيم المحددة بأثري العمودين المرسومين من طرفي القطعة على المستوي)

$\therefore$ $\measuredangle 1$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (x)
$\measuredangle 2$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (y)
(زاوية ميل مستقيم مائل على مستوٍ معلوم هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على ذلك المستوي)

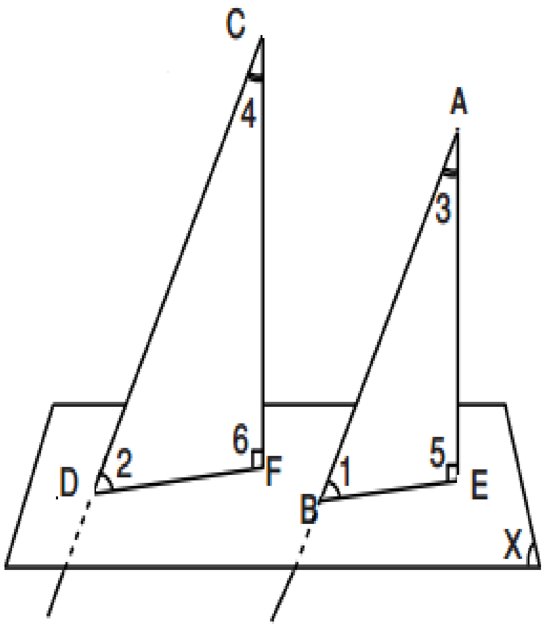
$\therefore$ $\overleftrightarrow{BD} // \overleftrightarrow{CE}$ (خطأ تقاطع مستويين متوازيين بمستوٍ ثالث متوازيان)

$\therefore$ $m\measuredangle 1 = m\measuredangle 2$ (إذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية أخرى تساوى قياسهما وتوازى مستويهما)

$\therefore$ ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (x) = ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (y)

(و. هـ . م)

س3 / برهن على أن للمستقيمات المتوازية المائلة على مستوٍ الميل نفسه.
(وزاري 2011/ د 3) (وزاري 2013/ د 3)



المعطيات:

$\overleftrightarrow{CD} // \overleftrightarrow{AB}$ وكل منهما مائل على (x)

المطلوب إثباته:

قياس زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (x) = قياس زاوية ميل $\overleftrightarrow{CD}$ على (x)

البرهان:

ليكن $\overleftrightarrow{AE} \perp (x)$ في E
وليكن $\overleftrightarrow{CF} \perp (x)$ في F
(يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة معلومة)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{BE}$ مسقط $\overleftrightarrow{AB}$ على (x)
$\therefore$ $\overleftrightarrow{DF}$ مسقط $\overleftrightarrow{CD}$ على (x)
(مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوٍ معلوم هو قطعة المستقيم المحددة بأثري العمودين المرسومين من طرفي القطعة على المستوي)

$\therefore$ $\measuredangle 1$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (x)
$\measuredangle 2$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{CD}$ على (x)
(زاوية ميل مستقيم مائل على مستوٍ معلوم هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي المعلوم)

$\because$ $\overleftrightarrow{AB} // \overleftrightarrow{CD}$ (معطى)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AE} // \overleftrightarrow{CF}$ (المستقيمان العموديان على مستوٍ متوازيان)

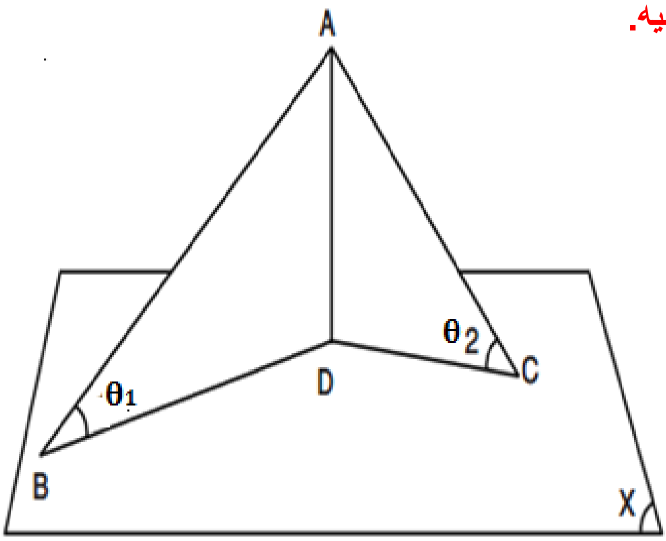
$m\measuredangle 3 = m\measuredangle 4$ (إذا وازى ضلعا زاوية ضلعي زاوية أخرى تساوى قياسهما وتوازي مستويهما)

$\therefore$ $m\measuredangle 5 = m\measuredangle 6 = 90°$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

$\therefore$ $m\measuredangle 1 = m\measuredangle 2$ (مجموع قياسات زوايا المثلث $= 180°$)
$\therefore$ قياس زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (x) = قياس زاوية ميل $\overleftrightarrow{CD}$ على (x)

(و. هـ. م)

س4 / برهن على أنه إذا رسم مائلان مختلفان في الطول من نقطة لا تنتمي إلى مستوٍ معلوم فإن أطولهما زاوية ميله على المستوي أصغر من زاوية ميل الآخر عليه.



المعطيات:

$A \notin (x), AB > AC$

المطلوب إثباته:

زاوية ميل $\overline{AB}$ على (x) > زاوية ميل $\overline{AC}$ على (x)

البرهان:

ليكن $\overline{AD} \perp (x)$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ من نقطة لا تنتمي إليه)

∴ $\overleftrightarrow{DB}$ مسقط $\overleftrightarrow{AB}$ على (x)
∴ $\overleftrightarrow{DC}$ مسقط $\overleftrightarrow{AC}$ على (x)
(مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوٍ معلوم هو قطعة المستقيم المحددة بأثري العمودين المرسومين من طرفي القطعة على المستوي)

∴ $\theta_1 \measuredangle$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AB}$ على (x)
$\theta_2 \measuredangle$ هي زاوية ميل $\overleftrightarrow{AC}$ على (x)
(زاوية ميل مستقيم مائل على مستوٍ معلوم هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على ذلك المستوي)

∵ $AB > AC$ (معطى)

$\frac{1}{AB} < \frac{1}{AC}$ (خواص التراجح)

وبضرب طرفي المتراجحة بـ AD ينتج:

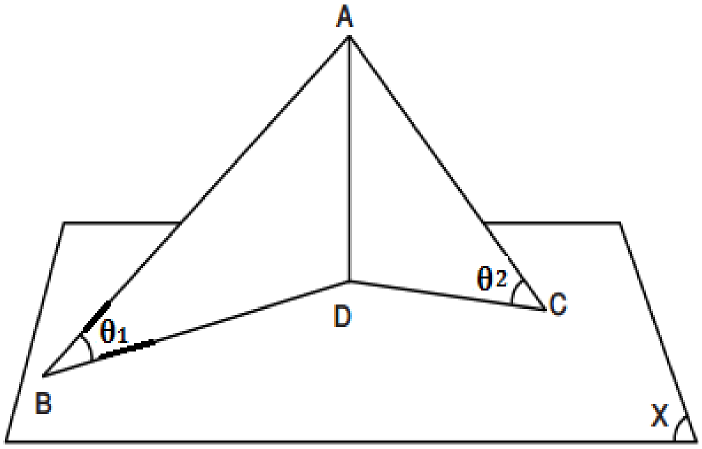
$\sin\theta 1 < \sin\theta 2$ (وبرفع sin الطرفين لأن دالة sin دالة متزايدة)

∴ $\theta_1 < \theta_2$

∴ زاوية ميل $\overline{AB}$ على (x) > زاوية ميل $\overline{AC}$ على (x)

(و. هـ. م)

س5 / برهن على أنه إذا رسم مائلان من نقطة ما إلى مستوٍ فأصغرهما ميلاً هو الأطول.



المعطيات:

$\overline{AB}\,,\overline{AC}$ مائلان على (x)

زاوية ميل$\overline{AC}$ على (x) $<$ زاوية ميل $\overline{AB}$ على (x)

المطلوب إثباته:

$AB \;>\; AC$

البرهان:

ليكن $(x) \perp \overline{AD}$ (يمكن رسم مستقيم عمودي على مستوٍ من نقطة لا تنتمي إليه)

$\therefore$ $\overline{DB}$ مسقط $\overline{AB}$ على (x)
وكذلك $\overline{DC}$ مسقط $\overline{AC}$ على (x)
(مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوٍ معلوم هو قطعة المستقيم المحددة بأثري العمودين المرسومين من طرفي القطعة على المستوي)

$\therefore$ $\theta_1 \measuredangle$ هي زاوية ميل $\overline{AB}$ على (x)
$\theta_2 \measuredangle$ هي زاوية ميل $\overline{AC}$ على (x)
(زاوية ميل مستقيم مائل على مستوٍ معلوم هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي المعلوم)

$m\measuredangle\,\theta_1 \;<\; m\measuredangle\,\theta_2$

وبأخذ دالة الـ (sin) للطرفين:

$\sin\theta_1 \;<\; \sin\theta_2$

$\dfrac{AD}{AB} < \dfrac{AD}{AC}$ و بقسمة طرفي المتراجحة على AD

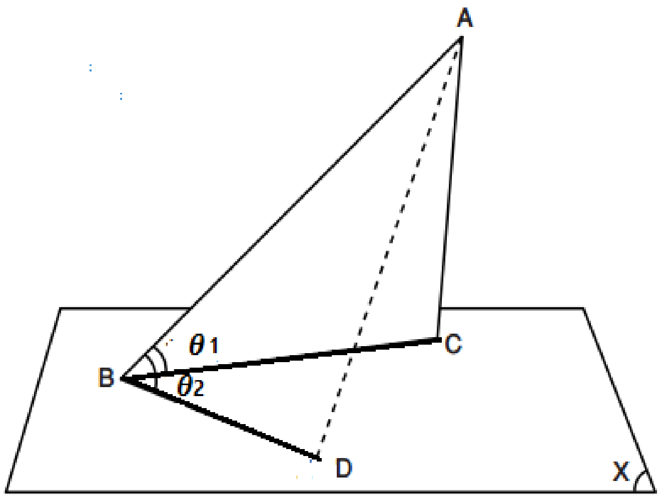
$\dfrac{1}{AB} < \dfrac{1}{AC}$

وبقلب التراجح ينتج :

$AB \;>\; AC$ (خواص التراجح)

(و. هـ . م)

س6 / برهن على أنه زاوية الميل بين المستقيم ومسقطه على مستوٍ أصغر من الزاوية المحصورة بين المستقيم نفسه وأي مستقيم آخر مرسوم من موقعه ضمن ذلك المستوي. (وزاري 2012/ د3)



المعطيات:

$\overline{AB}$ مائل على (x) ، $\overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (x)

$\overline{BD} \subset (x)$, $\sphericalangle ABC$ محددة بـ $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$

$\sphericalangle ABD$ محددة بـ $\overline{AB}$ و $\overline{BD}$

المطلوب إثباته:

$m\sphericalangle ABC < m\sphericalangle ABD$

البرهان:

نرسم $\overline{AC} \perp (x)$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوي معلوم من نقطة لا تنتمي إليه)

ونرسم $\overline{AD} \perp \overline{BD}$ (يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستوي معلوم من نقطة لا تنتمي إليه)

لتكن $\sphericalangle ABC = \theta_1$, $\sphericalangle ABD = \theta_2$

$\because$ $\overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (x) (معطى)

$AC < AD$ (العمود النازل من نقطة على مستوي هو أقصر مسافة بين النقطة المعلومة والمستوي)

وبالقسمة على AB

$\frac{AC}{AB} < \frac{AD}{AB}$ (خواص التراجح)

$\sin\theta_1 < \sin\theta_2$

$\theta_1 < \theta_2$

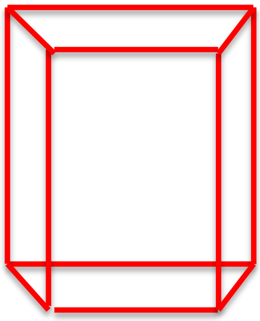
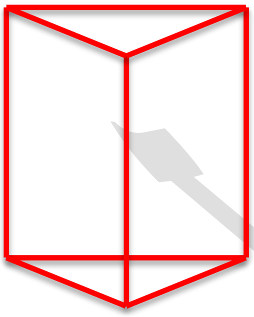
$m\sphericalangle ABC < m\sphericalangle ABD$

(و. هـ. م)

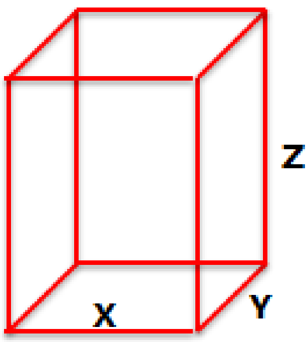
المجسمات

سبق للطالب دراسة المجسمات في المرحلة المتوسطة ونلخص فيما يلي قوانين الحجوم والمساحات الجانبية والكلية لبعض المجسمات علماً أن الحديث عن حجم مجسم نقصد به حجم المنطقة في الفراغ (الفضاء) الواقعة داخل المجسم كما في الجدول:

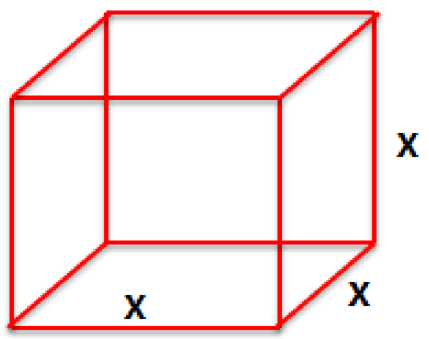
1– الموشور (المنشور القائم) Right Prism

الرسم	 
الحجم Volume	مساحة القاعدة × الارتفاع
المساحة الجانبية Lateral Area	مجموع مساحات الأوجه الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع
المساحة الكلية Total Area	المساحة الجانبية + مساحة القاعدتين

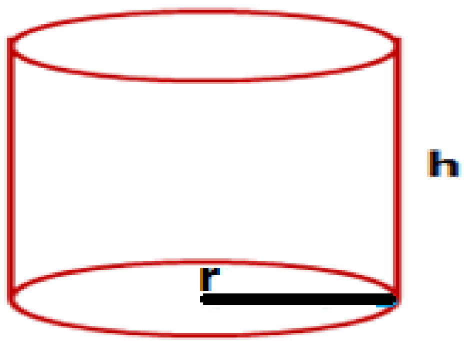
2– متوازي السطوح المستطيلة (متوازي المستطيلات) Parallel piped

الرسم	
الحجم Volume	$V = x.y.z$
المساحة الجانبية Lateral Area	$L.A = 2(x+y)z$
المساحة الكلية Total Area	$T.A = 2(x+y)z + 2x.y$

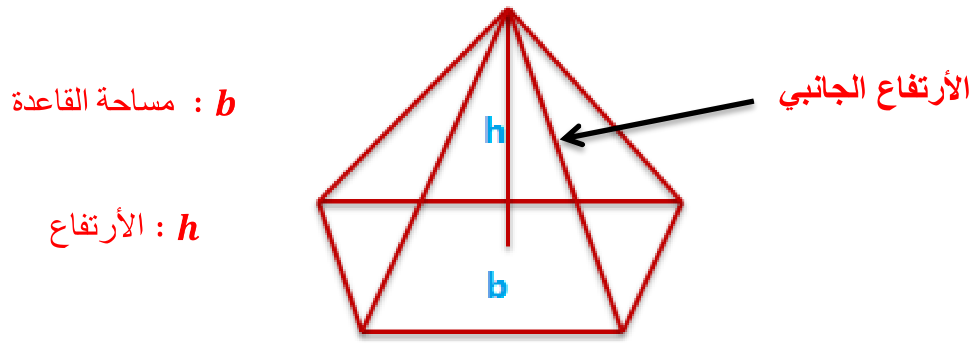
3– المكعب Cube

الرسم	
الحجم Volume	$V = x^3$
المساحة الجانبية Lateral Area	$L.A = 4x^2$
المساحة الكلية Total Area	$T.A = 6x^2$

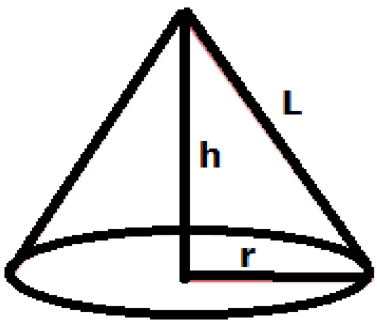
4– الأسطوانة الدائرية القائمة Right Circular Cylinder

الرسم	
الحجم Volume	$V = \pi r^2 h$
المساحة الجانبية Lateral Area	$L.A = 2\pi r h$
المساحة الكلية Total Area	$T.A = 2\pi r h + 2\pi r^2$

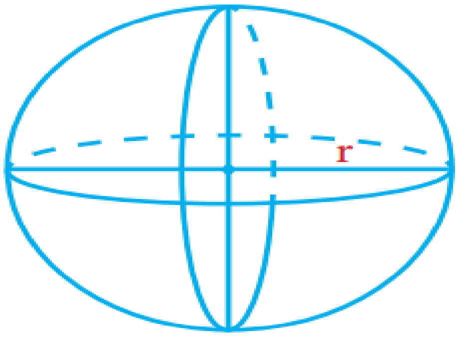
5– الهرم Pyramid

الرسم	
الحجم Volume	$V = \frac{1}{3} bh$
المساحة الجانبية Lateral Area	$L.A = \frac{1}{2}$ (محيط القاعدة) × (طول الأرتفاع الجانبي)
المساحة الكلية Total Area	$T.A =$ المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

6– المخروط الدائري القائم Right Circular Cone

الرسم	
الحجم Volume	$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$
المساحة الجانبية Lateral Area	$L.A = \pi r L$
المساحة الكلية Total Area	$T.A = \pi r L + \pi r^2$

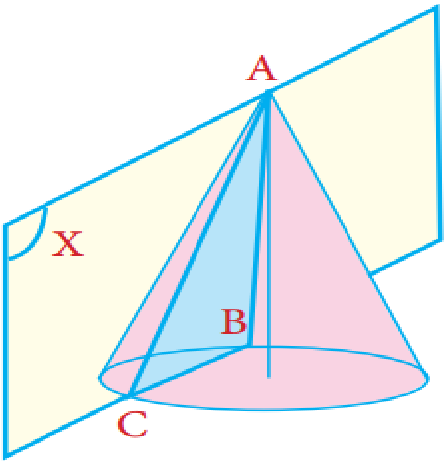
7– الكرة Sphere

الرسم	
الحجم Volume	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
المساحة الكلية Total Area	مساحة مسطح الكرة = مساحة 4 دوائر عظيمة $S = \pi r^2$

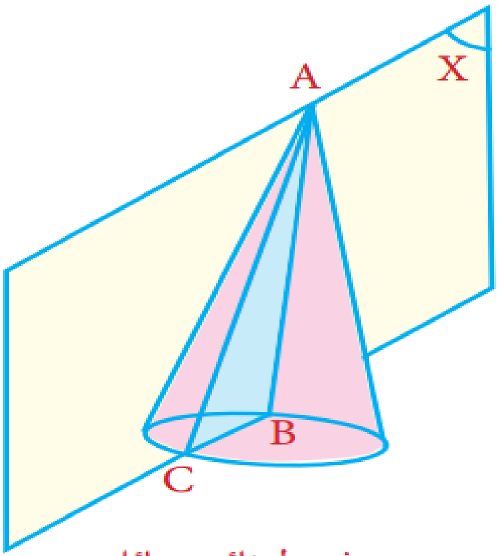
ملاحظة:

1 - ذو الوجوه الأربعة المنتظم: هرم ثلاثي قائم منتظم أوجهه الاربعة مثلثات متساوية الأضلاع ومتطابقة.

2 - إذا قطع المخروط الدائري بمستوي مار من أحد مولداته فأن المقطع مثلث ويكون المثلث في المخروط الدائري القائم متساوي الساقين.



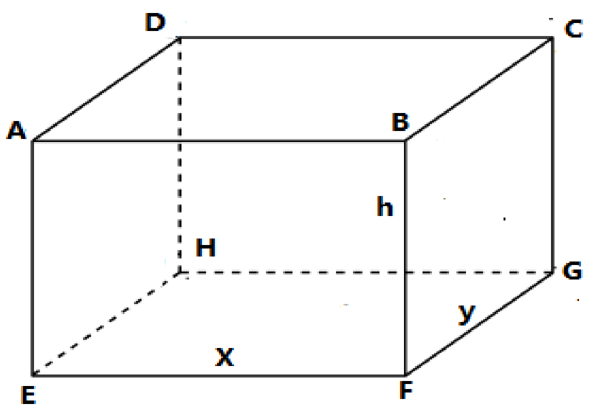
مخروط دائري قائم
$\Leftarrow AC = AB$



مخروط دائري مائل
$\Leftarrow AC \neq AB$

تمارين(3 – 6)

س1 / إذا كانت المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات $= 724\ cm^2$ ومساحة قاعدته $= 132\ cm^2$ ومساحة احد أوجهه الجانبية $= 110cm^2$ جد ابعاده وحجمه.



المعطيات: ABCD – EFGH متوازي مستطيلات

مساحته الكلية $= 724\ cm^2$

ومساحة الوجه الجانبي CBFG$= 110cm^2$

ومساحة القاعدة EFGH $= 132\ cm^2$

المطلوب إثباته:

1 - إيجاد أبعاد متوازي المستطيلات ABCD – EFGH

2 - إيجاد حجم متوازي المستطيلات ABCD – EFGH

البرهان: لتكن $L.A$ =المساحة الجانبية لمتوازي المستطيلات

$T.A$ = المساحة الكلية له

وليكن x = طول قاعدة متوازي المستطيلات y = عرض قاعدته h = ارتفاعه V = حجمه

$$L.A = 724 - [2(132)] = 724 - 264 = 460\ cm^2$$

∴ مساحة الوجهين المتقابلين $(\overline{BE}), (\overline{CH}) = [460 - 2(110)]$

$= 240\ cm^2$

∴ مساحة الوجه $(\overline{BE}) = 120\ cm^2$

$xy = 132 \Rightarrow y = \frac{132}{x}$ ....معادلة(1)

$xh = 120 \Rightarrow h = \frac{120}{x}$ ....معادلة(2)

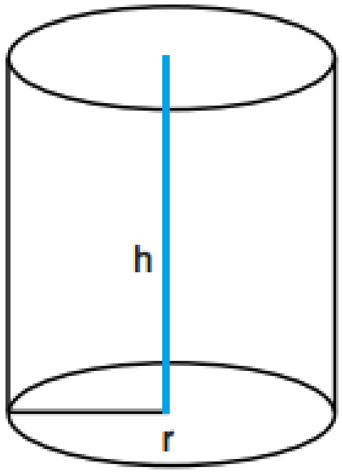
$$yh = 110 \Rightarrow y = \frac{132}{x} \cdot \frac{120}{x} = 110 \Rightarrow 110x^2 = (132)(120)$$

$$x^2 = \frac{(130)(120)}{110} = 144$$

$\therefore x = 12\ cm \quad , \quad y = 11\ cm \quad , \quad h = 10\ cm$

الحجم $(V) = xyh = (12)(11)(10) = 1320\ cm^3$

س2 / اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية $400\,\pi\, cm^2$ وحجمها $2000\,\pi\, cm^3$ أوجد ارتفاعها ونصف قطر قاعدتها.   (وزاري 2014 / د2) و (وزاري 2015 / د2)



المعطيات:

اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية $= 400\,\pi\, cm^2$

وحجمها $= 2000\,\pi\, cm^3$

المطلوب إثباته:

1 - إيجاد ارتفاع الاسطوانة الدائرية القائمة.

2 - إيجاد نصف قطر الاسطوانة الدائرية القائمة.

البرهان:

ليكن طول نصف قطر الاسطوانة الدائرية القائمة $= r$ ، وارتفاعها $= h$ ، وحجمها $= V$

ومساحتها الجانبية $= L.A$

المساحة الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع

$$L.A = 2\,\pi\, rh$$

$$400\,\pi = 2\,\pi\, rh \xrightarrow{(2\pi \text{ تقسيم})} rh = 200 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

حجم الاسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

$$V = \pi\, r^2\, h$$

$$2000\,\pi = \pi\, r^2 h \xrightarrow{(\pi \text{ تقسيم})} r^2 h = 2000 \;\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

وبقسمة معادلة (2) على معادلة (1):

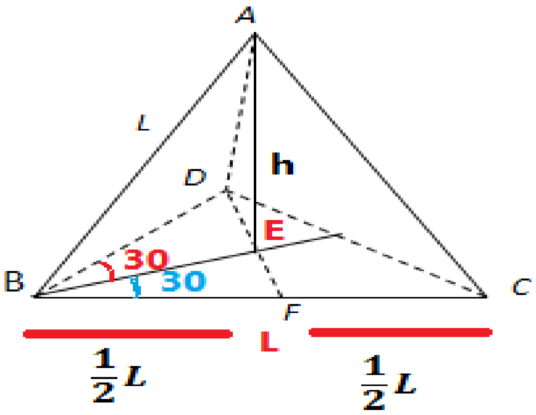
$$\frac{r^2 h}{rh} = \frac{2000}{200} \Rightarrow r = 10\, cm$$

وبتعويض قيمة (r) في معادلة (1) ينتج:

$$10h = 200 \Rightarrow h = 20\, cm$$

(و. هـ. م)

س3 / برهن على أن حجم ذو الوجوه الاربعة المنتظم والذي طول حرفه L هو $\frac{\sqrt{12}}{12}L^3$ وحدة مكعبة.
(وزاري 2012/ د 1) و (وزاري 2014/ د 3)



المعطيات: A – DBC ذو الوجوه الاربعة المنتظم وطول حرفه L.

المطلوب إثباته: الحجم = $V = \frac{\sqrt{12}}{12}L^3$ وحدة مكعبة

البرهان:
ذو الوجوه الاربعة المنتظم هو هرم ثلاثي قائم منتظم أوجهه الاربعة مثلثات متساوية الاضلاع ومتطابقة.

∴ القاعدة BCD مثلث متساوي الاضلاع.

نرسم الاعمدة المنصفة من رؤوس $\Delta\ BCD$ على القاعدة فينصفها (العمود النازل من رأس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها)

قياس كل زاوية من زوايا المثلث المتساوي الاضلاع $= 60°$

$\therefore\ m\sphericalangle EBF = 30°$

ليكن ارتفاع ذو الوجوه الاربعة المنتظم $= AE = h$

$\Delta\ BEF$ قائم الزاوية في $F \Leftarrow \cos 30 = \frac{BF}{BE}$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\frac{1}{2}L}{BE} \Rightarrow BE = \frac{L}{\sqrt{3}}$$

$\Delta\ AEB$ قائم الزاوية في E (المستقيم العمودي على مستوٍ يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

$$L^2 = h^2 + \frac{L^2}{3} \Rightarrow h^2 = L^2 - \frac{L^2}{3} \Rightarrow h^2 = \frac{2}{3}L^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}L$$

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$$\therefore V = \frac{1}{3}\left[\frac{\sqrt{3}}{4}L^2\right]h = \left(\frac{1}{12}\right)\left(\sqrt{3}L^2\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}L\right) = \frac{\sqrt{2}}{12}L^3$$

(و. هـ. م)

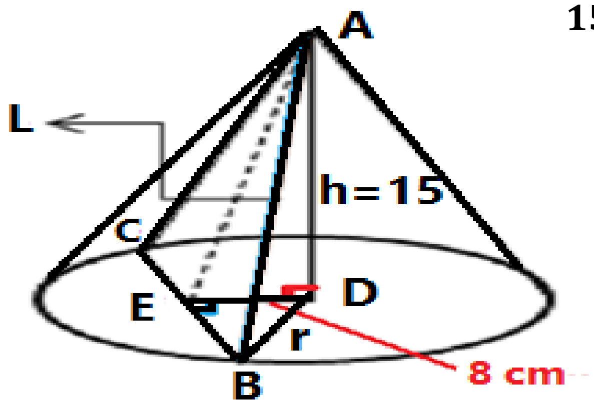
ملاحظة :

مساحة قاعدة الهرم = مساحة مثلث متساوي الأضلاع $= \frac{\sqrt{3}}{4}L^2$ حيث (l) هو طول الحرف للهرم

س4 / مخروط دائري قائم مر برأسه مستوٍ فقطع قاعدته بقطعة مستقيم تبعد عن مركز القاعدة بمقدار $8\ cm$ ، فإذا كانت مساحة المقطع $= 102\ cm^2$ وارتفاع المخروط $= 15\ cm$ أحسب:
① حجمه. ② مساحته الجانبية. ③مساحته الكلية.
(وزاري 2015 / د1)

المعطيات:

مخروط دائري قائم مر برأسه مستوٍ فقطع قاعدته بقطعة مستقيم تبعد عن مركز القاعدة بمقدار $8\ cm$ ، فإذا كانت مساحة المقطع $= 102\ cm^2$ وارتفاع المخروط $= 15\ cm$



المطلوب إثباته:

1 - حساب حجم المخروط.

2 - حساب مساحته الجانبية.

3 - حساب مساحته الكلية.

البرهان:
ليكن $BD = y$ ويمثل طول نصف قطر قاعدة المخروط ، $AD = h$ ويمثل الارتفاع ، V يمثل الحجم ، $L.A$ = المساحة الجانبية ، $L = AB$ ويمثل الارتفاع الجانبي ، $T.A$ = المساحة الكلية.
في المثلث ADE القائم الزاوية في D (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوى)

$$(AE)^2 = (15)^2 + (8)^2 = 225 + 64 = 289 \quad \Rightarrow \quad AE = \sqrt{289} = 17\ cm$$

$\because$ $\overline{AD}$ عمودي على مستوي القاعدة ، $\overline{ED} \perp \overline{BC}$ (لأنه بعد بين نقطة ومستقيم)
$\therefore$ $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

مساحة المثلث $ABC = \frac{1}{2} \times CB \times AE \quad \Leftarrow \quad \frac{1}{2} \times CB \times 17 = 102 \quad \Leftarrow \quad CB = 12\ cm$

ولكن $BE = EC$ (العمود النازل من مركز دائرة على وتر فيها ينصفه)

في المثلث DEB القائم الزاوية في E:

$$(BD)^2 = (BE)^2 + (ED)^2$$
$$(BD)^2 = 36 + 64 = 100 \quad \Rightarrow \quad BD = r = 10\ cm$$

في المثلث ADB القائم الزاوية في D:

$$(AB)^2 = (AD)^2 + (BD)^2$$
$$(AB)^2 = 225 + 100 = 325 \quad \Rightarrow \quad AB = L = 5\sqrt{13}\ cm$$

حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$$V = \frac{1}{3}(10)^2\pi\,(15) = 500\,\pi\ cm^3$$ و. هـ. م (1)

المساحة الجانبية للمخروط = $\frac{1}{2}$ محيط القاعدة × الارتفاع الجانبي

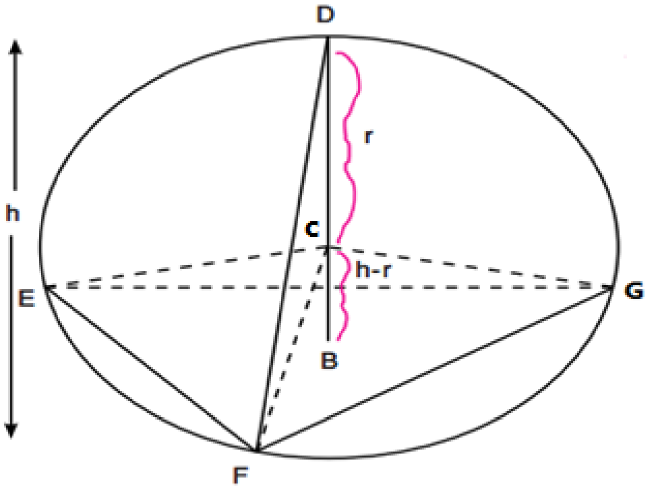
$$L.A = \frac{1}{2}(2)\,(10)\pi\,\left(5\sqrt{13}\right) = 50\sqrt{13}\,\pi\ cm^2$$ و. هـ. م (2)

المساحة الكلية للمخروط = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$$T.A = 50\sqrt{13}\pi + (10)^2\pi = 50\,\pi\left(\sqrt{13} + 2\right)\ cm^2$$ و. هـ. م (3)

س5 / إذا علمت أنه يمكن رسم كرة خارج ذو الاوجه الاربعة المنتظم .

برهن أن نصف قطر الكرة = $\frac{3}{4}$ الارتفاع   (وزاري 2011/ د1)



المعطيات:

رسمت الكرة التي مركزها C خارج ذو الاوجه الاربعة المنتظم $D - EFG$

المطلوب إثباته:

نصف قطر الكرة = $\frac{3}{4}$ الارتفاع

البرهان:

ذو الاوجه الاربعة المنتظم هو هرم ثلاثي قائم منتظم، أوجهه الاربعة مثلثات متساوية الاضلاع ومتطابقة .

لتكن مســـاحة القاعدة $A = EFG$ وارتفـــاع الهرم $= DB = h$ وحجمـــه $= V$ وطول نصف قطر الكره $= DC = r$

مركز الكرة C قسم الهرم الكبير D – EFG إلى أربعة اهرامات متساوية بالحجم لتساوي القاعدة والارتفاع وهي:

$C – DEF$ و $C – GDE$ و $C – FGD$ و $C – EFG$ وارتفاع كل منها $(h – r)$

∴ حجم ذي الوجوه الاربعة $= 4 \times$ حجم الهرم $C – EFG$

$$V = 4 \times V_{C-EFG}$$

$$\frac{1}{3}Ah = 4\left(\frac{1}{3}A\right)(h-r)$$

وبالقسمة على $\left(\frac{1}{3}A\right)$ نحصل على:

$$h = 4(h - r)$$

$$h = 4h - 4r$$

$$4r = 4h - h$$

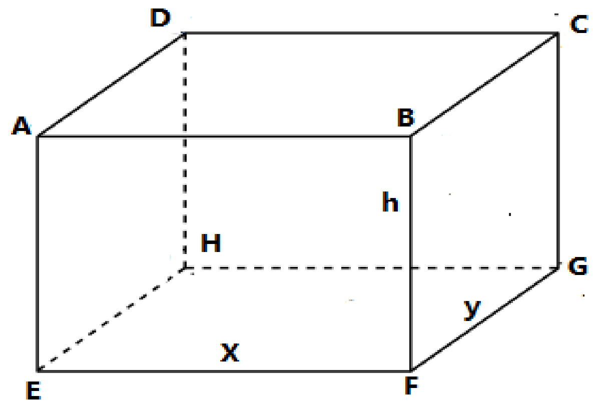
$$4r = 3h \quad \Rightarrow \quad r = \frac{3}{4}h$$

(و. هـ. م)

حلول الأسئلة الوزارية الخاصة بالفصل السادس

سؤال وزاري 2013/د1

س1 / إذا كانت المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات $= 180\ cm^3$ ومساحة قاعدته $= 48\ cm^3$ ومساحة احد أوجهه الجانبية $= 24\ cm^3$ جد ابعاده وحجمه.



المعطيات: $ABCD - EFGH$ متوازي مستطيلات

مساحته الكلية $= 180\ cm^3$

ومساحة الوجه الجانبي $CBFG= 24cm^3$

ومساحة القاعدة $EFGH = 48\ cm^3$

المطلوب إثباته:

1 - إيجاد أبعاد متوازي المستطيلات ABCD – EFGH

3 - إيجاد حجم متوازي المستطيلات ABCD – EFGH

البرهان: لتكن $L.A$ =المساحة الجانبية لمتوازي المستطيلات

$T.A$ = المساحة الكلية له

وليكن x = طول قاعدة متوازي المستطيلات y = عرض قاعدته h = ارتفاعه V = حجمه

$$L.A = 180 - [2(48)] = 180 - 96 = 84\ cm^2$$

∴ مساحة الوجهين المتقابلين $(\overline{CH}), (\overline{BE}) = [84 - 2(24)]$

$= 36\ cm^2$

∴ مساحة الوجه $(\overline{BE}) = 18\ cm^2$

$$xy = 48 \Rightarrow y = \frac{48}{x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)\text{معادلة}$$

$$xh = 17 \Rightarrow h = \frac{18}{x} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)\text{معادلة}$$

$$yh = 24 \Rightarrow y = \frac{48}{x} . \frac{18}{x} = 24 \Rightarrow 24x^2 = (48)(18)$$

$$x^2 = \frac{(48)(18)}{24} = 36$$

$\therefore x = 6\ cm \quad , \quad y = 8\ cm \quad , \quad h = 3\ cm$

الحجم $(V) = xyh = (6)(8)(3) = 144\ cm^3$

تمت بعونه تعالى

للمزيد من الملازم والدروس وكل ما يخص طلبة السادس الأعدادي زورونا على مواقع التواصل الأجتماعي ...

رحلة التفوق في السادس

رحلة التفوق في السادس

telegram.me/A_M_Z_F

رحلة التفوق في السادس

www.instagram.com/rt_edu

رحلة التفوق في السادس

عطاء بلا حدود

ا.د مينا الاحمد

ا.د اشرف الوائلي